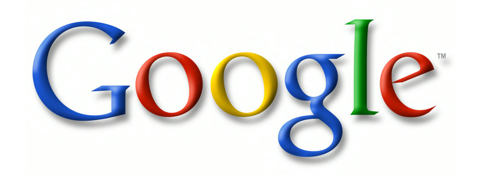
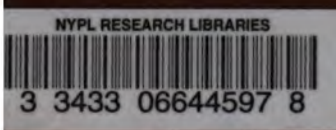
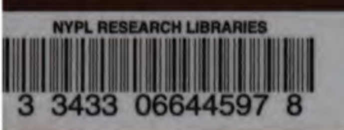


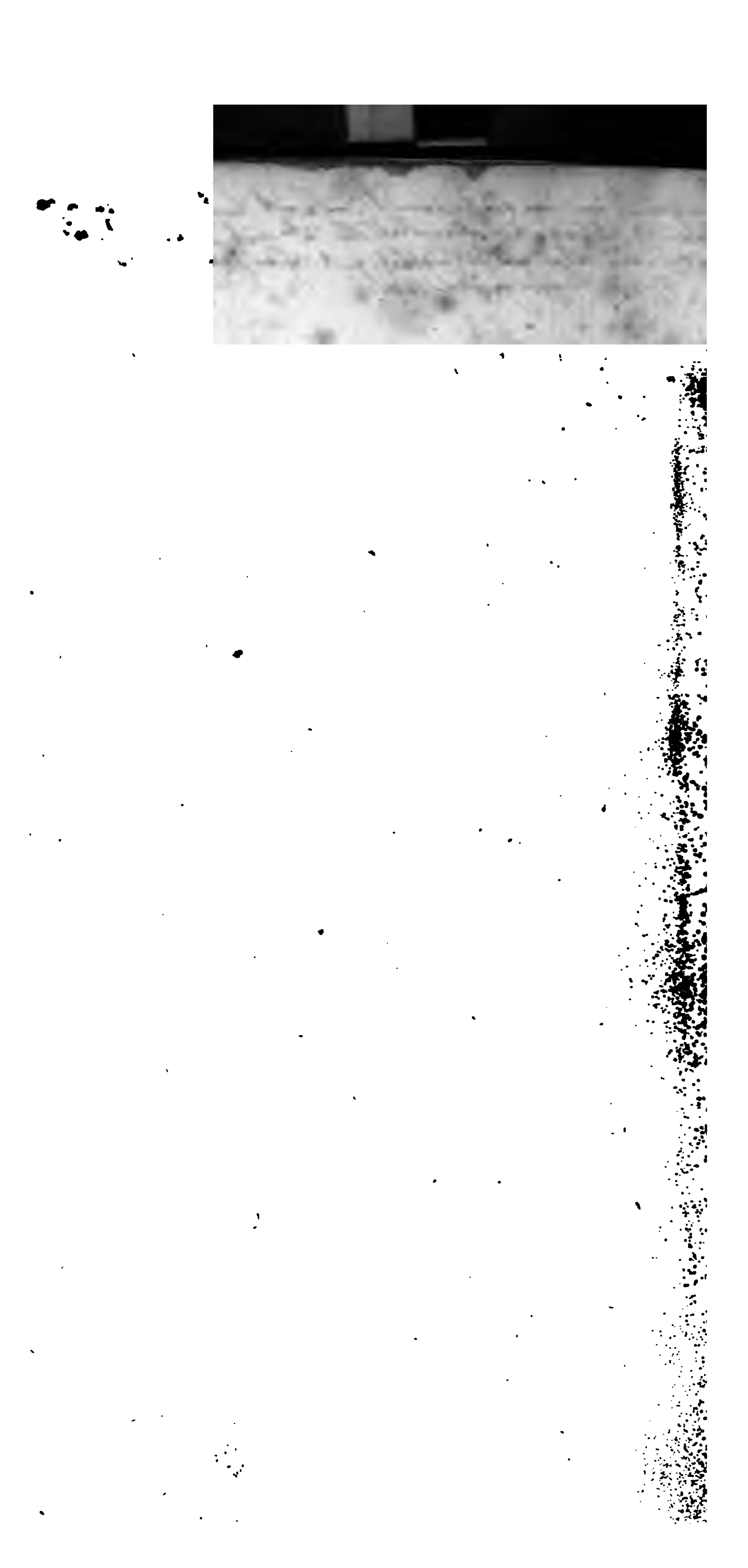

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06644597 8







…gendium der populären Mechanik und Maschinenlehre
… v. Ad. Burg, k.k. Reg. Rath etc. 2te verb. Aufl.
… 2 B. mit Atlas von 20 Kupfertaf. gr. 8. Wien, 1849. L. Preis Gulden 5 …
Die erste Ausgabe erschien 1846!



Handbuch

der

Mechanik fester Körper

und

der Hydraulik.

Mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung
in der Architektur.

Aufgesetzt

von

J. A. Eytelwein,

nigl. Preuß. Geheimen Oberbaurathe; Direktor der Königl.
uakademie; der Königl. Akademie der Künste und mechani-
en Wissenschaften und deren Senats, der Königl. Gesellschaft
r Wissenschaften und Künste zu Frankfurth a. d. Oder, der
nigl. Ostpreuß. physikalisch-ökonomischen Gesellschaft und der
Märk. ökonomischen Gesellschaft zu Potsdam Mitgliede.

Mit 60 Holzschnitten und 5 Kupfertafeln.

Berlin,
bei F. T. Lagarde.
1801.

Ex libris A. L. Hedemann
Archit. regii

Vorrede.

r richtigen Beurtheilung der Bauanlagen und
en vielen Fällen wo eigene Erfahrungen nicht
eichen, bedarf der Baumeister einer Führerin,
er vorzüglich in der Mathematik und Natur-
e findet. Besonders sind es die Resultate eini-
Theile der angewandten Mathematik, welche
seinen Geschäften in naher Verbindung stehen,
es ist zu wünschen, daß bei dem großen Um-
ge der Mathematik, für den Architekten das-
ge ausgehoben werde, was ihm zunächst Be-
niß ist.

Sollen aber mit irgend einer Rücksicht auf
endung, einzelne Resultate einer Wissenschaft
mmengestellt werden, so muß selbst Unverständ-
eit daraus entstehen, wenn diese Resultate nur
en zusammengereihet sind, und wenn die zur
rzeugung nöthigen Beweise fehlen. Dagegen
erjenige, welcher sich in der Nothwendigkeit
det, als Geschäftsmann einzelne Sätze aus
Mathematik und Naturkunde zu benutzen,

selten mit denjenigen Kenntnissen ausgerüstet, dı
die man nur freien Zutritt in diese Wissenscha
und die erforderliche Überzeugung erhalten ka
auch darf sich der Mathematiker noch nicht schı
cheln, von dem größten Theile derjenigen, we
von seinen Untersuchungen Gebrauch machen kö
ten, verstanden zu werden. Dies ist die Ursa
weshalb in der vorliegenden Schrift, die höh
Analysis im zusammenhängenden Vortrage v
mieden ist. Hiedurch entstand eine eigene Schw
rigkeit bei der Ausarbeitung dieses Handbuchs,
mit der möglichsten Kürze, dennoch nicht den
thigen Zusammenhang fehlen zu lassen, und
Beweise so vorzutragen, daß sie nicht zu weitlä
tige Vorkenntnisse erforderten. In den No
unter dem Texte sind zwar die vorzüglichsten L
ren mit Hülfe der höhern Analysis auseinan
gesetzt, um auch den kleinern Theil, welcher
dieser Rechnungsart bekannt ist, nicht unbefried
zu lassen; es war aber auch hiebei nöthig, gew
Grenzen nicht zu überschreiten.

Nach dieser Absicht wird sich über den Pl
welcher bei Bearbeitung des Handbuchs befo
ist, urtheilen lassen. Die meisten Schwierigkei
entstanden in der Hydraulik daher, daß diese
nicht nur eine ausgebreitete Theorie als Grun
lage erfordert, die hier nicht vorausgesetzt, no
weniger vollständig vorgetragen werden konnte, u

noch weit mehr, eine Menge Erfahrungen
g sind, die bis jetzt noch größtentheils fehlen,
diese Wissenschaft vollständig und überzeugend
handeln. Aus dieser letzten Ursache sind einige
n, welche wohl zur Hydraulik gehörten, gänz-
weggeblieben, bis Theorie und Erfahrung dar-
näher entscheiden; bei andern aber hat man
olche Darstellungen erlaubt, die wenn sie auch
die Erfordernisse eines mathematischen Bewei-
aben, dennoch so lange als Annäherungen
t können, bis vollständige Erfahrungen aller
neue Gesichtspunkte zu einer gründlichen
rie aufstellen.

Der angegebene Endzweck erforderte, die allge-
n Formeln zur Berechnung irgend eines Er-
bei vorkommenden Gegenständen, so viel wie
ich zu vereinfachen, weil sie sonst ihre Brauch-
t verlieren, da es bekannt genug ist, daß
oft eine Anlage lieber auf Gerathewohl aus-
rt wird, um nur der großen Beschwerde —
weitläuftigen Berechnung zu entgehen. Ohne
us zu folgern, daß strengere Untersuchungen
üssig, oder höhere Analysis eine dem for-
en Baumeister ganz entbehrliche Wissenschaft
o mußte doch auf die größte Anzahl derjeni-
welche mit derselben nicht vertraut sind, Rück-
genommen werden. Zur Versinnlichung der
reinen Sätze sind, so weit es ohne Weitläuf-

tigkeit zulässig war, Beispiele in Zahlen gegeben, und theils zur Vergleichung, theils zur Erweiterung der vorgetragenen Lehren, die vorzüglichsten hieher gehörigen Schriften angeführt. Unter den zur Erläuterung gegebenen Beispielen, sind einige, welche schon von mir der Übersetzung von du Buats Hydraulik beigefügt waren, und da solche ebenfalls in Herrn Kosmanns Hydraulik vorkommen, so wird dieses zu keiner Mißdeutung Anlaß geben.

Statik und Hydrostatik sind durchgängig als bekannt vorausgesetzt worden, und wenn in der Hydraulik von der Kraft zur Bewegung einer Maschine die Rede ist, so bezieht sich solche vorzüglich nur auf diejenigen Hindernisse, welche das Wasser der Bewegung entgegensetzt, weil die übrigen Untersuchungen in die Maschinenlehre gehören, welche auf die Hydraulik folgen soll.

Was die abgehandelten Materien selbst betrift, so erforderten einige Lehren der Mechanik fester Körper, in Hinsicht auf Hydraulik und Maschinenlehre, eine weitere Ausführung, wozu gewöhnlich die höhere Analysis nöthig ist. Indessen war man bemüht diese Lehren, auch selbst bei den Momenten der Trägheit, größtentheils mit Hülfe der Elementaranalysis auszuführen. Der Vortrag über die Bewegung des Wassers, ist auf die Versuche der vorzüglichsten Hydrauliker, so weit solche hinreichend waren, gegründet, auch sind an mehrern

t meine eigenen mit aller möglichen Sorgfalt
tellten Versuche beigefügt worden. Dem Kenner
n hoffentlich mehrere neue Ansichten nicht ent=
, wohin besonders die Untersuchung über die
sermenge bei der archimedischen Wasserschnecke
net werden kann, deren Windungen man zeit=
ls sehr enge Röhren betrachtete. Die Spiral=
e, die man noch in den Lehrbüchern vermißt,
mir einer besondern, auch dem Anfänger
ichst verständlichen Bearbeitung werth zu seyn.
n ganzer Endzweck ist erreicht, wenn ich einen
n Beitrag liefere, dem Baumeister die Noth=
gkeit und den Nutzen der mathematischen Wis=
aften recht einleuchtend zu machen.

Noch ist zu bemerken, daß sich alle Maaße,
nichts dabei erinnert ist, auf das bei uns
ührte rheinländische oder brandenburgische Fuß=
beziehen.

Berlin im Januar 1800.

J. A. E.

3te Auflage erschien 1842 bei Friedrich Fleischer in Leipzig
umgearbeitet von A. [illegible] Förstner. Mit 60 Holzschnitten
u. 6 Kupfertafeln. geheftet 3 [illegible]

tigkeit zulässig war, Beispiele in Zahlen gegeben, und theils zur Vergleichung, theils zur Erweiterung der vorgetragenen Lehren, die vorzüglichsten hieher gehörigen Schriften angeführt. Unter den zur Erläuterung gegebenen Beispielen, sind einige, welche schon von mir der Übersetzung von du Buats Hydraulik beigefügt waren, und da solche ebenfalls in Herrn Kosmanns Hydraulik vorkommen, so wird dieses zu keiner Mißdeutung Anlaß geben.

Statik und Hydrostatik sind durchgängig als bekannt vorausgesetzt worden, und wenn in der Hydraulik von der Kraft zur Bewegung einer Maschine die Rede ist, so bezieht sich solche vorzüglich nur auf diejenigen Hindernisse, welche das Wasser der Bewegung entgegensetzt, weil die übrigen Untersuchungen in die Maschinenlehre gehören, welche auf die Hydraulik folgen soll.

Was die abgehandelten Materien selbst betrift, so erforderten einige Lehren der Mechanik fester Körper, in Hinsicht auf Hydraulik und Maschinenlehre, eine weitere Ausführung, wozu gewöhnlich die höhere Analysis nöthig ist. Indessen war man bemüht diese Lehren, auch selbst bei den Momenten der Trägheit, größtentheils mit Hülfe der Elementaranalysis auszuführen. Der Vortrag über die Bewegung des Wassers, ist auf die Versuche der vorzüglichsten Hydrauliker, so weit solche hinreichend waren, gegründet, auch sind an mehrern

r meine eigenen mit aller möglichen Sorgfalt
tellten Versuche beigefügt worden. Dem Kenner
n hoffentlich mehrere neue Ansichten nicht ent-
, wohin besonders die Untersuchung über die
sermenge bei der archimedischen Wasserschnecke
net werden kann, deren Windungen man zeit-
ls sehr enge Röhren betrachtete. Die Spiral-
e, die man noch in den Lehrbüchern vermißt,
mir einer besondern, auch dem Anfänger
ichst verständlichen Bearbeitung werth zu seyn.
n ganzer Endzweck ist erreicht, wenn ich einen
n Beitrag liefere, dem Baumeister die Noth-
igkeit und den Nutzen der mathematischen Wis-
aften recht einleuchtend zu machen.

Noch ist zu bemerken, daß sich alle Maaße,
nichts dabei erinnert ist, auf das bei uns
führte rheinländische oder brandenburgische Fuß-
ß beziehen.

Berlin im Januar 1800.

J. A. E.

3te Auflage erschien 1842 bei Friedrich Fleischer in Leipzig [illegible] A. [illegible] Mit 60 Holzschnitten
6 Kupfertafeln. [illegible]

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Die Mechanik fester Körper.

§. Seite

X. Kap. Von den springenden Strahlen.

XI. Kap. Vom Stoße oder hydraulischen Druck des Wassers.

XXI. Kap. Von der archimedischen Wasserschnecke und der Wasserschraube.

Er

Erste Abtheilung.

Die Mechanik fester Körper.

Einleitung.

1. §.

Wenn ein Körper sich bewegt, oder sich zu bewegen strebt, so muß eine Ursache vorhanden seyn, welche die Bewegung oder das Bestreben zur Bewegung hervor bringt. Diese Ursache nennt man **Kraft** (Vis, *Force*), ob gleich ganz allgemein jedes Vermögen zu wirken, mit dem Namen Kraft belegt wird. Hier ist aber nur von den zuerst erwähnten Kräften die Rede.

Die Kräfte selbst kennt man nur aus ihren Wirkungen, welche darin bestehen daß sie einen Körper schnell oder langsam bewegen, oder gegen einen andern Körper, welcher die Bewegung zu hindern strebt, stärker oder schwächer pressen; und nur durch dergleichen Wirkungen ist man im Stande von der Größe einer Kraft zu urtheilen. Aus diesem Grunde erlaubt man sich auch den Ausdruck Kraft zu brauchen, wenn man eigentlich nur von Wirkung spricht.

Diejenige Wissenschaft welche von den Bewegungen der Körper und den Wirkungen der Kräfte handelt, heißt die **Mechanik** (Mechanica); wird sie auf feste Körper eingeschränkt, so entsteht die **Geomechanik** oder **Mechanik fester Körper**. (Mechanica corporum firmorum, *Méchanique des corps solides*).

Anmerk. Wenn lediglich von Bewegung, ohne Rücksicht auf Kraft die Rede ist, so entstehet die Phoronomie (Phoronomia). Die Lehre von den bewegenden Kräften, heißt die Dynamik (Dynamica).

Einleitung.

1. §.

Wenn ein Körper sich bewegt, oder sich zu bewegen strebt, so muß eine Ursache vorhanden seyn, welche die Bewegung oder das Bestreben zur Bewegung hervor bringt. Diese Ursache nennt man Kraft (Vis, *Force*), ob gleich ganz allgemein jedes Vermögen zu wirken, mit dem Namen Kraft belegt wird. Hier ist aber nur von den zuerst erwähnten Kräften die Rede.

Die Kräfte selbst kennt man nur aus ihren Wirkungen, welche darin bestehen daß sie einen Körper schnell oder langsam bewegen, oder gegen einen andern Körper, welcher die Bewegung zu hindern strebt, stärker oder schwächer pressen; und nur durch dergleichen Wirkungen ist man im Stande von der Größe einer Kraft zu urtheilen. Aus diesem Grunde erlaubt man sich auch den Ausdruck Kraft zu brauchen, wenn man eigentlich nur von Wirkung spricht.

Diejenige Wissenschaft welche von den Bewegungen der Körper und den Wirkungen der Kräfte handelt, heißt die Mechanik (Mechanica); wird sie auf feste Körper eingeschränkt, so entsteht die Geomechanik oder Mechanik fester Körper. (Mechanica corporum firmorum, *Méchanique des corps solides*).

Anmerk. Wenn lediglich von Bewegung, ohne Rücksicht auf Kraft die Rede ist, so entstehet die Phoronomie (Phoronomia). Die Lehre von den bewegenden Kräften, heißt die Dynamik (Dynamica).

2. §.

Befindet sich ein Körper in Ruhe, so kann man nicht einsehen daß er ohne eine Ursache seinen Ort verändern oder sich bewegen sollte; oder mit andern Worten, es muß eine Kraft auf ihn wirken, welche ihn in Bewegung setzt. Und wenn ein Körper einmal in Bewegung ist, und auf seinem Wege nirgends Hindernisse antrift, die auf seine Bewegung einen Einfluß haben; so läßt sich nicht denken, daß ohne Ursache eine Veränderung in seiner Bewegung entstehen sollte, und er muß daher mit derselben Richtung und Geschwindigkeit ohne Ende fortgehen.

Dieses Gesetz nach welchem Körper ihren Zustand behalten, heißt das Gesetz der Trägheit (lex inertiae), oder weil sich Trägheit mehr auf Ruhe als auf Bewegung beziehet, ihr Beharrungsvermögen (Beharrungszustand). Die Trägheit ist daher keine Kraft, weil sie für sich allein keine Bewegung hervorbringen kann.

Hat eine Kraft einen Körper in Bewegung gesetzt, so bedarf es, in so fern keine Hindernisse vorhanden sind welche die Bewegung aufhalten, keiner fernern Einwirkung der Kraft zur Unterhaltung der Bewegung, sondern der Körper wird wegen seiner Trägheit oder seines Beharrungsvermögens, die Bewegung fortsetzen.

Anmerk. Daß dieses nicht bei einem horizontal geworfenen Körper auf unserer Erde Statt findet, wird sich in der Folge erklären lassen, weil außer der Kraft, welche den Körper horizontal fortschleudert, noch andere Kräfte auf ihn wirken und die mitgetheilte Bewegung ändern.

3. §.

Dasjenige wodurch die Bewegung eines Körpers ganz oder zum Theil aufgehoben wird, nennt man Widerstand (Resistentia). Man kann

daher den Widerstand als eine entgegengesetzte Kraft oder als Gegenwirkung (Reactio) ansehen, welche der Wirkung gleich und entgegengesetzt ist.

Wenn eine Kraft einen ruhenden Körper zu bewegen strebt und ein Widerstand die Bewegung verhindert, so heißt dasjenige was der widerstehende Körper leidet, Druck (Pressio, *Pressement*), welcher sich allemal mit einem Gewichte (Pondus, *Poids*) vergleichen läßt. Ist hingegen ein Körper schon durch eine Kraft bewegt, und er trift plötzlich ein Hinderniß, so heißt diese Wirkung Stoß (Percussio, *Choc*).

Anmerk. Maschinen die sich nach einerlei Richtung umdrehen, bleiben vermöge der Trägheit der Materie in Bewegung, und würden sie ohne Aufhören fortsetzen, wenn kein Widerstand vorhanden wäre.

Erstes Kapitel.

Von der gleichförmigen Bewegung.

4. §.

Bewegt sich ein Körper in einer graden Linie, so ist diese die Richtung (Directio) seiner Bewegung; ist der Weg aber eine krumme Linie, so ist die Berührungslinie in demjenigen Punkt des Weges wo sich der Körper befindet, seine Richtung.

Durchläuft ein Körper in gleichen Zeiten gleiche Räume, so sagt man seine Bewegung ist gleichförmig (Motus uniformis f. aequabilis, *Mouvement uniforme*); welches der Fall bei jedem in Bewegung befindlichen Körper ist, wenn auf denselben keine Kräfte wirken.

Um von der Bewegung eines Körpers zu urtheilen, muß man den Raum kennen, welchen er in einer bestimmten Zeit durchläuft. Je größer dieser Raum für einerlei Zeit ist, desto größer ist seine Geschwindigkeit, und man pflegt gewöhnlich den in einer Sekunde durchlaufenen Raum als Maaß der Geschwindigkeit anzunehmen. Daher nennt man auch den Raum durch welchen sich ein Körper in einer Sekunde bewegt, seine Geschwindigkeit (Celeritas, Velocitas, *Vitesse*).

Bewegen sich zwei Körper gleichförmig in einerlei graden Linie, so kann man die Bewegung dieser Körper in Bezug auf einander untersuchen und fragen, wie viel sie sich in jeder Sekunde genähert oder von einander entfernt haben. Dieser Raum wird alsdann die relative Geschwindigkeit

genannt, und ist mit der absoluten Geschwindigkeit oder dem Raume nicht zu verwechseln, welchen der Körper wirklich in jeder Sekunde durchlaufen hat.

Anmerk. Haben zwei Körper gleiche Geschwindigkeit, indem sie sich nach einerlei Richtung bewegen, so ist ihre relative Geschwindigkeit = o, ob gleich ihre absolute, sehr groß seyn kann.

5. §.

Man setze daß jetzt und in der Folge jede Zeit durch Sekunden ausgedrückt werde, und daß
R den Raum bezeichnet, welchen ein Körper in der Zeit
T mit der Geschwindigkeit
C durchläuft, so verhält sich

$$1 : T = C : R$$

woraus nachstehende drei Hauptsätze folgen:

$$\text{I.} \quad R = CT.$$

$$\text{II.} \quad C = \frac{R}{T}.$$

$$\text{III.} \quad T = \frac{R}{C}.$$

1. Beyspiel. Ein Körper hat sich mit einer Geschwindigkeit von 5 Fuß, während 46 Sekunden bewegt, wie groß ist der in dieser Zeit durchlaufene Raum?

$$5 \cdot 46 = 230 \text{ Fuß.}$$

2. Beispiel. Wenn in der Zeit von 3 Minuten 200 Fuß von einem Körper durchlaufen werden, wie groß ist seine Geschwindigkeit?

$$\frac{200}{180} = 1\tfrac{1}{9} \text{ Fuß.}$$

3. Beispiel. Wie viel Zeit gebraucht ein Körper, um mit $2\frac{1}{2}$ Fuß Geschwindigkeit einen Raum von 360 Fuß zu durchlaufen?

$$\frac{360}{2\frac{1}{2}} = 144 \text{ Sekunden} = 2\tfrac{2}{5} \text{ Minuten.}$$

6. §.

Wenn ein Körper in A nach der Richtung AB eine Bewegung erhält, deren Geschwindigkeit durch die Linie AB, und auch zu gleicher Zeit nach einer andern Richtung AC unter dem Winkel BAC eine andere Bewegung, deren Geschwindigkeit durch die Linie AC ausgedrückt ist, so müßte er nach Verlauf einer Sekunde einen Weg AB nach der Richtung AB und zugleich einen Weg AC nach dieser Richtung durchlaufen haben.

Man zeichne das Parallelogramm ABCD, so ist D der Ort wo sich der Körper am Ende der Sekunde befindet. Denn wenn er nur die Geschwindigkeit AB hätte, so müßte er sich in B befinden, wenn er nicht durch die Bewegung nach AC, von seiner Richtung nach AB, abgelenkt würde. Aber in einer Sekunde wird er um den Weg AC = BD von AB abgelenkt, daher kann nur D der gesuchte Ort seyn. Weil nun diese Schlüsse von jeder kleineren und größeren Zeit gelten, so ist AD die Richtung und mittlere Geschwindigkeit, welche aus den beiden Seiten-Geschwindigkeiten AB und AC zusammengesetzt ist.

Umgekehrt kann man sich jede Geschwindigkeit wieder in Seiten-Geschwindigkeiten zerlegt vorstellen.

Anmerk. Was in der Statik das Parallelogramm der Kräfte ist, ist hier das Parallelogramm der Geschwindigkeiten, und die hierher gehörigen Rechnungen werden auf eine ähnliche Art ausgeführt.

7. §.

Bewegt sich ein Körper nach der Richtung AB mit der Geschwindigkeit C, und trift in B ein Hinderniß CD unter einem Winkel ABC $= \alpha$, so wird er durch diese plötzliche Ablenkung von seiner ursprünglichen Richtung, einen Theil iner Geschwindigkeit verlieren. Man nehme BE = C und zeichne das Rechteck BEDF, so wird e auf CD senkrechte Geschwindigkeit BF, vom inderniß BC aufgehoben, und der Körper behält nur noch, nach der Richtung BD, die Gehwindigkeit

$$BD = C \operatorname{Cos} \alpha$$

Weil $\operatorname{Cos} \alpha = 1 - \operatorname{Sin.vers.} \alpha$, so ist

$$BD = C - C \operatorname{Sin.vers.} \alpha$$

lglich hat der Körper durch die Ablenkung von iner Bahn die Geschwindigkeit C $\operatorname{Sin.vers.} \alpha$ erlohren.

8. §.

Trift der Körper in seiner Bahn auf ein Hinderniß, welches ihn nöthigt die krumme Linie BG, die seine vorherige Richtung AB in B tangentirt, zu durchlaufen, so wird in diesem Falle keine Verminderung der Geschwindigkeit Statt finen, weil $\alpha = 0$, also $\operatorname{Sin.vers.} \alpha = 0$ ist.

Zweites Kapitel.

Von der beschleunigten Bewegung und dem freien Falle der Körper.

9. §.

Wenn ein Körper sich so bewegt, daß er in allen auch noch so kleinen gleich großen Zeittheilchen, gleich viel Zusatz an Geschwindigkeit erhält, so heißt diese eine gleichförmig beschleunigte Bewegung (Motus uniformiter acceleratus, *Mouvement uniformément accéléré*). Wäre die Zunahme an Geschwindigkeit in gleichen Zeiten nicht gleich groß, eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung (Motus inaeqabiliter acceleratus, *Mouv. inégal. accéléré*).

Ist hingegen die Bewegung eines Körpers so beschaffen, daß er in gleichen Zeiten, gleich viel an seiner Geschwindigkeit verliert, so ist dieses eine gleichförmig verminderte Bewegung (Motus unif. retardatus, *Mouv. unif. rétardé*).

Weil bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ein Körper in gleichen Zeiten gleiche Zusätze an Geschwindigkeit erhält, so müssen sich auch die vom Anfang der Bewegung verflossene Zeiten, wie die erlangten Geschwindigkeiten verhalten.

10. §.

Eine Kraft welche fortwährend und überall gleich stark auf einen Körper wirkt, er mag ruhen, sich schnell oder langsam bewegen, heißt eine beständige oder absolute Kraft (Vis constans, *Force constante*). Wenn hingegen eine Kraft anders in

einen ruhenden und anders in einen verschiedentlich bewegten Körper wirkt, so heißt sie eine relative oder veränderliche Kraft (Vis variabilis, *Force variable*).

Eine jede beständige Kraft welche auf einen bewegten Körper wirkt, verursacht eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, weil sie ihn, er mag sich langsam oder schnell bewegen, immer mit gleicher Stärke fortzutreiben strebt, und ihm dadurch in gleichen Zeiten, gleichen Zusatz an Geschwindigkeit mittheilt.

11. §.

Wenn ein Körper aus der Ruhe durch eine beständige Kraft getrieben, in der Zeit T den Weg S durchläuft, und am Ende der Zeit die Geschwindigkeit C erlangt hat, mit welcher er, wenn die Kraft nicht mehr auf ihn wirkte, vermöge seiner Trägheit in jeder folgenden Sekunde, den Weg C durchlaufen würde, so muß er nach Verlauf der Zeit $\frac{1}{2}$ T, eine Geschwindigkeit $\frac{1}{2}$ C besitzen. (9. §.)

Wird durch die Linie AB die Zeit T und durch BD die Geschwindigkeit C bezeichnet, so kann man sich die Zeit AB in lauter gleiche Theile Aa, aa, aa rc. getheilt vorstellen, welche so klein als möglich angenommen werden müssen. Zieht man alsdenn AD, und durch alle Punkte A, a, a, rc. Linien mit BD parallel, so bezeichnen die Linien ad, ad, ad rc. die Geschwindigkeiten nach Verlauf der Zeiten Aa, Aa, Aa rc. Für AE $=\frac{1}{2}$ AB $=\frac{1}{2}$ T ist die Geschwindigkeit EF $=\frac{1}{2}$ C.

In der ersten Hälfte der Zeit ist die Summe sämmtlicher Geschwindigkeiten, der dritte Theil von der Summe in der zweiten Hälfte der Zeit T, weil in der dreimal größern Fläche EBDF, die

Zweites Kapitel.

Von der beschleunigten Be
dem freien Falle der

9. §.

Wenn ein Körper sich so beweg
len auch noch so kleinen gleich gr
gleich viel Zusatz an Geschwindig
dieses eine gleichförmig besch
gung (Motus uniformiter acc
ment uniformément accélér
nahme an Geschwindigkeit in g
gleich groß, eine ungleich
nigte Bewegung (Motus i
leratus, *Mouv. inégal. ac*

Ist hingegen die Bewegun
beschaffen, daß er in gleich
an seiner Geschwindigkeit ver
gleichförmig vermindert
tus unif. retardatus, *Mou*

Weil bei der gleichförm
wegung ein Körper in gleich
sätze an Geschwindigkeit erh
die vom Anfang der
sene Zeiten, wie die er
digkeiten verhalten.

10. §

Eine Kraft welche so
gleich stark auf einen Körp
sich schnell oder langsam be
dige oder absolute Kra
constante). Wenn hing

wir die Schwere (Gravitas, *Gravité*) nennen. Da nun kein Grund vorhanden ist, weshalb die Schwere nicht auf jedes einzelne Theilchen der Materie zu allen Zeiten gleich stark wirken sollte, so ist für die Körper nahe an der Oberfläche der Erde, die Schwere eine beständige Kraft.

Wenn man zwei einzelne gleiche Theile eines Körpers nimmt, so werden solche gegen eine Unterlage doppelt so stark drücken als eins derselben, bei der Bewegung aber wird die Schwere eins wie das andere beschleunigen, daher fällt ein Körper von größerer Masse, wenn nichts seine Bewegung hindert, eben so schnell, als ein Körper von weit geringerer Masse.

Anmerk. Daß in der freien Luft ein Goldstück schneller als eine Feder fällt, daran ist die Luft schuld, welche die Bewegung der Feder mehr verzögert. Dagegen sind im luftleeren Raume, die Zeiten des Falles gleich.

Vormals glaubte man, daß sich die Geschwindigkeiten fallender Körper wie die Gewichte derselben verhielten, bis Galilei diese Unrichtigkeit widerlegte.

14. §.

In so fern man die Schwere als eine beständige Kraft ansehen kann, so gelten auch von ihr die vorhin erwiesenen Sätze. Nun hat man aus der Erfahrung mit dem Pendel (66. §.) den Raum welchen ein Körper nahe an der Erd-Oberfläche in der ersten Sekunde frei fällt, $15\frac{5}{8}$ rheinländ. Fuß gefunden, woraus sich die folgenden Sätze für den freien Fall der Körper (Descensus corporum gravium, *Chûte des corps graves*) ableiten lassen,
g wenn man unter g die Zahl $15\frac{5}{8}$ verstehet.

Anmerk. Näher an dem Aequator wird g kleiner, und weiter nach den Polen hin größer. Man sehe Gehler Physikalisches Wörterbuch, 3ter Theil Art. Pendel.

15. §.

Man setze die Höhe von welcher ein Körper frei herunter fällt $= h$, die Zeit des Falles $= t$ und die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit $= c$, so ist (11. §.)

$$\text{I.}\quad h = \tfrac{1}{2}\, c\, t$$

Nach 12. §. I. verhält sich

$$1 : t^2 = g : h \quad \text{daher}$$

$$\text{II.}\quad h = g t^2 = 15\tfrac{5}{8}\, t^2.$$

Aus I. folgt $t = \frac{2h}{c}$ also $t^2 = \frac{4h^2}{c^2}$, setzt man diesen Ausdruck statt t^2 in II. so findet man

$$\text{III.}\quad h = \frac{c^2}{4g} = 0{,}016\; c^2.$$

1. Beispiel. Wenn ein Körper während 4 Sekunden gefallen ist, so beträgt der durchlaufene Raum

$$h = 15\tfrac{5}{8} \cdot 4^2 = 250 \text{ Fuß}.$$

2. Beispiel. Am Ende seines Falles hat ein Körper eine Geschwindigkeit von 10 Fuß erlangt, wie groß war seine Fallhöhe?

$$h = 0{,}016 \,.\, 10^2 = 1{,}6 \text{ Fuß}.$$

16. §.

Nach Verlauf einer Sekunde ist die erlangte Geschwindigkeit eines Körpers $= 2g$, (11. §.) es verhält sich daher (9. §.)

$$1 : t = 2g : c$$

und man findet die Geschwindigkeit

$$\text{I.}\quad c = 2gt = 31\tfrac{1}{4}\, t.$$

Aus 15. §. I. findet man ferner

$$\text{II.}\quad c = \frac{2h}{t}.$$

und nach 15. §. III.

$$\text{III.}\quad c = 2\sqrt{gh} = 2\sqrt{(15\tfrac{5}{8} \,.\, h)} \text{ oder}$$

$$= 7{,}9\sqrt{h} \text{ beinahe}.$$

1. Beispiel. Wie viel Geschwindigkeit hat ein Kö[rper]
erlangt, welcher während 3 Sekunden gefallen

$$c = 31\tfrac{1}{4} \cdot 3 = 93\tfrac{3}{4} \text{ Fuß.}$$

2. Beispiel. Wenn ein Körper durch einen Raum [von]
12 Fuß frei herunter gefallen ist, so findet [man]
seine erlangte Geschwindigkeit

$$c = 7{,}9 \sqrt{12} = 27{,}36 \text{ Fuß.}$$

17. §.

Zur Bestimmung der Zeit t findet man [aus]
16. §. II.

$$\text{I. } t = \frac{2h}{c}$$

aus 16. §. I.

$$\text{II. } t = \frac{c}{2g} = 0{,}032\, c$$

und aus 15. §. II.

$$\text{III. } t = \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{\frac{h}{15\frac{5}{8}}} \text{ oder}$$

$$= 0{,}253 \sqrt{h} \text{ beinahe.}$$

18. §.

Wenn man bei einem frei fallenden Kör[per]
für jede Sekunde, die erlangte Geschwindig[keit]
den durchlaufenen Weg, und die Zunahme [des]
Weges für jede Sekunde übersehen will, so k[ann]
solches mittelst nachstehender Tafel geschehen,
nach Gefallen fortgesetzt werden kann.

Zeit in Sekund.	erlangte Geschwd.	durchlauf. Weg.	Zunahme desselben.
1	1. 2 g	1 g	1 g
2	2. 2 g	4 g	3 g
3	3. 2 g	9 g	5 g
4	4. 2 g	16 g	7 g
5	5. 2 g	25 g	9 g
6	6. 2 g	36 g	11 g
7	7. 2 g	49 g	13 g
8	8. 2 g	64 g	15 g
9	9. 2 g	81 g	17 g
10	10. 2 g	100 g	19 g

M

Man sieht hieraus daß die Zunahmen des Weges in gleichen Zeiten nach den ungra-
en Zahlen 1, 3, 5, 7, ꝛc. fortgehen. Daß die
m Ende der zweiten Sekunde erlangte Geschwin-
igkeit eben so groß als die Fallhöhe ist. Daß die
allhöhe in 4 Sekunden doppelt, in 6 Sekunden
reimal so groß, als die erlangte Geschwindigkeit
st, u. s. w.

Wenn ein frei fal[illegible]er Körper, im Anfang
er Zeit u schon eine Geschwindigkeit c erlangt
at, so wird ihm die Schwere während dieser Zeit
och die Geschwindigkeit $2gu$ mittheilen, und am
nde der Zeit u besitzt derselbe die Geschwindigkeit

$$\text{I.} \quad v = c + 2gu.$$

Vermöge seiner anfänglichen Geschwindigkeit
urchläuft der Körper den Weg cu, und wegen
inwirkung der Schwere in der Zeit u den Weg
gu^2 (15. §. II.). Daher ist der ganze durchlaufene
aum h' in der Zeit u

$$\text{II.} \quad h' = cu + gu^2.$$

Hätte der Körper die Geschwindigkeit c durch
en freien Fall von der Höhe h erhalten, so wäre
$h = \frac{c^2}{4g}$ (15. §.) und weil nun die Geschwindigkeit
v der ganzen Fallhöhe $h + h'$ entspricht, so ist

$$\text{III.} \quad v = 2\sqrt{g}\sqrt{(h + h')}$$
$$= 2\sqrt{g}\sqrt{(\tfrac{c^2}{4g} + h')}$$
$$= \sqrt{(c^2 + 4gh')}.$$

Drittes Kapitel.

Von der Bahn geworfener Körper.

20. §.

Vorausgesetzt daß außer der Kraft welche dem geworfenen Körper die erste Geschwindigkeit mittheilt und außer der Schwere, ferner keine andere Kraft noch sonst ein Hinderniß auf den Körper wirkt, so läßt sich einsehen, daß ein mit der Geschwindigkeit c vertikal aufwärts geworfener Körper, keine größere Höhe h erreichen kann, als diejenige ist, von welcher er bei dem freien Fall herunter fallen müßte, um die Geschwindigkeit c zu erlangen. Denn während des Steigens raubt ihm die Schwere als eine unveränderlich wirkende Kraft, in jedem Zeittheilchen eben so viel Geschwindigkeit, wie er durch den freien Fall erhalten hat. Die Schwere wirkt daher hier als eine gleichförmig verzögernde Kraft, und die Geschwindigkeit des Körpers nimmt eben so ab, wie sie beim Fallen zunahm, weshalb derselbe in eben der Zeit diejenige Höhe erreichen muß, die er beim Fallen durchlaufen würde. Es ist daher auch hier

$$h = \frac{c^2}{4g}$$

und alle die 15. §. bis 19 abgeleiteten Sätze, gelten auf eine ähnliche Art für das vertikale Steigen, wie bei dem freien Falle der Körper.

Hieraus folgt:

I. Daß ein Körper um eine gewisse lothrechte Höhe zu erreichen mit eben der Geschwindigkeit steigen muß, welche

er durch den freien Fall von dieser Höhe erlangt hätte.

I. Daß eben so viel Zeit zum Steigen auf eine gewisse Höhe erfordert wird, als zum freien Falle von dieser Höhe nöthig ist.

21. §.

Ein Körper der mit der Geschwindigkeit c zu steigen anfängt, erreicht die Höhe $h = \frac{c^2}{4g}$.

Ist er in der Zeit u nur bis auf die Höhe h′ gelangt, so hat er in dieser Zeit die Geschwindigkeit 2gu verlohren (16. §. I.), und seine Geschwindigkeit v ist nach Verlauf der Zeit u

$$\text{I.} \quad v = c - 2gu.$$

Mit dieser Geschwindigkeit würde er noch bis zur Höhe $\frac{v^2}{4g}$ steigen können (20. §.). Zieht man diese Höhe von der ganzen Höhe h ab, so erhält man

$$h' = \frac{c^2}{4g} - \frac{v^2}{4g}$$

oder wenn $c - 2gu$ statt v gesetzt und die Größen welche sich aufheben weggelassen werden, so findet man die Höhe welche ein Körper in der Zeit u mit der anfänglichen Geschwindigkeit c vertikal steigt

$$\text{II.} \quad h' = cu - gu^2.$$

Beispiel: Ein Körper steigt mit einer Geschwindigkeit von 60 Fuß vertikal, wie hoch wird er in Zeit von 2 Sekunden gelangen?

$$h' = 60 \cdot 2 - 15\tfrac{5}{8} \cdot 4 = 57\tfrac{1}{2} \text{ Fuß.}$$

In Zeit von 3 Sekunden würde er nur noch

$$60 \cdot 3 - 15\tfrac{5}{8} \cdot 9 = 39\tfrac{3}{8} \text{ Fuß}$$

hoch seyn, weil er schon seine größte Höhe

$$h = \frac{c^2}{4g} = 0{,}016 \cdot 60^2 = 57{,}6 \text{ Fuß}$$

in der Zeit

$$t = \frac{c}{2g} = 0{,}032 \cdot 60 = 1{,}92 \text{ Sekunden}$$

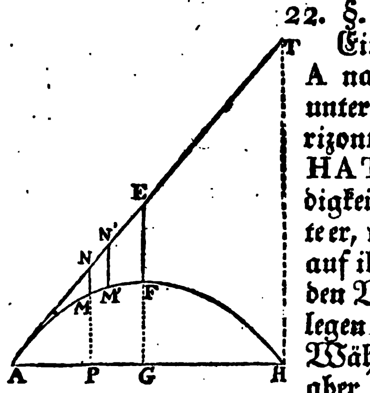
erreicht, und überhaupt auf das Steigen und ſ len nicht mehr als 3,84 Sekunden zubringen k

Wenn daher die Frage entsteht, wie hoch di Körper nach 4 Sekunden gestiegen ist, so findet 1

$$h' = 60 \cdot 4 - 15\tfrac{5}{8} \cdot 16 = -10 \text{ Fuß}$$

welches eine negative Größe ist und anzeigt, sich der Körper wenn er durch kein Hinderniß gehalten wird, nach dieser Zeit 10 Fuß niedr befindet, als im Anfange der Bewegung.

22. §.



Einem Körper werde A nach der Richtung A unter einem gegen den H rizont AH spitzen Wi HAT $= \alpha$, die Geschw digkeit c mitgetheilt, so m te er, wenn die Schwere n auf ihn wirkte, in der Ze den Weg $ct' = AN$ zurü legen und sich in N befind Während der Zeit t' l aber die Schwere auf i gewirkt und ihn um den Weg $NM = gt't'$ v tikal herunter getrieben (15. §) und er muß ſ daher nach Verlauf der Zeit t' im Punkt M finden, da alsdenn $AN = ct'$ und $NM = g$ ist.

Hieraus erhält man

$$t' = \frac{AN}{c} \text{ daher}$$

$$NM = \frac{g}{c^2} AN^2$$

Auf gleiche Art wird gefunden

$$N'M' = \frac{g}{c^2} \cdot (AN')^2.$$

Nun gehört die vorstehende Gleichung zu einer Parabel, welche in A von der Linie AT tangentirt wird und deren Axe mit den Linien NM, NM′ parallel läuft, es muß daher die Linie AMM′ in welcher sich der geworfene Körper bewegt, eine Parabel seyn *), die den Horizont AH wieder in irgend einem Punkt H schneidet.

Die Weite AH, wo der Körper in seiner Bahn die Horizontallinie durch A wieder schneidet, heißt die Wurfweite (Amplitudo jactus, *Portée*); theilt man diese in zwei gleiche Theile in G und errichtet die Linie GE senkrecht, so liegt in der Mitte F derselben (nach bekannten Lehren von den Eigenschaften der Parabel) der Scheitel der Parabel, und es ist FG die größte Höhe (Ascensus maximus) welche der Körper erreichen kann.

23. §.

Man setze die Wurfweite AH = w, die größte dazu gehörige Höhe = h, und die ganze Zeit in welcher der Körper von A bis H gelangt = t. Nun ist

$$TH = A.T. \operatorname{Sin} \alpha$$

oder weil $TH = 2 . EG = 4h$ (11. §.) und

$AT = ct$ ist, so wird

$$4h = ct \operatorname{Sin} \alpha \text{ oder}$$

$$h = \frac{ct \operatorname{Sin} \alpha}{4}$$

Ferner ist $TH = gt^2 = 4h$ also

$$h = \frac{gt^2}{4}$$

und man erhält

$$\frac{gt^2}{4} = \frac{ct \operatorname{Sin} \alpha}{4}$$

*) Diese Eigenschaft ist zuerst von Galilei erwiesen worden.

in der Zeit

$$t = \frac{c}{2g} = 0{,}032 \cdot 60 = 1{,}92 \text{ Sekunden}$$

erreicht, und überhaupt auf das Steigen und F
len nicht mehr als 3, 84 Sekunden zubringen ka

Wenn daher die Frage entsteht, wie hoch di
Körper nach 4 Sekunden gestiegen ist, so findet m

$$h' = 60 \cdot 4 - 15\tfrac{5}{8} \cdot 16 = - 10 \text{ Fuß}$$

welches eine negative Größe ist und anzeigt,
sich der Körper wenn er durch kein Hinderniß a
gehalten wird, nach dieser Zeit 10 Fuß niedri
befindet, als im Anfange der Bewegung.

22. §.

Einem Körper werde
A nach der Richtung A
unter einem gegen den H
rizont AH spitzen Win
HAT $= \alpha$, die Geschw
digkeit c mitgetheilt, so mü
te er, wenn die Schwere ni
auf ihn wirkte, in der Zei
den Weg $ct' =$ AN zurü
legen und sich in N befind
Während der Zeit t' h
aber die Schwere auf i
gewirkt und ihn um den Weg NM $= gt't'$ v
tikal herunter getrieben (15. §) und er muß s
daher nach Verlauf der Zeit t' im Punkt M b
finden, da alsdenn AN $= ct'$ und NM $=$ g
ist.

Hieraus erhält man

$$t' = \frac{AN}{c} \text{ daher}$$

$$NM = \frac{g}{c^2} AN^2$$

Auf gleiche Art wird gefunden

$$N'M' = \frac{g}{c^2} \cdot (AN')^2$$

Nun gehört die vorstehende Gleichung zu einer Parabel, welche in A von der Linie AT tangentirt wird und deren Axe mit den Linien NM, NM′ parallel läuft, es muß daher die Linie AMM′ in welcher sich der geworfene Körper bewegt, eine Parabel seyn *), die den Horizont AH wieder in irgend einem Punkt H schneidet.

Die Weite AH, wo der Körper in seiner Bahn die Horizontallinie durch A wieder schneidet, heißt die Wurfweite (Amplitudo jactus, *Portée*); theilt man diese in zwei gleiche Theile in G und errichtet die Linie GE senkrecht, so liegt in der Mitte F derselben (nach bekannten Lehren von den Eigenschaften der Parabel) der Scheitel der Parabel, und es ist FG die größte Höhe (Ascensus maximus) welche der Körper erreichen kann.

23. §.

Man setze die Wurfweite AH = w, die größte dazu gehörige Höhe = h, und die ganze Zeit in welcher der Körper von A bis H gelangt = t. Nun ist

$$TH = A.T.\ \mathrm{Sin}\ \alpha$$

oder weil $TH = 2 . EG = 4h$ (11. §.) und

$$AT = ct \text{ ist, so wird}$$

$$4h = ct\ \mathrm{Sin}\ \alpha \text{ oder}$$

$$h = \frac{ct\ \mathrm{Sin}\ \alpha}{4}$$

Ferner ist $TH = gt^2 = 4h$ also

$$h = \frac{gt^2}{4}$$

und man erhält

$$\frac{gt^2}{4} = \frac{ct\ \mathrm{Sin}\ \alpha}{4}$$

*) Diese Eigenschaft ist zuerst von Galilei erwiesen worden.

und hieraus die Zeit in welcher der Körp wieder den Horizont in H erreicht.

$$t = \frac{c \text{ Sin } \alpha}{g}$$

24. §.

Nun ist ferner

$$AH = AT. \text{ Cos } \alpha \text{ oder}$$

$$w = ct \text{ Cos } \alpha$$

und wenn für t sein gefundener Werth gesetzt wi so findet man die Wurfweite

$$w = \frac{c^2 \text{ Sin } \alpha \text{ Cos } \alpha}{g}$$

25. §.

Weil $h = \frac{gt^2}{4}$ so erhält man, wenn ebenfal anstatt t dessen Werth (23. §.) gesetzt wird, d größte Höhe welche der Körper erreicht

$$h = \frac{c^2 \text{ Sin } \alpha^2}{4g} \text{ *)}.$$

---

*) Wollte man eine allgemeine Vergleichung für je Weite AP = x und der dazu gehörigen Höhe PM = haben, so setze man die Zeit in welcher der Körper b zum Punkt M kommt = t′, so ist

$$NP = AN \text{ Sin } \alpha = ct' \text{ Sin } \alpha \text{ daher weil}$$

$$PM = NP - NM \text{ so ist}$$

$$y = ct' \text{ Sin } \alpha - g(t')^2$$

Aber $x = AN. \text{ Cos } \alpha = ct' \text{ Cos } \alpha$ also

$$t' = \frac{x}{c \text{ Cos } \alpha}$$

Setzt man diesen Werth in die vorstehende Gleichu statt t′, so findet man nach gehöriger Abkürzung, allg mein die Höhe

$$y = x \text{ Tgt } \alpha - \frac{gx^2}{c^2 \text{ Cos}^2 \alpha}$$

26. §.

In der Trigonometrie wird bewiesen, daß

$$\text{Sin } \alpha \text{ Cos } a = \tfrac{1}{2} \text{ Sin } 2\alpha \text{ ist,}$$

man erhält daher für die Wurfweite

$$w = \frac{c^2}{2g} \text{ Sin } 2\alpha$$

und es verhalten sich bei unveränderten Geschwindigkeiten und verschiedenen Richtungswinkeln, die Wurfweiten, wie die Sinusse der doppelten Richtungswinkel.

27. §.

Ferner ist $\text{Sin } 2\alpha = \text{Sin } (180° - 2\alpha) = \text{Sin } 2 (90° - \alpha)$ daher

$$w = \frac{c^2}{2g} \text{ Sin } 2\alpha = \frac{c^2}{2g} \text{ Sin } 2 (90° - \alpha)$$

folglich sind bei gleichen Geschwindigkeiten, die Wurfweiten einander gleich, wenn sich die Richtungswinkel zu 90 Grad ergänzen, oder wenn der eine Winkel so viel unter 45 Grad, als der andere drüber ist.

Ein Körper unter einem Winkel von 32 Grad geworfen, wird eben so weit gehen als mit derselben Geschwindigkeit unter 58 Grad.

28. §.

Bei unveränderter Geschwindigkeit, wird die Wurfweite $w = \frac{c^2}{g} \text{ Sin } 2\alpha$ am größten, wenn $\text{Sin } 2\alpha$ den größtmöglichen Werth erhält. Da nun der größte Sinus dem Winkel von 90 Grad zugehört, so muß für diesen Fall $2\alpha = 90$ also $\alpha = 45$ Grad genommen werden. Die größte Wurfweite wird daher unter einem Richtungswinkel von 45 Grad erhalten.

Alsdann ist

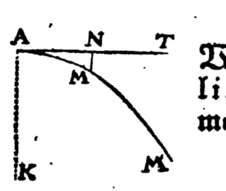
$$w = \frac{c^2}{2g} \text{ Sin } 90° = \frac{c^2}{2g}$$

und die größte Höhe welche der Körper bei dieser Weite erreicht (25. §.)

$$h = \frac{c^2 (\text{Sin } 45^\circ)^2}{4g} = \frac{c^2 (\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2}{4g} = \frac{c^2}{8g}$$

daher ist die größte horizontale Wurfweite viermal so groß als die größte Höhe welche der Körper unter einem Richtungswinkel von 45 Grad erreicht, und doppelt so groß, als die vertikale Höhe beim lothrechten Aufsteigen mit eben derselben Geschwindigkeit (20. §.).

29. §.



Fällt die Richtung des Wurfs in die Horizontallinie, so ist AT horizontal, und man findet (22. §.)

$$h = \frac{g}{c^2} w^2$$

Dieses ist die gewöhnliche Gleichung für die Parabel deren Scheitel in A liegt, und wo NM die Absciſſe und AN die dazu gehörige Ordinate ist.

Mehreres über die Bewegung schwerer geworfener Körper, findet man in Jens Kraft Mechanik, aus der lateinischen mit Zusätzen vermehrten Übersetzung des Herrn P. Tetens, übersetzt von J. C. A. Steingrüber. Dresden 1787, 12te und 13te Vorlesung.

Viertes Kapitel.

Von den Wirkungen der Kräfte.

30. §.

e Wirkung welche eine Kraft in einer Masse bestimmter Größe hervorbringt, kann nach Umständen sehr verschieden seyn, weil man auf Bewegung welche von der Kraft verursacht , auf den Druck der Masse gegen einen langr bewegten oder ruhenden, weichen oder harKörper in einer bestimmten Zeit, auf die Tomme aller Pressungen u. d. gl. Rücksicht nehkann.

Die Größe der Kraft, als Ursach der Wir anzugeben ist unmöglich, nur der Erfolg die Wirkung welche eine Kraft unter diesen jenen Umständen hervorbringt, kann man benen und mit andern ähnlichen Erfolgen verhen. Es läßt sich daher auch das Maaß Wirkung nicht unbedingt als Maaß Kraft annehmen, sondern wenn von einer ft die Rede ist, so muß jedesmal genau angen werden, was als Größe der Wirkung behtet und ausgemessen werden soll. Hieraus ist inleuchtend, daß in der Mechanik von verschien Kräften die Rede seyn kann, ob es gleich t rathsam ist, dieselben ohne Noth zu vervielgen; auch sieht man hieraus, in wie fern man e eine Verwirrung zu befürchten, die Wirkung ft nennen kann.

Wenn es nun gleich nicht möglich ist, die bei r gewissen Wirkung angewandte Kraft unmitar zu messen, so kann man doch die Größe

derselben dergestalt in Vergleichung mit ander ähnlichen Kräften, nach der Wirkung schätze daß wenn eine Wirkung zweimal so groß als ein andere ist, auch die unter denselben Umstände angewandte Kraft, doppelt so groß angenomme werden kann.

31. §.

Wenn auf zwei nicht schwere, blos träge Ma sen M, M′, welche beide eine gleich große Meng materieller Theile besitzen, oder welches einerlei i die gleich groß sind, beständige Kräfte wirken, daß zur Masse M die Kraft P, und zur Ma M′ die Kraft p gehört, und der Druck der ruhe den Masse M gegen einen Widerstand welcher d Bewegung hindert, ist doppelt so groß als der vo M′ bewirkte Druck, so sagt man daß die Kraft doppelt so groß als die Kraft p sei.

Werden zwei ungleiche Massen M, m, wovo M = 2m ist, von gleichen Kräften gegen eine unbeweglichen Widerstand gepreßt, so ist zwar i beiden Fällen der Druck gegen den Widerstan gleich groß, aber weil die Kraft welche auf di Masse m wirkt, nur unter halb so viel materiell Theile vertheilt wird, so muß jedes einzelne Theil chen dieser Masse, doppelt so stark drücken, al doppelt so viel Kraft besitzen, als ein einzelnes ebe so großes Theilchen der Masse M.

Man unterscheidet daher das ganze Vermöge oder die gesammte Kraft einer Masse, von demj nigen, welches jedem ihrer einzelnen Theile zug hört, und pflegt die ganze Gewalt welche in ei Masse wirkt, und die, wenn sich die Masse nic bewegt, mit dem Druck gegen einen Widerstar im Verhältniß steht, die bewegende Kraft (V motrix, *Force motrice*), dagegen die Gewa welche jedes einzelne Theilchen der Masse besit die beschleunigende Kraft (Vis acceleratri

force accélératrice) dieser Masse zu nennen. Hiernach kann man bei schweren Körpern, das Gewicht als bewegende, die Schwere selbst aber, als beschleunigende Kraft ansehen.

Anmerk. Man pflegt auch noch die Kräfte in lebendige (*vivae*, *vives*), oder solche die mit wirklicher Bewegung verbunden sind, und in todte (*mortuae*, *mortes*), oder drückende Kräfte, die Bewegung hervorzubringen streben ohne welche zu erzeugen, einzutheilen. Diese Vervielfältigung der Kräfte ist aber ohne Nutzen.

32. §.

Wenn man sich vorstellt, daß die Masse M aus einer gewissen Menge einzelner oder Elementartheile e bestehe, und daß die bewegende Kraft der Masse $M = P$ ist, so wird auf jeden einzelnen Theil e, ein gewisser Theil F von der Kraft P kommen, und es verhält sich

$M : e = P : F$, daher findet man

$$F = \frac{e}{M} P$$

Weil nun F die Kraft ist, welches jedes einzelne Theilchen der Masse M besitzt, so folgt hieraus, daß F als beschleunigende Kraft der Masse M angesehen werden kann.

Ist ferner der Masse m bewegende Kraft $= p$, und die auf jedes einzelne eben so große Theilchen e der Masse m wirkende Kraft $= f$, so erhält man wie vorher

$$f = \frac{e}{m} p$$

es verhält sich daher

$$F : f = \frac{P}{M} : \frac{p}{m}$$

d. h. die beschleunigenden Kräfte zweier Massen, verhalten sich wie die bewegen-

den Kräfte derselben und umgekehrt wie die Massen.

Auch verhält sich

$$P : p = FM : fm$$

d. h. die bewegenden Kräfte zweier Massen, verhalten sich wie diese Massen multiplizirt mit ihren beschleunigenden Kräften.

Sind die Massen einander gleich, so verhalten sich die bewegenden Kräfte wie die beschleunigenden.

Das Elementartheilchen e ist eine gemeinschaftliche Einheit der Massen M, m, daher kann man auch, wenn e = 1 gesetzt wird, durch $\frac{P}{M}$ die beschleunigende Kraft der Masse M bezeichnen und

$$F = \frac{P}{M}$$

setzen, welches um so mehr erlaubt ist, da man die Größe der Kräfte nur aus dem Verhältniß kennt, welches sie gegeneinander haben; eben so wie man anstatt der bewegenden Kraft einer Masse, den Druck derselben gegen einen unbeweglichen Widerstand in Rechnung bringen kann.

33. §.

Wenn nach den Bezeichnungen im vorigen §. die beschleunigende Kraft $F = \frac{P}{M}$ die Masse M in der ersten Sekunde durch den Weg G gleichförmig beschleunigt bewegt, und die beschleunigende Kraft $f = \frac{p}{m}$ die Masse m in eben der Zeit, durch den Weg g; und es ist $G = 2g$, so muß auch $F = 2f$ seyn.

Jedes einzelne Theilchen e der Masse M wird gegen einen Widerstand mit der Kraft F gepreßt, und wenn dieser weggenommen wird, so durchläuft

es in einer Sekunde den Weg G. Man setze, daß auf jedes einzelne Theilchen der Masse M in entgegengesetzter Richtung von der Kraft F, eine andere = f angebracht werde, so wird die einzelne Masse e so bewegt, als wenn nur die Kraft F — f auf sie wirkte. Nun treibt die Kraft F die Masse e durch den Weg G = 2g, wenn die Kraft f solche nach entgegengesetzter Richtung durch den Weg g treibt; es kann daher die Masse e sich nur durch den Weg 2g — g = g bewegen. Aber die Kraft f treibt e in eben der Zeit durch den Weg g, und wenn zwei beschleunigende Kräfte gleiche Massen in gleichen Zeiten durch gleiche Räume treiben, so ist man berechtigt anzunehmen, daß diese Kräfte einander gleich sind. Es ist daher F — f = f also

$$F = 2f.$$

Diese Schlüsse gelten eben so für den dreifachen, vierfachen und überhaupt für den vielfachen Weg, daher **verhalten sich die beschleunigenden Kräfte zweier Massen, wie die in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege derselben.**

34. §.

Man pflegt daher auch den Weg welchen eine Masse in der ersten Sekunde gleichförmig beschleunigt durchläuft, ihre **Beschleunigung** (Acceleratio) zu nennen. Für die Schwere ist diese Beschleunigung g = 15⅛ Fuß.

Wenn also eine bewegende Kraft P in die P
Masse M wirkt und derselben eine Beschleunigung M
G mittheilt, und man bezeichnet die beschleunigende G
Kraft dieser Masse durch F; wenn sich ferner eben F
so die Größen p, m, g, f auf unsere Schwere be- pm
ziehen, so verhält sich gf

$$F : f = \frac{P}{M} : \frac{p}{m}$$

und nach dem vorigen §.

$$\frac{P}{M} : \frac{p}{m} = G : g$$

daher findet man

$$G = g \, \frac{m}{M} \, \frac{P}{p}$$

Setzt man die Masse M = m, so wird

$$G = g \, \frac{P}{p}$$

Nun ist aber p die bewegende Kraft der Schwer welche in die Masse M wirkt, und weil man nu von der Größe dieser Kraft urtheilen kann, wen der Druck bekannt ist, welchen eine Masse vo der Schwere getrieben, gegen einen Widerstan ausübt, so kann man statt p das Gewicht d
N Masse M setzen. Ist dieses = N, und wird d Kraft P ebenfalls durch ein Gewicht ausgedrück so erhält man

$$G = g \, \frac{P}{N}$$

d. h. die Beschleunigung einer Masse wir gefunden, wenn der Druck welchen die bewegen de Kraft dieser Masse ausübt, durch das Gewich der Masse dividirt und mit $g = 15\frac{5}{8}$ Fuß mult zirt wird.

Aus der vorhin gefundenen Proportion erhä man ferner

$$P : p = GM : gm$$

d. h. die bewegenden Kräfte zweier Ma sen verhalten sich wie diese Massen mu tiplizirt mit ihren Beschleunigungen.

35. §.

Nach 11. und 12. §. läßt sich für jede geg bene Zeit T der durchlaufene Raum S und d erlangte Geschwindigkeit C einer Masse finde

che von einer andern beständigen Kraft wie der Schwere getrieben wird. Wäre G die Beschleunigung dieser Masse, so ist

I. $S = GT^2$ und

II. $C = 2GT$.

So erhält man auf eine ähnliche Art wie 15–17. §. den durchlaufenen Raum

III. $S = \frac{1}{2} CT = \frac{C^2}{4G}$

die erlangte Geschwindigkeit

IV. $C = \frac{2S}{T} = 2\sqrt{[GS]}$

die verflossene Zeit

V. $T = \frac{2S}{C} = \frac{C}{2G} = \sqrt{\frac{S}{G}}$

und wenn man $G = g\frac{P}{N}$ setzt

VI. $S = g\,T^2\,\frac{P}{N} = \frac{C^2}{4g}\,\frac{N}{P}$

VII. $C = 2gT\,\frac{P}{N} = 2\sqrt{[gS]}\sqrt{\frac{P}{N}}$

VIII. $T = \frac{C}{2g}\,\frac{N}{P} = \sqrt{\frac{S}{g}}\sqrt{\frac{N}{P}}$

Auch findet man hieraus die bewegende Kraft

IX. $P = \frac{C^2}{4gS}\,N = \frac{C}{2gT}\,N$

$= \frac{S}{gT^2}\,N.$

Ferner folgt noch, daß sich bei verschiedenen bewegenden Kräften und Massen, die beschleunigenden Kräfte wie die in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume, oder wie die am Ende dieser Zeiten erlangte Geschwindigkeiten verhalten.

Beispiel. Wie groß muß die bewegende Kraft P seyn, um eine träge Masse von 100 Pfund in 15 Sekunden durch einen Raum von 60 Fuß zu führen?

Hier ist N = 100, T = 15 und S = 60 daher die bewegende Kraft

$$P = \frac{60.\ 100}{15\frac{5}{8}.\ 15^2} = 1{,}707 \text{ Pfund.}$$

36. §.

Besitzt die Masse N schon die Geschwindigkeit C bevor die bewegende Kraft P zu wirken anfängt, so wird sie wegen ihres Beharrungsvermögens in der gleich darauf folgenden Zeit T den Raum CT durchlaufen. Wirkt aber in dieser Zeit noch die bewegende Kraft P, nach eben der Richtung, in welcher sich die Masse bewegt, so wird wegen dieser, der Weg GT^2 zurückgelegt, so daß der ganze
S′ Raum S′ welcher mit der Anfangsgeschwindigkeit C und wegen Einwirkung der Kraft P durchlaufen wird

$$S' = CT + GT^2 \text{ ist,}$$

oder wenn man $g\frac{P}{N}$ statt G setzt

$$S' = CT + gT^2\frac{P}{N}$$

Wirkt die bewegende Kraft P der bewegten Masse grade entgegen, so ist

$$S' = CT - gT^2\frac{P}{N}$$

Die Geschwindigkeit der Masse N am Ende der Zeit T sey v, so erhält man ferner (21. §.)

$$v = C - 2GT \text{ oder}$$

$$v = C - 2gT\frac{P}{N}$$

Die vorstehenden Sätze sind zur richtigen Beurtheilung des Ganges einer Maschine unentbehrlich, wenn man nicht allein bei dem Zustande des Gleich-

Gleichgewichts stehen bleiben will. Denn sobald irgend mehr Kraft bei einer Maschine angewandt wird, als das Gleichgewicht erfordert, so entsteht eine beschleunigte Bewegung, bei welcher es nicht gleichgültig ist, in wie viel Zeit diese Bewegung erfolgt.

37. §.

Obgleich die Anwendung der vorstehenden Sätze vorzüglich in die Maschinenlehre gehört, so kann doch ein Beispiel vieles zur Erläuterung derselben beitragen.

Man setze daß mittelst eines Fadens über eine Rolle A, zwei Gewichte V und W hängen, wovon $V > W$ ist, und wenn man die Masse der Rolle, Steifigkeit des Fadens und Frikzion bei Seite setzt, so wird das größere Gewicht V sinken und das kleinere W aufwärts ziehen. Daß das Gewicht V sich nicht wie ein frei fallender Körper bewegen kann, ist leicht einzusehen, weil es von dem Gewicht W daran verhindert wird. Nun ist die Kraft mit welcher V sinkt oder die Überwucht (Praepondium) $= V - W$ und das Gewicht der gesammten Masse welche bewegt wird $= V + W$, daher 34 §.

$$P = V - W$$

$$N = V + W$$

und man findet die Beschleunigung G mit welcher sich diese Massen bewegen

$$G = g \frac{V - W}{V + W}.$$

Wäre $V = 5$ und $W = 3$ ℔, so ist der Raum welchen die Gewichte in der ersten Sekunde durchlaufen

$$G = 15\tfrac{5}{8} \cdot \frac{5-3}{5+3} = 3\tfrac{29}{32} \text{ Fuß.}$$

In 8 Sekunden hätten die Gewichte zu[...] Raum

$$S = 3\frac{29}{32} \cdot 8^2 = 250 \text{ Fuß}$$

durchlaufen, und ihre erlangte Geschwindig[...] wäre

$$C = 2 \cdot 3\frac{29}{32} \cdot 8 = 62\tfrac{1}{2} \text{ Fuß.}$$

Anmerk. Zu dergleichen Versuchen kann die Atwo[...] sche Maschine dienen, welche alles leistet was [...] in dergleichen Fällen zu erwarten ist. Man fin[...] nähere Nachricht von ihr in J. G. Geißler, [...] schreibung und Geschichte der neuesten und vorz[...] lichsten Instrumente und Kunstwerke. 6ter Th. Zit[...] und Leipzig 1796. S. 5—18.

Mehreres über Ueberwucht findet man in: [...] such einer Theorie von der Ueberwucht, aufge[...] und gegen zuverlässige Experimente gehalten, [...] C. G. Schober. Leipzig 1751.

38. §

Sind P, p die bewegenden Kräfte, durch wel[...] die Massen M, m in verschiedenen Zeiten T, t [...] Geschwindigkeiten C, c erlangt haben, so ist 35.

$$C = 2gT\frac{P}{M} \text{ und } c = 2gt\frac{p}{m}$$

und es verhält sich, wenn statt der Gewichte N[...] die Massen M, m gesetzt werden

$$C : c = T\frac{P}{M} : t\frac{p}{m}$$

oder wenn man die Zeiten gleich annimmt, [...] T = t setzt, so verhält sich

$$CM : cm = P : p$$

oder die bewegenden Kräfte zweier M[...] sen, verhalten sich wie diese Massen, m[...] tiplizirt mit ihren in gleichen Zeiten [...] langten Geschwindigkeiten.

Aus 35. §. folgt ferner

$$C^2 = 4g S \frac{P}{M} \text{ und } c^2 = 4gs \frac{p}{m}$$

und wenn man die durchlaufenen Räume gleich groß annimmt, also $S = s$ setzt, so verhält sich

$$C^2 : c^2 = \frac{P}{M} : \frac{p}{m} \text{ oder}$$

$$C^2M : c^2m = P : p$$

d. h. die bewegenden Kräfte zweier Massen, verhalten sich wie die Quadrate, der bei gleichen zurückgelegten Wegen erlangten Geschwindigkeiten, multiplizirt mit den Massen.

Die erste Vergleichung

$$P : p = MC : mc$$

nennt man das Cartesianische, und

$$P : p = MC^2 : mc^2$$

das Leibnitzische Kräftenmaaß; bei ersterem sind die in gleichen Zeiten, bei letzterem aber, die nach gleichen durchlaufenen Räumen erlangten Geschwindigkeiten zum Grunde gelegt.

1. Anmerk. Man könnte leicht in die Versuchung gerathen und aus den vorstehenden Proportionen folgern, daß sich nun auch verhalte

$$P : p = MC : mc = Mc^2 : mc^2$$

welches, so gestellt, ungereimt wäre. Es ist aber hiebei zu bedenken, daß die Geschwindigkeiten welche am Ende gleicher Zeiten durch die Einwirkung einer beständigen Kraft erlangt werden, etwas anders sind, als die Geschwindigkeiten am Ende gleicher durchlaufener Räume, und daß C in der ersten Vergleichung etwas anders bedeutet, als in der zweiten, welches sogleich einleuchtend wird, wenn man in einem Falle C', c' statt C, c setzt. Auch kann man leicht beweisen, daß sich die erlangten Geschwindig-

keiten am Ende gleicher Zeiten, wie die Quadrate der erlangten Geschwindigkeiten bei gleichen durchlaufenen Räumen verhalten.

Mehreres über die Kräfte welche gleichförmig beschleunigte Bewegungen bewirken, über die ungleichförmig beschleunigte Bewegung, und über das Maaß der Kräfte, findet man in

A. G. Kästner, Anfangsgründe der höhern Mechanik, welche von der Bewegung fester Körper besonders die praktischen Lehren enthalten. Zweite sehr verbesserte und vermehrte Auflage. Götting. 1793.

W. J. G. Karsten, Lehrbegriff der gesammten Mathematik. Der vierte Theil: Die Mechanik fester Körper. Greifswalde 1769.

Ferner in der angeführten Mechanik von J. Kraft mit Zusätzen von Herrn Etatsrath Tetens; und in G. Vega Vorlesungen über die Mathematik. 3ter Bd. welcher die Mechanik der festen Körper enthält. Wien 1788.

2. Anmerk. Um wenigstens die Fundamentalgleichungen für die Bewegung solcher Massen, welche ungleichförmig beschleunigt werden, zu entwickeln, dient folgende Betrachtung.

Eine bewegende Kraft wirke zwar fortwährend in eine Masse nach einerlei Richtung, aber nicht immer mit gleicher Stärke, so entsteht daraus eine veränderliche Bewegung, deren Gesetze sich aus der gleichförmig beschleunigten Bewegung leicht ableiten lassen. Für eine unendlich kleine Zeit dt kann man annehmen, daß die veränderliche Kraft P die Masse M durch einen unendlich kleinen Raum ds gleichförmig bewege. Die Geschwindigkeit y für diesen Augenblick ist alsdann (5. §. II.)

$$\text{I.} \quad y = \frac{ds}{dt}$$

In der unendlich kleinen Zeit dt läßt sich die Kraft P und Masse M als unveränderlich annehmen, alsdann ist die der Masse M in der Zeit dt von der Kraft P mitgetheilte unendlich kleine Geschwindigkeit $= dy$; und man findet (35. VII.)

$$\text{II.} \quad dy = \frac{2gP}{M} dt$$

Wird I. und II. miteinander verbunden, so ist

$$\text{III.} \quad 2y\,dy = \frac{4gP}{M}\,ds$$

Es sey u die Höhe welche der Geschwindigkeit v für den freien Fall eines Körpers zugehört, so ist (15. §. III.) $y^2 = 4gu$ also $2y\,dy = 4g\,du$ daher

$$\text{IV.} \quad du = \frac{P\,ds}{M}$$

Die Werthe für dy und du sind positiv wenn die Kraft nach derselben Richtung wirkt, wohin sich der Körper bewegt; negativ, wenn eine verzögerte Bewegung entsteht.

Fünftes Kapitel.

Vom Stoße der Körper.

39. §.

Trift ein bewegter Körper einen andern dergestalt, daß die Richtungen, in welchen sich die Schwerpunkte beider Körper bewegen, in einerlei graden Linie liegen, und zugleich die aneinander stoßenden Flächen auf dieser Linie senkrecht sind, so sagt man der Stoß (Percussio s. Conflictus, *Choç*) ist grade oder central (directus), sonst schief oder eccentrisch (obliquus).

Die stoßenden Körper können von verschiedener Beschaffenheit seyn. Sie heißen hart, wenn sich ihre Gestalt durch den Druck oder Stoß nicht ändern läßt; weich wenn sie eine andere Gestalt annehmen und behalten; elastisch wenn sich zwar die Gestalt ändert, aber nachher wieder so herstellt, wie sie vor dem Stoße war.

40. §.

Man denke sich, daß von zwei gleichen Massen, die eine eine größere Geschwindigkeit habe als die andere, so besitzt auch die erstere in dem Verhältniß mehr Bewegung. Werden aber ungleiche Massen mit gleicher Geschwindigkeit bewegt, so besitzt die größere Masse in dem Verhältniß mehr Bewegung, als sie mehr materielle Theile wie die kleinere Masse hat. Es verhalten sich daher bei zwei ungleichen Massen, welche sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, die Summen der Bewegungen aller materiellen Theile dieser Massen oder die Größen der Bewegungen (Quanti-

ntes motus, *Quantité de mouvement*) wie die Producte aus den Massen in ihre Geschwindigkeiten.

Man setze daß sich die Massen M, m mit den Geschwindigkeiten C, c bewegen, und die Größe ihrer Bewegungen durch K, k ausgedrückt werde, und daß ferner einer dritten Masse M' = M, Geschwindigkeit c, und Größe der Bewegung K' sei, so verhält sich

$$\left.\begin{array}{l} K : K' = C : c \\ K' : k = M : m \end{array}\right\} \text{daher}$$

$$K : k = CM : cm$$

oder wenn N, n die Gewichte der Massen M, m sind

$$K : k = CN : cn.$$

41. §.

Bewegen sich die Massen M, m zweier harten unelastischen Körper mit den Geschwindigkeiten C, c und es ist die Größe der Bewegung CM = cm, so ist in der einen Masse so viel Bewegung wie in der andern, und wenn beide Körper central in entgegengesetzter Richtung aneinander stoßen oder sich begegnen, so kann keine Bewegung erfolgen, beide müssen ruhen. Hieraus ist es einleuchtend in wie fern man unter der Größe der Bewegung, die Kraft des bewegten Körpers verstehen kann.

42. §.

Ist hingegen für zwei harte unelastische Körper CM > cm und beide stoßen central aneinander, indem sie sich begegnen, so muß die Größe der Bewegung mc einen Theil der Bewegung MC aufheben. Der Überrest MC — mc vertheilt sich alsdann in beide Massen M + m, welche sich mit irgend einer Geschwindigkeit v nach der Richtung der Masse M fort bewegen werden.

Die Größe der Bewegung dieser Massen, kann aber nur dem Überreste der Bewegung nach dem Stoße gleich seyn, also

$$v\,(M + m) = CM - cm \text{ folglich}$$

die Geschwindigkeit nach dem Stoße

$$v = \frac{CM - cm}{M + m}$$

Bewegen sich beide Körper nach einerlei Richtung, oder folgen einander, und der schnellere stößt den langsamern, so ist die Größe der Bewegung nach dem Stoße $= CM + cm$, und wenn die Geschwindigkeit nach dem Stoße ebenfalls v gesetzt wird, so hat die Masse $M + m$ die Bewegung $MC + mc$ daher ist

$$v\,(M + m) = CM + cm \text{ oder}$$

$$v = \frac{CM + cm}{M + m}$$

Man findet daher allgemein die Geschwindigkeit nach dem Stoße für harte Körper

$$v = \frac{CM \mp cm}{M + m}$$

wo das obere Zeichen für begegnende, das untere für einander folgende Körper gilt.

Beispiel. Ein Körper, dessen Masse 12 Pfund beträgt, bewegt sich mit 7 Fuß Geschwindigkeit, indem ihn ein anderer von 20 Pfund mit 6 Fuß Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung stößt, man sucht die Geschwindigkeit nach dem Stoße. Hier ist

$$v = \frac{6.20 - 7.12}{20 + 12} = 1\tfrac{1}{8} \text{ Fuß.}$$

43. §.

Begegnen sich zwei Körper M, m einander, so verliert der erste den Theil

$$(C - v)\,M \text{ von seiner Bewegung;}$$

[de]r zweite m erhält, um sich in entgegengesetzter [R]ichtung mit der Geschwindigkeit v zu bewegen, [de]n Theil

$$(c + v)\, m \text{ zu seiner Bewegung.}$$

Folgen die Körper M,m einander, so verliert M den Theil

$$(C - v)\, M \text{ von seiner Bewegung,}$$

[u]nd m erhält den Theil

$$(v - c)\, m \text{ zu seiner Bewegung.}$$

44. §.

Wenn die Masse M sich mit der Geschwindigkeit C gegen die ruhende Masse m bewegt, so [i]st $c = 0$ also $mc = 0$. Die Geschwindigkeit C [m]uß sich nach dem Stoße in beide Massen vertheilen, welche sich alsdann zusammen mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{CM}{M + m}$$

[f]ortbewegen.

Es muß daher eine jede harte bewegte Masse [e]ine ruhende in Bewegung setzen, nur daß die ruhende immer weniger Geschwindigkeit erhält, wenn [i]hre Masse größer ist, so daß wenn der bewegte [K]örper gegen den ruhenden nur sehr klein ist, [sc]hon eine beträchtliche Geschwindigkeit dazu gehört, [w]enn die Bewegung merklich werden soll.

Beispiel. Ein Körper welcher 1 Pfund wiegt, bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 10 Fuß gegen eine ruhende 1200 Pfund schwere Masse, wie groß ist die Geschwindigkeit beider nach dem Stoße?

$$v = \frac{10 . 1}{1 + 1200} = \frac{10}{1201} \text{ Fuß.}$$

$$= \frac{1}{10} \text{ Zoll beinahe.}$$

45. §.

Stoßen zwei *elastische* Körper, deren Massen M, m sind, mit den Geschwindigkeiten C, c central aneinander indem sie sich *begegnen*; so erleiden beide eine Änderung in ihrer Gestalt, welche sich nach vollendetem Stoße wieder herstellt.

Beide Körper müssen, so bald sie sich berühren wechselseitig so lange auf die Veränderung ihrer Gestalt wirken, oder sich so lange zusammenpressen, bis sie einerlei Geschwindigkeit durch die Mittheilung der Bewegung erlangt haben. Diese Geschwindigkeit, im Augenblick der größten Zusammenpressung, sei x und $MC > mc$, so würden sich beide Körper, *wenn die Elasticität nicht wirkte*, nach der Richtung des Körpers M mit dieser Geschwindigkeit fortbewegen. Alsdenn ist

$$x = \frac{CM - cm}{M + m}$$

Da sich beide Körper begegnen, so hat M den Theil

$$(C - x)\, M$$

an seiner Bewegung verloren, und m den Theil

$$(c + x)\, m$$

zu seiner Bewegung erhalten. In dem Augenblick der größten Zusammenpressung suchen aber beide Körper vermöge ihrer Elasticität, ihre Figur wieder herzustellen, wozu eben so viel Kraft angewandt werden muß, als dazu gehört diese Figur zu ändern. Nun hat der Körper M die Bewegung xM; durch die Wiederherstellung der Theile in m, welche nach einer seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung geschieht, und wozu die Bewegung $(C - x)\, M$ angewandt werden mußte, behält daher derselbe nur noch die Bewegung

$$xM - (C - x)\, M. = (2x - C)\, M.$$

Der Körper m hat die Bewegung xm; durch

e Wiederherstellung der Theile in M, wozu die Bewegung $(c+x)\,m$ verwandt worden, erhält dieselbe die Bewegung

$$xm + (c+x)\,m = (2x+c)\,m.$$

Man setze die Geschwindigkeiten der Körper M, m mit welchen sie sich nach der letzten Berührung fortbewegen y, z; so ist wenn sich die Körper begegnen y z

$$yM = (2x - C)\,M$$
$$zm = (2x + c)\,m$$

Folgen die Körper einander, so findet man durch ähnliche Betrachtungen

$$yM = (2x - C)\,M$$
$$zm = (2x - c)\,m$$
$$\text{wo } x = \frac{CM + cm}{M + m} \text{ ist.}$$

Setzt man statt x die gefundenen Werthe in obige Ausdrücke, so erhält man allgemein die Geschwindigkeiten mit welchen sich elastische Körper nach der letzten Berührung fortbewegen

$$y = \frac{C\,(M - m) \mp 2mc}{M + m}$$

$$z = \frac{\pm c\,(M - m) + 2MC}{M + m}$$

wo das obere Zeichen für begegnende, und das untere für einander folgende Körper gilt.

Beide Geschwindigkeiten y und z sind so bestimmt worden, daß man voraussetzte, die Körper bewegen sich nach dem Stoße nach eben der Richtung, welche M vor dem Stoße hatte. So oft also die Geschwindigkeiten einen positiven Werth erhalten, gehen die Körper nach derselben Richtung die M hatte, dahingegen zeigt ein negativer Werth an, daß die Richtung entgegengesetzt ist.

46. §.

Begegnen sich zwei gleiche elastische Massen verschiedener Geschwindigkeit, so ist M = m der Masse M Geschwindigkeit nach dem Stoß

$$y = \frac{-2mc}{2m} = -c$$

und der Masse m Geschwindigkeit

$$z = \frac{2MC}{2M} = C$$

d. h. gleiche elastische Körper die einand begegnen, kehren von einander mit v wechselten Geschwindigkeiten zurück.

47. §.

Ist der Körper m in Ruhe und beide M sen einander gleich, so wird c = o und M = Nach dem Stoße ist alsdann für M

$$y = o \text{ und für } m$$

$$z = \frac{2MC}{2M} = C.$$

d. h. wenn eine elastische Masse, an e gleiche ruhende stößt, so bekömmt die hende die Geschwindigkeit der anstoß den, und die anstoßende bleibt stehen.

48. §.

Sind die Bewegungen CM und cm einan gleich und die Körper begegnen sich, so findet n

$$y = -C \text{ und}$$

$$z = c.$$

d. h. bei gleicher Größe der Bewegu kehren elastische Körper mit ihrer G schwindigkeit wieder zurück.

49. §.

Wenn ein harter Körper gegen eine n che ruhende Masse stößt, welche dem Eind

..n gleich stark widerstehet, und ihm in gleichen ..iten gleiche Geschwindigkeiten raubt, so bewirkt ..es eine gleichförmig verzögerte Bewegung, und ..r in der weichen Masse durchlaufene Raum, ..er die Tiefe des Lochs, muß sich auf eine ähn..che Art wie beim Steigen der Körper, wie das ..uadrat der Geschwindigkeit verhalten, mit wel..er der Körper einzudringen anfängt. Aber unter ..brigens gleichen Umständen wird ein fallender Kör..er von größerem Gewichte auch verhältnißmäßig ..fer eindringen, daher verhalten sich bei einerlei ..igur der eindringenden Körper, die Tiefen der ..öcher, wie die Quadrate der Geschwin..igkeiten multiplizirt mit den Gewichten.

Dieser Satz findet seine Anwendung bei den ..ammen.

Der obige Lehrsatz kann auch auf folgende Art ..ewiesen werden. Es sey

N das Gewicht des eindringenden Körpers
P die Kraft welche die Geschwindigkeit desselben gleichförmig vermindert
C die anfängliche Geschwindigkeit
S die ganze Tiefe des Lochs
v die Geschwindigkeit am Ende der Zeit T und
S′ die Tiefe des Lochs am Ende der Zeit T,

so ist 36. §.

$$S' = CT - gT^2 \frac{P}{N} \text{ und}$$

$$v = C - 2gT \frac{P}{N} \text{ also}$$

$$T = \frac{C-v}{2g} \cdot \frac{N}{P}$$

diesen Werth in die erste Gleichung gesetzt giebt

$$S' = \frac{C^2 - v^2}{4g} \cdot \frac{N}{P}$$

für $v = 0$ wird $S' = S$ daher

$$S = \frac{C^2}{4g} \frac{N}{P}$$

woraus sich der obige Satz leicht folgern läßt.

Sechstes Kapitel.

Vom freien Falle schwerer Körper einer schiefen Ebene.

50. §.

Auf der schiefen Ebene AB, welche unter Winkel ABC = α gegen den H zont geneigt ist, befindet sich ein sch rer Körper in A, dessen Gewicht = ist, und welcher sich ungehindert A bis B bewegen kann; man sucht Zeit T in welcher der Weg AB = durchlaufen wird.

Das respektive Gewicht oder Gewalt mit welcher der Körper n der Richtung AB getrieben wird, ist = P Sin und weil auf der ganzen schiefen Ebene, das spektive Gewicht unverändert bleibt, so ist P Si die bewegende Kraft welche den Körper von A b gleichförmig beschleunigt beweget. Man findet her die Beschleunigung G desselben (34. §.)

$$G = g\,\frac{P \text{ Sin } \alpha}{P} = g \text{ Sin } \alpha.$$

und hieraus die Zeit (35. §.)

$$\text{I.} \quad T = \sqrt{\frac{S}{g \text{ Sin } \alpha}}$$

Die am Ende der Zeit T in B erlangte schwindigkeit C ist nach demselben §.

$$\text{II.} \quad C = 2gT \text{ Sin } \alpha = 2\sqrt{(gS \text{ Sin } \alpha}$$

und der durchlaufene Raum AB oder

$$\text{III.} \quad S = gT^2 \text{ Sin } \alpha$$

s verhalten sich also bei der schiefen Ebene, die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten; und die verflossenen Zeiten, wie die erlangten Geschwindigkeiten.

Hieraus folgt ferner, weil

$$G = g \operatorname{Sin} \alpha = g \frac{AC}{AB}$$

daß sich bei der schiefen Ebene die Beschleunigungen, wie die Höhen der schiefen Ebenen dividirt durch ihre Längen verhalten. Eben so verhalten sich auch die beschleunigenden Kräfte (33. §.)

51. §.

Wenn der Körper in der Vertikallinie AD frei herabfiele, so wäre seine in der Zeit T erlangte Geschwindigkeit $= 2gT$ (16. §.); auf der schiefen Ebene erhält derselbe in eben der Zeit die Geschwindigkeit $2gT \operatorname{Sin} \alpha$, daher verhalten sich diese Geschwindigkeiten wie

$$1 : \operatorname{Sin} \alpha = AB : AC,$$

d. h. die Geschwindigkeit, welche ein Körper durch den freien vertikalen Fall erhält, verhält sich zu derjenigen, welche er durch den Fall auf einer schiefen Ebene in derselben Zeit erlangt, wie die Länge der Ebene zu ihrer Höhe.

52. §.

In der Zeit T fällt der Körper vertikal von der Höhe $h = gT^2$ (15. §.) und in eben der Zeit durchläuft er auf der schiefen Ebene den Raum $S = gT^2 \operatorname{Sin} \alpha$, und es verhält sich daher

$$h : S = 1 : \operatorname{Sin} \alpha = AB : AC$$

d. i. der vertikal durchlaufene Raum ver=

hält sich zu dem auf der schiefen Ebe
derselben Zeit zurückgelegten Wege,
die Länge der schiefen Ebene zur Hö

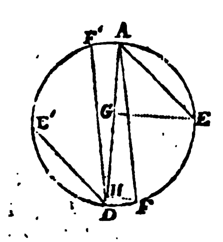
Gesetzt daß ein Körper an
schiefen Ebene den Weg AB i
laufen habe, so findet man
in eben der Zeit durchlauf
vertikalen Weg AD, wenn
B auf AB eine senkrechte Lini
gezogen wird, bis solche die v
gerte AC schneidet. Denn

AD : AB = AB : AC.

Umgekehrt, wenn ein K
in der Zeit T den vert
Weg AD durchlaufen ha
findet man für diese Zei
Weg AE auf der sch
Ebene AB, wenn man DE
AB senkrecht zieht, oder übe
einen Halbkreis beschreibt,
cher AB in E schneidet.

Dasselbe würde für jede andere schiefe (
AF gelten, wo AG der gesuchte Weg ist.

53 §.



Aus dem Vorhergehende
giebt sich ferner der von Ga
erfundene Satz: daß ein K
per jede Sehne AE, AF
Halbkreise in eben der
durchläuft, darin er d
den vertikalen Durchm
AD frei fallen würde,
die Sehnen werden gleichzeitig oder isoch
durchlaufen.

Eben dasselbe gilt von den untern Sehnen
DF; weil sich allemal eine parallele Sehne

F angeben läßt, welche mit der aus D gezogenen nerlei Neigung und Länge hat.

Es werden daher alle Sehnen, welche durch ie Endpunkte des vertikalen Durchmes- ers eines Kreises gehen, in gleichen Zei- en durchlaufen.

54 §.

Die in D, F, E erlangten Geschwindigkeiten, be- eichne man mit c, c′, c″, so verhält sich (51 §.)

$$: c' = AF : AH = AD : AF$$
$$' : c = AG : AE = AE : AD \quad \text{folglich}$$
$$' : c' = AE : AF$$

lso verhalten sich die in gleichen Zeiten er- angten Geschwindigkeiten, wie die Seh- en, oder wie die in gleichen Zeiten durch- aufenen Räume.

55. §.

Die Zeit des Falles durch AD, AB sey t, t′, o ist die Zeit durch AE = t (53. §.). Aber (50. §.)

$$^2 : (t')^2 = AE : AB = \frac{AD^2}{AB} : AB = AD^2 : AB^2$$

$$\text{daher} \quad t : t' = AD : AB$$

s verhält sich daher die Zeit des vertikale Falles durch die Höhe der schiefen Ebene, ur Zeit des Falles durch die Länge der- elben, wie die Höhe der schiefen Ebene u ihrer Länge.

Setzt man die Zeiten in welchen die Körper ie Räume AD, AB, AF durchlaufen = t, t′, t″ o verhält sich 41. §.

$$t' : t = AB : AD, \text{ eben so}$$
$$t : t'' = AD : AF \quad \text{folglich}$$
$$t' : t'' = AB : AF$$

d. h. wenn Körper auf verschiedenen schiefen Ebenen von gleicher Höhe herunter fallen, so verhalten sich die verflossenen Zeiten, wie die Längen der Ebenen.

56. §.

Die durch den Fall von A in D erlangte Geschwindigkeit sei c, und durch den Fall auf der schiefen Ebene AB = C, so ist (50. §.)

$$C = 2\sqrt{(g \cdot AB \cdot \text{Sin}\,\alpha)}$$

Aber $\text{Sin}\,\alpha = \frac{AD}{AB}$, daher

$$C = 2\sqrt{(g \cdot AB\,\frac{AD}{AB})} = 2\sqrt{(g \cdot AD)}$$

Durch den freien Fall in der Vertikale AD erhält der Körper eine Geschwindigkeit (16. §.)

$$c = 2\sqrt{(g \cdot AD)}$$

daher ist c = C, oder

die erlangte Geschwindigkeit eines durch die Höhe einer schiefen Ebene vertikal gefallenen Körpers, ist eben so groß, als diejenige, welche der Körper durch den Fall längs der schiefen Ebene erhält.

Wenn umgekehrt ein Körper längs einer schiefen Ebene BA mit der Geschwindigkeit C zu steigen anfängt, so wird er in eben der Zeit seine größte Höhe erreichen darin er beim Herunterfallen auf der schiefen Ebene, die Geschwindigkeit C erlangt hätte. Auch wird der beim Herunterfallen durchlaufene Weg eben so groß seyn, wie beim Hinaufsteigen, welches man auf eine ähnliche Art wie bei dem vertikalen Steigen der Körper beweisen

57. §.

Wenn AB, BC, CD mehrere unter verschiedenen Winkeln mit einander verbundene schiefe Ebenen sind, deren vertikale Höhen durch die Linien EF, FG, GD bezeichnet werden, so wird ein Körper welcher von A bis B fällt, in B eben die Geschwindigkeit erlangen, welche er durch den freien Fall in der Vertikale EF erhält. Verlöre der Körper durch die Veränderung seiner Richtung in den Ecken B, C, nichts von seiner Geschwindigkeit, so würde die durch den Fall in der gebrochenen Linie ABCD in D erlangte Geschwindigkeit eben so groß seyn, als wenn er von der zugehörigen vertikalen Höhe ED frei herabgefallen wäre.

Durch die Bewegung in einer krummen Linie verliert ein Körper nichts von seiner Geschwindigkeit (8. §.), wenn daher ADK eine krumme Linie ist, welche sich in einer vertikalen Ebene befindet, und man zieht die horizontale Tangente tT, mit ihr parallel die Ordinate AK, und durch den Berührungspunkt D die Vertikale DE, so wird ein Körper welcher auf der krummen Linie AD frei herunter fällt, in D eine eben so große Geschwindigkeit nach der Richtung DT erhalten, als wenn er durch die Vertikale ED frei herab gefallen wäre. Mit dieser in D erlangten Geschwindigkeit wird er fortfahren sich zu bewegen, und auf der Linie DK einen Weg durchlaufen, welcher der Höhe DE zugehört, bis er im höchsten Punkte K seine Geschwindigkeit gänzlich verloren hat. In eben der Zeit muß der Körper wieder von K bis D herunter fallen, darin er gestiegen ist, und diese wechselseitige Bewegung des Körpers würde ohne Ende fortdauern, wenn er bei seiner Bewegung keine Hindernisse fände.

Sind beide Bogen AD, DK einander g
so fällt der Körper in eben der Zeit von A
D, darin er von D nach K steigt, und u
kehrt.

58. §.

Wenn der Bogen ADK eine Cycloide
Radlinie ist, so läßt sich mit Hülfe der hö
Geometrie beweisen, daß unter allen mögl
Linien welche zwischen A und D enthalten
können, der Körper in dieser Linie in der
zesten Zeit von A bis D fällt. Auch hat
Linie die Eigenschaft, daß ein Körper in eben
Zeit in D anlangt, er mag aus A oder au
ner niedrigern Stelle in der Linie AD seine
wegung anfangen, weshalb man sie tautod
nisch nennt.

Siebentes Kapitel.

Von der Kreisbewegung.

59 §.

Wenn sich ein Körper M, dessen Masse M man nur als träge annimmt, welches der Fall seyn würde, wenn solche auf einer ebenen horizontalen Tafel befindlich wäre, in einem Kreise ABF dessen Halbmesser AC = r ist, mit der Geschwindigkeit c herum bewegt, so würde er, vermöge seiner Trägheit, in jedem Punkte A seine Bewegung nach der Tangente AD fortsetzen, wenn ihn nicht eine Kraft von der graden Richtung ablenkte und nach dem Mittelpunkt C triebe. Diese Centralkraft nennt man auch die Normal-, Centripetal- oder Annäherungskraft (Vis centripeta, *Force centripède*), und man sieht daß der Körper bei der Kreisbewegung ein beständiges Bestreben äußert, sich vom Mittelpunkte C zu entfernen, welches die Schwung-, Flieh- oder Centrifugalkraft (Vis centrifuga, *Force centrifuge*) genannt wird. Sie ist der Centripetalkraft entgegengesetzt und muß ihr gleich seyn.

Ist der Körper M mittelst eines Fadens in C befestiget, so ist die Gewalt, mit welcher der Körper M bei der Umdrehung den Faden spannt, die Schwungkraft. Sie wird empfunden, wenn man eine an einem Faden befestigte Bleikugel horizontal herum schwingt.

Sind beide Bogen AD, DK einander gl- so fällt der Körper in eben der Zeit von A D, darin er von D nach K steigt, und u- kehrt.

58. §.

Wenn der Bogen ADK eine Cycloide Radlinie ist, so läßt sich mit Hülfe der hö Geometrie beweisen, daß unter allen mögli Linien welche zwischen A und D enthalten können, der Körper in dieser Linie in der zesten Zeit von A bis D fällt. Auch hat Linie die Eigenschaft, daß ein Körper in eben Zeit in D anlangt, er mag aus A oder aus ner niedrigern Stelle in der Linie AD seine wegung anfangen, weshalb man sie tautoc nisch nennt.

60. §.

Man nehme den Bogen AB so klein wie möglich an, so daß man sich denken kann, er falle mit seiner Sehne zusammen. Durchläuft nun der Körper M den Weg AB in der Zeit t, so ist wenn der Halbmesser AC = r gesetzt wird

$$AE = \frac{AB^2}{2r}$$

Aber AB = ct (5. §.) daher

$$AE = \frac{c^2 t^2}{2r}$$

Damit aber der Körper M den Weg AB durchlaufen kann, so muß er in der sehr kleinen Zeit t von einer Kraft V durch den Weg AE getrieben werden, und weil man in dieser sehr kleinen Zeit die Beschleunigung der Kraft V durch den Weg AE als gleichförmig ansehen kann, so ist, wenn M das Gewicht einer schweren Masse bezeichnet, die eben so viel materielle Theile hat, als die blos träge Masse M,

$$AE = gt^2 \frac{V}{M} \text{ (35. §.) oder}$$

$$gt^2 \frac{V}{M} = \frac{c^2 t^2}{2r}$$

daher findet man die Schwungkraft

$$\text{I.} \quad V = \frac{c^2}{2gr} M$$

Hieraus folgt:

$$V : M = 2\frac{c^2}{4g} : r$$

d. i. die Schwungkraft verhält sich zum Gewicht der umlaufenden Masse, wie die doppelte Fallhöhe welche der Geschwindigkeit der Masse zugehört zum Halbmesser.

Die Zeit eines Umlaufs sei = T, und die Zahl 3,14159.. = π, so ist

$2\pi r = cT$; (5. §. I.) oder $c^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$ daher

$$\text{II. } V = \frac{4\pi^2 r^2}{2 g r T^2} M = \frac{2\pi^2 r}{g T^2} M.$$

Beispiel. Stellt man sich die Masse eines Körpers, der 12 Loth wiegt, in einem Punkte vereinigt vor, und setzt daß sich der Körper auf einer horizontalen Fläche, an einem 2 Fuß langen Faden, mit einer Geschwindigkeit von 5 Fuß im Kreise herum bewegt, so findet man nach I. die Schwungkraft

$$V = \frac{25 \cdot 12}{2 \cdot 15\frac{5}{8} \cdot 2} = 4\tfrac{4}{5} \text{ Loth.}$$

Anmerk. Wenn man einen Stein in einen Tonnenband oder Reifen legt, den Band am entgegengesetzten Ende, wo der Stein liegt, anfaßt und im Kreise schnell herum schwingt, so bleibt der Stein vermöge seiner Schwungkraft im Bande liegen, ohne herunter zu fallen.

Das zwischen zwei horizontalen Mühlsteinen durch das Läuferauge in der Mitte einfallende Getreide, wird durch die Schwungkraft welche es wegen der Umdrehung zwischen beiden Steinen erhält, nach dem Umfange derselben oder gegen den Lauft bewegt.

Ein dünner Läufer zerberstet und fällt neben dem Bodensteine nieder, vermöge seiner Schwungkraft.

Räder, deren Masse nicht gleichförmig am Umfange vertheilt ist, drücken die Wellzapfen vermöge der Schwungkraft.

61. §.

C B A D

An der Stange AC welche sich um die Axe C frei drehen kann, befinde sich in A eine blos träge Masse M, in B die träge Masse M'. Die Stange AC sei ohne Masse, und auf AC

senkrecht wirke die bewegende Kraft P in die Masse M, so findet man den auf M′ entstehenden Druck P′, wenn CA = a und CB = b gesetzt wird

$$P' = \frac{aP}{b}$$

welcher als bewegende Kraft die Masse M′ beschleunigt.

Soll nun durch die Bewegung beider Massen die Stange AC in gleichen Zeiten um einerlei Winkel gedreht werden, so müssen sich die beschleunigenden Kräfte wie die Wege der Massen in einerlei Zeit (33. §.) also wie ihre Entfernungen vom Umdrehungspunkte C verhalten, daher

$$\frac{P}{M} : \frac{P'}{M'} = a : b \text{ aber nach oben}$$
$$P' : P = a : b \text{ daher}$$
$$M' : M = a^2 : b^2 \text{ oder}$$
$$a^2 M = b^2 M'$$

d. h. wenn zwei an einer Stange befindliche Massen, vermöge ihrer beschleunigenden Kräfte in gleicher Zeit um einerlei Winkel geführt werden sollen, so müssen sie sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Axe verhalten, oder die Produkte $a^2 M$ und $b^2 M'$ müssen einander gleich seyn.

Weil hienach keine Masse, wegen der einwirkenden bewegenden Kraft, durch die erhaltene Beschleunigung die Stange schneller drehen oder der Masse voreilen kann, so lassen sich solche in Absicht der Umdrehung als gleichgültig ansehen, und man nennt deshalb die Produkte $a^2 M$, $b^2 M'$ Momente der Trägheit oder Momente der Massen (Momentá inertiae, *Moment d'inertie.*)

Wenn C die Geschwindigkeit der Masse M ist, und C' die Geschwindigkeit der Masse M', so ist

$$c : c' = a : b$$ daher

$$M' : M = C^2 : (C')^2$$ folglich

$$MC^2 = M' (C')^2$$

oder die Momente der Trägheit zweier Massen sind einander gleich, wenn die Produkte aus den Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten gleich sind; daher man auch diese Produkte Momente der Trägheit zu nennen pflegt, und als solche in Rechnung bringen kann.

62. §.

Wird die Masse M' aus B weggenommen, und eine andere m in einer Entfernung CD $= \beta$ angebracht, und es ist

$$\beta^2 m = b^2 M'$$

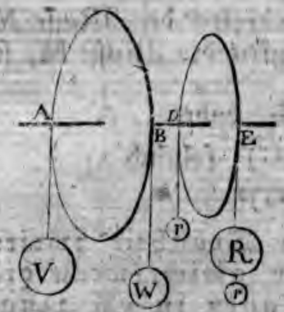
so wird die beschleunigende Kraft der Masse m noch eben so auf die Bewegung der Stange wirken, wie die beschleunigende Kraft der Masse M' in B, vorausgesetzt daß die bewegende Kraft unverändert bleibt. Auch sieht man ein, wie statt einer Masse M' eine andere gegebene m gesetzt werden kann, wenn man

$$\beta^2 = b^2 \frac{M'}{m}$$ nimmt;

oder wenn die Entfernung β gegeben ist, so läßt sich die Masse

$$m = \frac{b^2}{\beta^2} M'$$ finden.

Die Beschleunigung mit welcher sich jeder Punkt der Stange AC umdreht, bleibt alsdenn offenbar dieselbe, wenn die bewegende Kraft welche auf M wirkt, unverändert bleibt.



Um die Anwendung hievon auf einen besondern Fall zu zeigen, so setze man, daß an der Axe AE zwei kreisförmige Scheiben AB, DE befestiget sind, deren Masse man hier nicht in Betrachtung ziehet. Die Halbmesser der Scheiben AB, DE sind a, b, und in A hängt ein Gewicht V von 7 Pfund, in B ein Gewicht W von 3 Pfund, beide an einerlei Halbmesser a. Die bewegende Kraft ist alsdann

$$V - W = 4 \text{ Pfund}$$

und man findet die Beschleunigung mit welcher das Gewicht V sinken wird (37. §.)

$$G = 15\tfrac{5}{8}\,\frac{7-3}{7+3} = 6\tfrac{1}{4} \text{ Fuß.}$$

Soll nun das Gewicht W weggenommen und ein anderes am Halbmesser b in E aufgehangen werden, jedoch so, daß die Beschleunigung mit welcher das Gewicht V sinkt dieselbe bleibt, so muß auch die bewegende Kraft V — W unverändert bleiben. Man setze a = 3, b = 2 Fuß, so wird erfordert, wenn W weggenommen ist, daß bei unveränderter bewegender Kraft, in E ein Gewicht

$$R = \frac{aW}{b} = \frac{3.3}{2} = 4\tfrac{1}{2} \text{ Pfund}$$

aufgehängt werde.

Hiedurch ist zwar die Bedingung erfüllt, daß die bewegende Kraft nicht geändert ist, aber die Momente der Massen

$$b^2 R \text{ und } a^2 W \text{ oder}$$

$$4 \cdot 4\tfrac{1}{2} \text{ und } 9\;3$$

sind ungleich, daher würde (61. §.) die Scheibe DE

r sich betrachtet, in einerlei Zeit nicht eben so st umlaufen wie die Scheibe AB. Damit dieses ber erfolgt, so setze man die am Umfang der Scheibe DE erforderliche Masse $= M$, so ist

$$M = \frac{a^2}{b^2} W = \frac{9}{4} \cdot 3 = 6\tfrac{3}{4} \text{ Pfund Masse.}$$

s ist aber schon $R = 4\tfrac{1}{2}$, daher fehlen noch

$$M - R = 6\tfrac{3}{4} - 4\tfrac{1}{2} = 2\tfrac{1}{4} \text{ Pfund Masse}$$

die am Umfang der Scheibe DE so angebracht werden müssen, damit hiedurch die bewegende Kraft in A nicht geändert wird, welches offenbar dadurch geschehen kann, daß man auf beiden Seiten an inem Faden ein Gewicht $r = \frac{1}{2}(M - R) = 1\tfrac{1}{8}$ Pfund aufhängt.

Alsdenn ist die bewegende Kraft unverändert geblieben, und weil

$$a^2 W = b^2 M = b^2 (R + 2r)$$

o ist auch die Beschleunigung dieselbe, weil statt er Masse W an a, die ihr gleichgültige M an b gebracht worden.

Hieraus folgt: daß eine Kraft den von hr angegriffenen Punkt in einerlei beschleunigte Bewegung setzt, wenn

1. die statischen Momente der Gewichte und
2. die Momente der Massen dieselben bleiben, man mag übrigens die Gewichte oder Massen ändern wie man will.

Auch sieht man hieraus, was es heißt, eine Masse auf irgend einen Punkt reduziren; dies geschieht mittelst der Momente der Massen auf eine ähnliche Art, wie in der Statik Gewichte oder Kräfte mittelst der statischen Momente reduzirt werden.

Diese wichtigen Lehren und die damit verwandten Untersuchungen auf eine eigene vorzügliche Art entwickelt, findet man im zweiten Kapitel von

K. C. Langsdorf, Handbuch der Maschinenlehre für Praktiker und akademische Lehrer. Erster Band. m. K. Altenburg 1797.

63. §.

Befinden sich an einem Hebel mehrere blos träge Massen A, B, C, D... in Entfernungen a, b, c, d... vom Umdrehungspunkte, und in irgend einer Entfernung k von diesem Punkte ist eine bewegende Kraft P angebracht, welche immer in senkrechter Richtung auf den Hebel wirkt, so kann man nach der Beschleunigung G des von der Kraft angegriffenen Punktes fragen, um darnach die Bewegung jeder einzelnen Masse und des ganzen Hebels zu beurtheilen.

Es kommt zuerst darauf an, in der Entfernung k eine Masse M anzugeben, welche sämmtlichen Massen A, B, C... in den Entfernungen a, b, c... gleichgültig ist, oder mit andern Worten, die Massen A, B, C... nach der Lehre vom Moment der Trägheit auf die Entfernung k zu reduziren. Nun findet man

$$M = \frac{a^2 A + b^2 B + c^2 C + \ldots}{k^2}$$

daher die gesuchte Beschleunigung (34. §.)

$$G = g \frac{P}{M} \text{ oder}$$

$$G = \frac{g k^2 P}{a^2 A + b^2 B + c^2 C + d^2 D + \ldots}$$

Sobald für irgend einen Zeitpunkt die Geschwindigkeit eines Punkts in der Entfernung k bekannt ist, so kann hienach leicht die Geschwindigkeit für jede andere Entfernung gefunden werden.

Auch sieht man ein, das hier statt der Entfernungen a, b, c... die Geschwindigkeiten der Massen A, B, C... für irgend einen Zeitpunkt in Rechnung gebracht werden konnten.

64. §.

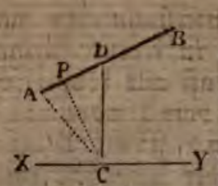
In den vorhergehenden Untersuchungen war oraus gesetzt, daß die Massen in einem einzigen unkte vereinigt wären, oder daß alle körperliche heile der Massen als gleichweit vom Umdrehungs= unkte angesehen werden konnten. Weil es aber hr wichtig ist, das Moment der Trägheit eines den Körpers zu kennen, um mittelst desselben den Gang einer Maschine zu beurtheilen, so müßte an, um dieses Moment für einen Körper von stimmter Figur und gegebener Entfernung von r Umdrehungsaxe zu finden, für jedes Elementar- eilchen desselben das Moment der Trägheit su- en, da denn die Summe aller dieser Momente, as Moment der Trägheit des ganzen Körpers äbe. Man kann das Moment der Trägheit ei= es Körpers, dessen Masse M ist, durch $z^2 M$ be= ichnen, und die höhere Analysis lehrt die Sum- e von den Momenten der einzelnen Elementartheil- en der Masse, ohne eine mühsame Summation nden. Die folgenden §. §. enthalten Versuche, für ie vorzüglichsten Fälle in der Ausübung, die Mo- ente der Trägheit, ohne Beihülfe der höhern Ana- ysis anzugeben.

So bald das Moment der Masse $z^2 M$ eines Körpers, welcher sich um eine gegebene Axe dreht, ekannt ist, so läßt sich daraus allemal mittelst er bewegenden Kraft P und ihrer Entfernung k on der Axe, die Beschleunigung G des angegrif- nen Punkts finden, vorausgesetzt daß die Richtung er Kraft P senkrecht auf einem graden Hebelsarm t, der mit der Axe um welche die Masse gedreht erden soll, verbunden ist. Man erhält alsdann

$$G = \frac{gk^2 P}{z^2 M}$$

nd es wird angenommen, daß außer der Masse I keine weiter in Bewegung gesetzt werden darf.

65. §.



Auf der Axe XY sei der H belsarm CD senkrecht, und a Ende desselben in D befinde si ein dünner prismatischer Sta AD senkrecht auf CD. Die Ax dieses Stabes liege in einer Eben welche auf der Axe XY senkrecht steht, so daß e bei der Bewegung um XY nach der Seite (i latus) schwinge; man soll das Moment der Träg heit des Stabes AD finden, wenn die Axe XY un der Arm CD ohne Masse angenommen wird.

Es sei CD = a, die Länge des Stabes AD = b, der senkrechte Querschnitt desselben = f, s ist sein körperlicher Inhalt = fb, und wenn sein Masse = M gesetzt wird, so läßt sich hier M = fb annehmen. Man theile die Länge des Stabes AD in n gleiche Theile, wo n eine sehr große Zahl seyn kann, so ist die Länge eines jeden dieser Theil chen $= \frac{1}{n}$ b und die Masse desselben $= \frac{1}{n}$ M und und man findet das Moment der Trägheit vo dem ersten dieser Theilchen, welches zunächst bei D liegt

$$= (CD)^2 \frac{1}{n} M = a^2 \frac{1}{n} M.$$

Das zweite Theilchen ist um $\frac{1}{n}$ b von D ent fernt, daher sein Abstand die Hypothenuse eine rechtwinklichten Dreiecks, dessen Katheten a und $\frac{1}{n}$ b sind. Dies giebt das Moment der Trägheit de zweiten Theilchens

$$= [a^2 + (\tfrac{1}{n} b)^2] \tfrac{1}{n} M$$

Eben so für das dritte

$$[a^2 + (\tfrac{2}{n} b)^2] \tfrac{1}{n} M$$

das vierte

$$[a^2 + (\frac{3}{n} b)^2] \frac{1}{n} M$$

für das nte oder letzte

$$[a^2 + (\frac{n-1}{n} b)^2] \frac{1}{n} M.$$

Die Summe dieser Momente der Trägheit die einzelnen Theile der Masse M geben das oment der Trägheit für den ganzen Stab, oder M, und es kommt darauf an, diese Summe zu en. Nimmt man die einzelnen Theile zusam- i so erhält man folgende Reihe, welche $z^2 M$ um viel genauer giebt, je größer n angenommen d

$$z^2 M$$

$$= M[na^2 + (\frac{1}{n}b)^2 + (\frac{2}{n}b)^2 + (\frac{3}{n}b)^2 + \ldots (\frac{n-1}{n}b)^2]$$

$$Ma^2 + M\frac{b^2}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2]$$

un ist nach bekannten Regeln, die Summe der adrate aller natürlichen Zahlen von 1 bis x

$$= \frac{1}{6} x (x+1) (2x+1)$$

er im vorliegenden Fall die Summe aller Qua- te in der Parenthese

$$= \frac{1}{6} (n-1) n (2n-1)$$

mmt man nun für n eine außerordentlich große hl an, wie es nach der vorhergehenden Berech- g erfordert wird, so kann man ohne Nachtheil Einheit mehr oder weniger bei der großen Zahl eglassen, und man erhält für die Summe der adrate

$$\frac{2n^3}{6} = \frac{1}{3} n^3 \text{ daher}$$

$$z^2 M = Ma^2 + M\frac{b^2}{n^3} \frac{1}{3} n^3$$

$$= Ma^2 + \frac{1}{3} Mb^2$$

...Trägheit einer dü...
...ange, deren Länge
... am Ende eines Heb...
...ite gesetzt wird) rec...
...nd die sich nach d...
...gt, findet man

$$\ldots + \tfrac{1}{3} b^2) M.$$

A P D X C

welche au...
bei der B...
latus) sch...
heit des ...
der Arm ...
Es s...
$=$ b, de...
ist sein ...
Masse $=$ ...
annehm...
in n gl...
seyn kö...
chen $=$ ...
und m...
dem e...
liegt
...
ferner ...
rech...
find...
zwe...
Ist...

... §.

...re die dünne Stange A...
...n ihrem Ende, sonde...
... beiden Enden bei D
...racht, daß CD auf A...
...nkricht stehet, so kann m...
... dem vorigen §. das M...
... AD und DB suchen, be...
... erhält man das Mom...
... ganzen Stange AB.
... Länge AB $=$ l, die Ent...
...D $=$ b, der senkrechte Qu...
..., so ist die Masse AD $=$ ...
... der Trägheit von AD

$$\ldots + \tfrac{1}{3} b^2) fb$$

...asse von DB $=$ f (l $-$ b) da...
... Trägheit von DB

$$\ldots + \tfrac{1}{3} (l-b)^2] f (l-b)$$

...mmen geben das Moment
... Stange AB

$$\ldots + [a^2 + \tfrac{1}{3} (l-b)^2] f (l-\ldots$$

$$\ldots + \tfrac{1}{3} l^2) fl.$$

...asse der ganzen Stange AB $=$ ...
...l, und man findet das M...
m...

ment der Trägheit für die Stange AB, welche nach der Seite schwingt

$$z^2 M = (a^2 + b^2 - bl + \tfrac{1}{3} l^2) M. \text{ *)}$$

67. §.

Ist die dünne prismatische Stange AB unmittelbar an der Umdrehungsaxe XY befestiget, so wird CD = a = o, der Punkt D in der vorhergehenden Figur fällt in C. und man findet für diesen Fall, wo die Stange unter einem rechten Winkel unmittelbar an der Axe befestiget ist und auf beiden Seiten der Axe über steht, das Moment der Trägheit

$$\text{I.} \quad z^2 M = (b^2 - bl + \tfrac{1}{3} l^2) M$$

Ist die Stange in ihrer Mitte befe-

*) Mittelst der Integralrechnung findet man die Ausdrücke der beiden vorhergehenden §.§. auf folgende Art. Es sei P ein willkührlicher Punkt in AB; AP = x und die Masse von AP = M' = fx, so ist das Differential derselben dM' = fdx, und das Moment der Trägheit eines solchen Elements in P = $PC^2\, dM' = [a^2 + (b-x)^2]\, f dx$, also das Integral oder Moment der Trägheit für die Masse von A bis P

$$\int PC^2\, dM' = f \int [a^2 dx + (b-x)^2 dx]$$
$$= f\,(a^2 x + b^2 x - bx^2 + \frac{x^3}{3})$$

wo keine Constante hinzukommt, weil für x = o das Moment der Trägheit verschwindet.

Für x = l erhält man das Moment der Trägheit für die ganze Stange AB

$$= fl\,(a^2 + b^2 - bl + \tfrac{1}{3} l^2)$$

und für b = o

$$= fl\,(a^2 + \tfrac{1}{3} l^2)$$

wie 65. §.

stiget, also AD = DB oder $b = \frac{1}{2}l$, so e
man, wenn $\frac{1}{2}l$ statt b gesetzt wird, das M
ment der Trägheit für diesen Fall.

$$\text{II.} \quad z^2 M = \frac{1}{12} l^2 M.$$

Hätte die Stange nur einen Arm
= b, so wäre DB = o also l = b; setzt ma
her in der ersten Gleichung dieses §. b statt
ist in diesem Falle das Moment der Trägh

$$\text{III.} \quad z^2 M = \frac{1}{3} b^2 M$$

wo M die jedesmalige Masse der bewegten St
bezeichnet.

68. §.

Schwingt eine dünne prisma
Stange nach der Fläche (in pl
welches der Fall ist, wenn sich die
derselben mit der Umdrehungsaxe i
nerlei Ebene befindet, so kann man
vorstellen, daß die grade Stange A
C mit der Umdrehungsaxe XY
dem Winkel ACX = α verbunden
Man setze die Länge der Stange
= l, ihre Masse = M und
AC in eine sehr große Anzahl gle
Theile = n, so ist die Länge jedes Theilchen =
und die Masse = $\frac{1}{n}$M. Für irgend ein T
chen in Q erhält man den Abstand PQ von
Umdrehungsaxe = CQ Sin α, daher das M
ment der Trägheit des ersten Theilchens

$$= (\frac{1}{n} l \text{ Sin } \alpha)^2 \frac{1}{n} M$$

des zweiten

$$(\frac{2}{n} l \text{ Sin } \alpha)^2 \frac{1}{n} M$$

des dritten

$$(\frac{3}{n} l \text{ Sin } \alpha)^2 \frac{1}{n} M$$

nd des nten oder letzten

$$= (\tfrac{n}{n} l \ \mathrm{Sin}\, \alpha)^2 . \tfrac{1}{n} M.$$

Die Summe dieser einzelnen Momente giebt as Moment der Trägheit der ganzen Stange AC

$$^2 M = \frac{l^2 \ \mathrm{Sin}\, \alpha^2 \ M}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots n^2]$$

der weil diese letzte Summe von den Quadraten er natürlichen Zahlen

$$= \tfrac{1}{6} n (n+1) (2n+1)$$

o erhält man bei einer außerordentlich großen Zahl , welche durch Hinzufügung einer Einheit wenig ermehrt oder vermindert wird, diese Summe

$$\tfrac{2}{6} n^3 = \tfrac{1}{3} n^3$$

daher ist für eine dünne prismatische Stange AC, welche unter einem Winkel α gegen die Umdrehungsaxe geneigt ist, das Moment der Trägheit

$$z^2 M = \tfrac{1}{3} l^2 \ \mathrm{Sin}\, \alpha^2 \ M$$

Für $\alpha = 90°$ wäre $z^2 M = \tfrac{1}{3} l^2 M$ wie 67. §. III.

69. §.

Wenn von der dünnen prismatischen Stange AC ein Theil BC, welcher der Umdrehungsaxe am nächsten ist, keine Masse hat, so setze man BC = a, AB = b, und die Masse der Stange AB = M. Wäre BC eine Stange von eben der Art, deren Masse = N wäre, so fände man das Moment der Trägheit von der ganzen Stange AC

$$= \tfrac{1}{3} (a+b)^2 \ \mathrm{Sin}\, \alpha^2 \ (N+M)$$

$$= \tfrac{1}{3} (a^2 + 2ab + b^2) \ \mathrm{Sin}\, \alpha^2 \ (N+M)$$

von dem Theil BC

$$= \tfrac{1}{3} a^2 \ \mathrm{Sin}\, \alpha^2 . N$$

das letztere von erstern abgezogen, giebt, wenn $= \frac{aM}{b}$ gesetzt wird, das Moment der Trä-heit für die Stange AB

$$z^2 M = (a^2 + ab + \tfrac{1}{3} b^2) \operatorname{Sin} \alpha^2 M \text{ *)}$$

Für $\alpha = 90°$ wird $\operatorname{Sin} \alpha = 1$ daher

$$z^2 M = (a^2 + ab + \tfrac{1}{3} b^2) M.$$

Anmerk. Es wäre noch übrig die Momente der Trä-heit für prismatische Stangen von ansehnlicher D-cke zu bestimmen, wenn man nicht annehmen ka-daß alle Punkte in ihren senkrechten Querschnit-gleich weit von der Umdrehungsaxe abstehen. vielen Fällen, wo nicht die äußerste Genauigkeit-fordert wird, können aber die obigen Bestimmun-hinreichen.

---

*) Die höhere Analysis lehrt dies Moment auf gende Art finden. Man setze die Länge $BQ = x$, dazu gehörige Masse $= M'$, den senkrechten Querschn der Stange $= f$, so ist $dM' = f dx$, und das Mom der Trägheit für eine solche unendlich kleine Masse in

$$PQ^2 dM' = (a + x)^2 \operatorname{Sin} \alpha^2 f dx \text{ also}$$

$$\int PQ^2 dM' = f \operatorname{Sin} \alpha^2 \int (a^2 dx + 2axdx + x^2 d$$

$$= f \operatorname{Sin} \alpha^2 (a^2 x + a x^2 + \frac{x^3}{3})$$

wo keine constante Größe hinzu kommt.

Für $x = b$ wird das Moment der Trägheit

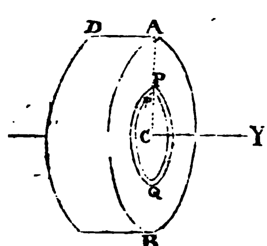
$$= (a^2 + ab + \tfrac{1}{3} b^2) \operatorname{Sin} \alpha^2 . fb$$

und für $a = 0$

$$= \tfrac{1}{3} b^2 \operatorname{Sin} \alpha^2 fb$$

wie 68. §.

70. §.



Das Moment der Trägheit einer Welle oder cylindrischen Scheibe, welche sich um ihre Axe dreht, kann man dadurch finden, daß man den Halbmesser $AC = r$ in eine sehr große Anzahl von n glei-
Theilen eintheilt, und durch diese Punkte con-
trische Kreise aus dem Mittelpunkt C beschreibt.
nun die Länge $AD = l$, so kann man das
oment der Trägheit für die einzelnen Massen
en, welche die Fläche zwischen zwei zunächst ge-
nen concentrischen Kreisen zur Grundfläche, und
Länge l zur Höhe haben, da denn die Summe
r dieser Momente, das Moment der Trägheit
ganzen Körpers giebt.

Für $CP = x$ ist der Umfang $PQP = 2\pi x$
wenn $Pp = \frac{1}{n} r$ ist, so erhält man für den
bmesser x den Flächenraum zwischen den beiden
chst bei P gelegenen concentrischen Kreisen =
$x . \frac{1}{n} r$ und den körperlichen Inhalt $= 2\pi x \frac{1}{n} rl$
das Moment der Trägheit dieser dünnen ring-
igen Masse

$$= x^2 . 2\pi x \frac{1}{n} rl = \frac{2\pi rl}{n} x^3$$

diese Art können sämmtliche Momente der
gheit bestimmt werden, welche man desto ge-
er findet, je größer die Zahl n angenommen
, oder je näher die concentrischen Kreise an-
nder kommen. Werden nun alle Momente
Trägheit vom Mittelpunkt C an, für jeden
bmesser $\frac{1}{n} r$, $\frac{2}{n} r$, $\frac{3}{n} r$, u. s. w. berechnet, so fin-
man

$$\frac{2\pi rl}{n}\left(\frac{1}{n}r\right)^3 + \frac{2\pi rl}{n}\left(\frac{2}{n}r\right)^3 + \frac{2\pi rl}{n}\left(\frac{3}{n}r\right)^3$$

$$+ \frac{2\pi rl}{n}\left(\frac{4}{n}r\right)^3 + \ldots . \frac{2\pi rl}{n}\left(\frac{n}{n}r\right)^3$$

$$= \frac{2\pi l r^4}{n^4}\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots . n^3\right)$$

Die Summe von den Würfeln der natürlichen Zahlen von 1 bis n, ist nach bekannten Regeln $= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$, oder für eine sehr große Zahl $n = \frac{1}{4} n^2 n^2 = \frac{1}{4} n^4$, daher ist das Moment der Trägheit eines Cylinders welcher sich um seine Axe dreht

$$z^2 M = \tfrac{1}{2} \pi l r^4$$

oder wenn die Masse des Cylinders $\pi r^2 l = M$ gesetzt wird

$$z^2 M = \tfrac{1}{2} r^2 M. \quad ^{*)}$$

71. §.

Das Moment der Trägheit eines hohlen Cylinders oder eines prismatischen ringförmigen Körpers welcher sich um seine Axe dreht, und dessen äußerer Halbmesser $= R$ und der innere $= r$ gesetzt wird, findet man, wenn zuvor das Moment der Trägheit für den vollen Cylinder ge-

---

*) Für $CP = x$ sei die Masse des dazu gehörigen Cylinders $PQ = \pi x^2 l = M'$, so ist $dM' = 2\pi l x dx$, und das Moment der Trägheit für dieses Element

$$x^2 dM' = x^2 . 2\pi l x dx \text{ daher}$$

$$\int x^2 dM' = 2\pi l \int x^3 dx = \tfrac{1}{2}\pi l x^4$$

wo keine Constante hinzu kommt.

Für $x = r$ wird

$$z^2 M = \tfrac{1}{2}\pi l r^4 = \tfrac{1}{2} r^2 M \text{ wie oben.}$$

gesucht, und davon das Moment des fehlenden abgezogen wird.

Das Moment der Trägheit für einen Cylinder von dem Halbmesser R ist

$$= \tfrac{1}{2}\pi l R^4$$

und für den Halbmesser r

$$= \tfrac{1}{2}\pi l r^4$$

daher das Moment der Trägheit des ausgehöhlten Cylinders oder

$$z^2 M = \tfrac{1}{2}\pi l\,(R^4 - r^4)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi l\,(R^2 - r^2)\,(R^2 + r^2)$$

Ist M die Masse des hohlen Cylinders, so wird $M = \pi l\,(R^2 - r^2)$ daher auch

$$z^2 M = \tfrac{1}{2}\,(R^2 + r^2)\,M.$$

Beispiel. Ein Läufer welcher 4000 Pfund wiegt, hat bei einem Durchmesser von 4 Fuß, ein 9 Zoll weites Läuferauge, man sucht sein Moment der Trägheit.

$$z^2 M = \tfrac{1}{2}\,(4 + \tfrac{9}{64})\,4000 = 8281\tfrac{1}{4}$$

Eben so lassen sich die Momente der Trägheit für die Felgen oder Kränze der Räder finden.

72. §.

Es wird nun leicht seyn, mit Hülfe der vorigen §.§. die Momente der Trägheit für verschiedene Körper so genau zu bestimmen, als es in der Ausübung verlangt wird, weshalb hier noch einige Fälle, bei welchen die Momente der Trägheit zu wissen nöthig sind, angeführt werden sollen.

A

V W

Über eine massive Rolle hängen Gewichte $V > W$, man soll die Bewegung des Gewichts V mit Rücksicht auf die Masse der Rolle und auf die Reibung bestimmen.

Die Masse der Rolle sei M, ihr Halbmesser $= r$, so ist ihr Moment der Trägheit $= \frac{1}{2} r^2 M$. Wird die Masse M auf den Halbmesser r reduzirt (63. §.), so erhält man die an r gleichgültige Masse

$$= \frac{\frac{1}{2} r^2 M}{r^2} = \frac{1}{2} M.$$

Wegen der Reibung am Bolzen der Rolle und zur Überwältigung der Steifigkeit der Seile sei am Halbmesser r eine Kraft F erforderlich, so ist die bewegende Kraft oder die Überwucht

$$= V - W - F;$$

die am Halbmesser r zu bewegende Masse, (wenn die Masse des Bolzens nicht in Rechnung kommt)

$$= V + W + \frac{1}{2} M$$

daher 34. §. die Beschleunigung des Gewichts

$$G = g \frac{V - W - F}{V + W + \frac{1}{2} M}$$

Wäre statt des Gewichts V eine Kraft V angebracht, deren Masse V′ ist, so wäre

$$G = g \frac{V - W - F}{V' + W + \frac{1}{2} M}$$

73. §.

Bei den Untersuchungen über die Frikzion der Körper unterscheidet man die Frikzion nach vorhergegangener Ruhe, oder im Anfange der Bewegung, von der Frikzion während der Bewegung, da letztere beträchtlich kleiner als erstere ist. Versuche über die Frikzion im Anfange der Be

ung lassen sich leicht anstellen, w.e solches aus er Statik bekannt ist. Soll aber die Frikzion n einem Zapfen während der Bewegung urch Versuche bestimmt werden, so kann solches nit Hülfe des vorstehenden §. geschehen.

Mit Beibehaltung der eingeführten Bezeichnung, sei

m das Gewicht des Bolzens oder Zapfens, an welchem die Rolle oder Scheibe befestiget ist,

r der Halbmesser der Scheibe, und

ϱ der Halbmesser des Zapfens, an dessen Umfang die Frikzion F gesucht wird,

so ist die Beschleunigung des Gewichts V

$$G = g \frac{V - W - F}{V + W + \frac{1}{2} M + \frac{\frac{1}{2} \varrho^2 m}{r^2}}$$

Wenn ferner aus Beobachtungen der Raum s bekannt ist, welcher in der Zeit t von dem Gewichte V durchlaufen worden, so erhält man (35. §. I.)

$$G = \frac{s}{t^2}$$

Nun ist ferner mit Beiseitesetzung der Steifigkeit der Schnur

$$F = \frac{f \varrho}{r}$$

und wenn

μ der Bruch ist, welcher das Verhältniß der Frikzion zum Druck bezeichnet, so ist

$$f = \mu (V + W + M + m)$$

daher

$$\frac{s}{t^2} = g \frac{V - W - \mu \frac{\varrho}{r} (V + W + M + m)}{V + W + \frac{1}{2} M + \frac{\frac{1}{2} \varrho^2 m}{r^2}}$$

und hieraus das Verhältniß der Frikzi zum Druck während der Bewegung oder

$$\mu = \frac{V - W - \frac{s}{gt^2}\left(V + W + \frac{1}{2}M + \frac{\frac{1}{2}\rho^2 m}{r^2}\right)}{\frac{\rho}{r}(V + W + M + m)}$$

Wird allein die Frikzion am Zapfen g sucht, so ist

$$f = \frac{r}{\rho}\left[V - W - \frac{s}{gt^2}\left(V + W + \frac{1}{2}M + \frac{\frac{1}{2}\rho^2 m}{r^2}\right.\right.$$

Wäre die Rolle durchbohrt und der Zapf unbeweglich, so ist nahe genug

$$f = \frac{r}{\rho}\left[V - W - \frac{s}{gt^2}\left(V + W + \frac{1}{2}M\right)\right].$$

74. §.

Hängt die Last W nicht frei herab, sonde liegt auf einer horizontalen Ebene und wird m telst des Gewichts V längs dieser Ebene fortge gen, so kann die Frage entstehen, wie groß d von W herrührende Frikzion während der Bew gung ist. Man setze daß F diese Frikzion, und die auf den Umfang der Rolle reduzirte Frikzi zwischen dem Bolzen und der Rolle, nebst der St figkeit der Seile bezeichne, die hier als bekannt a gesehen werden kann, so ist

$$G = g\,\frac{V - F' - F}{V + W + \frac{1}{2}M} \text{ oder}$$

$$F = V - F' - \frac{G}{g}\left(V + W + \tfrac{1}{2}M\right)$$

daher die von der Last W entstehende Frikzi auf einer horizontalen Ebene, oder

$$F = V - F' - \frac{s}{gt^2}\left(V + W + \tfrac{1}{2}M\right)$$

Beispiel. Bei einem Versuche mit Eichenholz sei $V = 160$; $W = 1647$; $F' = 10$; $M = 14$ ℔; $s = 4$ F

und t = 17 Sekunden, so ist die Frikzion

$$F = 160 - 10 - \frac{4}{15\frac{5}{8} \cdot 17^2}(160 + 1647 + 7) = 148{,}4$$

also das Verhältniß der Frikzion zum Druck, oder

$$\mu = \frac{F}{W} = \frac{148{,}4}{1647} = 0{,}0901.$$

75. §.

Mittelst zweier Rollen A, B und eines in C befestigten Seils, soll eine Last W durch eine Kraft V, deren Masse V' ist, bewegt werden; es ist $V > \frac{1}{2} W$, man sucht die Beschlennigung des Gewichts V.

Das Gewicht der beweglichen Rolle A und der ganzen Zurüstung durch welche die Last W mit ihr verbunden ist, sei N, das Gewicht der Scheibe bei B = M, so wird es hier dienlich seyn, bei Bestimmung der Momente der Trägheit, die Quadrate der Geschwindigkeit in Rechnung zu bringen, mit welchen die Massen bewegt werden (61. §.). Ist für irgend einen Zeitpunkt die Geschwindigkeit der Masse V' = c, so ist ihr Moment der Trägheit = $c^2 V'$. Das Ende des Halbmessers der Rolle B hat die Geschwindigkeit c, daher ist das Moment der Trägheit dieser Rolle = $\frac{1}{2} c^2 M$. Die Massen W + N erhalten die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}$ c, also ist ihr Moment der Trägheit $\frac{1}{4} c^2 (W + N)$. Reducirt man nun sämmtliche Massen auf die Geschwindigkeit c des Gewichts V', so ist die gesammte reducirte Masse =

$$\frac{c^2 V' + \frac{1}{2} c^2 M + \frac{1}{4} c^2 (W + N)}{c^2} = V' + \frac{1}{2} M + \frac{1}{4}(W + N)$$

Zur Überwältigung der Reibung an den Rollen und wegen der Steifigkeit der Seile, werde in D eine Kraft F erfordert, so erhält man die bewegende Kraft oder die Überwucht

$$V - \frac{1}{2}(W + N) - F$$

und hieraus das Verhältniß der Frikzion zum Druck während der Bewegung oder

$$\mu = \frac{V - W - \frac{s}{gt^2}(V + W + \frac{1}{2}M + \frac{\frac{1}{2}\varrho^2 m}{r^2})}{\frac{\varrho}{r}(V + W + M + m)}$$

Wird allein die Frikzion am Zapfen gesucht, so ist

$$f = \frac{r}{\varrho}\left[V - W - \frac{s}{gt^2}(V + W + \tfrac{1}{2}M + \frac{\frac{1}{2}\varrho^2 m}{r^2})\right]$$

Wäre die Rolle durchbohrt und der Zapfen unbeweglich, so ist nahe genug

$$f = \frac{r}{\varrho}\left[V - W - \frac{s}{gt^2}(V + W + \tfrac{1}{2}M)\right].$$

74. §.

Hängt die Last W nicht frei herab, sondern liegt auf einer horizontalen Ebene und wird mittelst des Gewichts V längs dieser Ebene fortgezogen, so kann die Frage entstehen, wie groß die von W herrührende Frikzion während der Bewegung ist. Man setze daß F diese Frikzion, und F' die auf den Umfang der Rolle reduzirte Frikzion zwischen dem Bolzen und der Rolle, nebst der Steifigkeit der Seile bezeichne, die hier als bekannt angesehen werden kann, so ist

$$G = g\,\frac{V - F' - F}{V + W + \frac{1}{2}M} \text{ oder}$$

$$F = V - F' - \frac{G}{g}(V + W + \tfrac{1}{2}M)$$

daher die von der Last W entstehende Frikzion auf einer horizontalen Ebene, oder

$$F = V - F' - \frac{s}{gt^2}(V + W + \tfrac{1}{2}M)$$

Beispiel. Bei einem Versuche mit Eichenholz sei $V = 160$; $W = 1647$; $F' = 10$; $M = 14$ ℔; $s = 4$ Fuß

und $t = 17$ Sekunden, so ist die Frikzion

$$F = 160 - 10 - \frac{4}{15\frac{5}{8} \cdot 17^2}(160 + 1647 + 7) = 148{,}4$$

also das Verhältniß der Frikzion zum Druck, oder

$$\mu = \frac{F}{W} = \frac{148{,}4}{1647} = 0{,}0901.$$

75. §.

Mittelst zweier Rollen A, B und eines in C befestigten Seils, soll eine Last W durch eine Kraft V, deren Masse V′ ist, bewegt werden; es ist $V > \frac{1}{2}W$, man sucht die Beschleunigung des Gewichts V.

Das Gewicht der beweglichen Rolle A und der ganzen Zurüstung durch welche die Last W mit ihr verbunden ist, sei N, das Gewicht der Scheibe bei B = M, so wird es hier dienlich seyn, bei Bestimmung der Momente der Trägheit, die Quadrate der Geschwindigkeit in Rechnung zu bringen, mit welchen die Massen bewegt werden (61. §.). Ist für irgend einen Zeitpunkt die Geschwindigkeit der Masse $V' = c$, so ist ihr Moment der Trägheit $= c^2 V'$. Das Ende des Halbmessers der Rolle B hat die Geschwindigkeit c, daher ist das Moment der Trägheit dieser Rolle $= \frac{1}{2} c^2 M$. Die Massen $W + N$ erhalten die Geschwindigkeit $\frac{1}{2} c$, also ist ihr Moment der Trägheit $\frac{1}{4} c^2 (W + N)$. Reducirt man nun sämmtliche Massen auf die Geschwindigkeit c des Gewichts V′, so ist die gesammte reducirte Masse =

$$\frac{c^2 V' + \frac{1}{2} c^2 M + \frac{1}{4} c^2 (W + N)}{c^2} = V' + \frac{1}{2} M + \frac{1}{4}(W + N)$$

Zur Überwältigung der Reibung an den Rollen und wegen der Steifigkeit der Seile, werde in D eine Kraft F erfordert, so erhält man die bewegende Kraft oder die Überwucht

$$V - \frac{1}{2}(W + N) - F$$

daher die Beschleunigung des Gewichts V oder

$$G = g \frac{V - \frac{1}{2}(W+N) - F}{V' + \frac{1}{2}M + \frac{1}{4}(W+N)}$$

76. §.

An einer Welle befinden sich zw Räder AD, BE. Am ersten Rä dessen Halbmesser AC = a ist, wir eine Kraft V, deren Masse V' ist; a andern Rade, dessen Halbmesser BC = hängt die Last W, und es ist $aV > bW$ man sucht die Beschleunigung der Masse V'.

Das Moment der Trägheit von der Wel und beiden Rädern sei $= z^2 M$, so findet man wenn sämmtliche Massen auf den Halbmesser reducirt werden, die Summe derselben

$$\frac{a^2 V' + b^2 W + z^2 M}{a^2} = V' + \frac{b^2}{a^2} W + \frac{z^2}{a^2} M.$$

Die bewegende Kraft oder die Überwucht ist

$$= V' - \frac{b}{a} W - F$$

wenn F die auf den Punkt A statisch reduzirte Reibung ist; daher findet man die Beschleunigung der Masse V'

$$G = g \frac{V - \frac{b}{a} W - F}{V' + \frac{b^2}{a^2} W + \frac{z^2}{a^2} M}$$

$$= g a \frac{a(V - F) - bW}{a^2 V' + b^2 W + z^2 M}$$

Die Beschleunigug der Last W sei G', so verhält sich

$$G : G' = a : b$$

dies giebt $G = \frac{a}{b} G'$ daher

$$G' = gb \frac{a(V - F) - bW}{a^2 V' + b^2 W + z^2 M}$$

77. §.

Die Einrichtung des Rades an der Welle, und die Bewegung dieser ganzen Maschine, ist unter übrigens gleichen Umständen vortheilhafter, je größer die Beschleunigung der zu hebenden Last W ist. Bleibt alles übrige unverändert, und man vergrößert oder verkleinert den Halbmesser a des Rades, so wird dadurch die Beschleunigung der Last G' verändert, und es giebt einen Werth für a, bei welchem diese Beschleunigung am größten wird, vorausgesetzt, daß durch diese Veränderung das Moment der Trägheit des Rades und der Welle nicht merklich geändert werde.

Für die größte Beschleunigung der Last, ist der Halbmesser des Rades

$$a = \frac{bW}{V-F} + \sqrt{\left[\frac{b^2W^2}{(V-F)^2} + \frac{b^2W + z^2M}{V'}\right]} \quad ^{*)}.$$

---

*) Nimmt man (74. §.) $a = x$ veränderlich und setzt

$x(V-F) - bW = X$ und

$x^2V' + b^2W + z^2M = Y$ so ist

$dX = (V-F)\,dx$ und

$dY = 2xV'dx.$

Nun soll $\frac{Y}{X}$ ein Maximum werden, dies giebt

$$d\left[\frac{Y}{X}\right] = \frac{XdY - YdX}{Y^2} = 0 \text{ also}$$

$XdY - YdX = 0$, oder

$$(x^2V' + b^2W + z^2M)(V-F) - [x(V-F) - bW]\,2xV' = 0$$

oder $x^2 - 2x\frac{bW}{V-F} - \frac{b^2W + z^2M}{V'} = 0$ daher

$$x = \frac{bW}{V-F} \pm \sqrt{\left[\frac{b^2W^2}{(V-F)^2} + \frac{b^2W + z^2M}{V'}\right]}.$$

wo hier das positive Zeichen vor der Wurzel genommen wird, weil nach der entgegengesetzten Lage des Halbmessers nicht gefragt wird, um daselbst die Kraft anzu-

Beispiel. Es sei V = V′ = 10; F = 2; W = ... $z^2 M = 70$; b = 1; so findet man den vorth... haftesten Halbmesser des Rades, für die größte ... schleunigung der Last W

$$a = \frac{1.\ 40}{10-2} + \sqrt{\left[\frac{1600}{8.\ 8} + \frac{40+70}{10}\right]} = 1$$

Für diesen Fall ist nach 76. §. die Beschleunig... der Last

$$G' = 0{,}03636.\ g.$$

Wenn a = 10, so ist

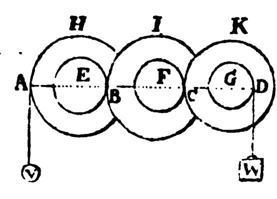
$$G' = 0{,}03603.\ g$$

und für a = 12

$$G' = 0{,}03612.\ g$$

also in beiden Fällen kleiner.

78. §.



An einem Räderwe... befinde sich am ersten R... in A die Kraft V, de... Masse V′ ist, und am l... ten in D die Last W; m... sucht die Beschleunigung ... Masse V′ wenn die Kraft V die Last überwieg...

Man setze die Halbmesser der Räder

AE = a, BF = b, CG = c

die Halbmesser der Getriebe

EB = α, FC = β, GD = γ

die Momente der Trägheit von der ersten W...

---

bringen. Noch ist zu bemerken, daß in den Fällen ... V′ = 0 ist, das Moment der Trägheit $z^2 M$ ebenf... als eine veränderliche Größe behandelt werden muß, ... sonst für V′ = 0, x = ∞ wird.

nd dem daran befindlichen Rade und Getriebe
I, E . . . . $= n^2 N$
om zweiten I, F . . . . . . $= m^2 M$
em letzten K, G . . . . . . $= r^2 R$
) sind wiederum sämmtliche Massen auf den
Punkt A am Halbmesser a zu reduciren.

Für die ersten Räder H, E und ihre Welle
at man das Moment der Trägheit $n^2 N$, dieses
uf den Punkt A gebracht giebt . . $\frac{n^2}{a^2} N$

Für die Räder I, F ist das Moment der
Trägheit . . . . $= m^2 M$
dieses auf den Punkt B reduzirt giebt $\frac{m^2}{b^2} M$, also
as Moment der Trägheit für den Halbmesser
B $= \alpha^2 \frac{m^2}{b^2} M$, und auf den Punkt A redu-
irt . . . . $\frac{\alpha^2 m^2}{a^2 b^2} M$

Die Masse der letzten Räder K, G wird eben
o auf A reduzirt, und man erhält auf eine ähn-
liche Art . . . . $\frac{\alpha^2 \beta^2 r^2}{a^2 b^2 c^2} R$

Dasselbe gilt von der Last W am Halb-
messer γ . . . . $\frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{a^2 b^2 c^2} W$

Die Summe aller auf den Punkt A reduzir-
ten Massen ist daher =

$$V' + \frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{a^2 b^2 c^2} W + \frac{n^2}{a^2} N + \frac{\alpha^2 m^2}{a^2 b^2} M + \frac{\alpha^2 \beta^2 r^2}{a^2 b^2 c^2} R$$

Die zur Überwältigung der gesammten Reibung
in A erforderliche Kraft sei F, so findet man die
bewegende Kraft

$$= V - \frac{\alpha \beta \gamma}{a b c} W - F$$

und hieraus die Beschleunigung des Gewichts V oder

$$G = g \frac{V - \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} W - F}{V' + \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{a^2b^2c^2} W + \frac{n^2}{a^2} N + \frac{\alpha^2 m^2}{a^2 b^2} M + \frac{\alpha^2\beta^2 r^2}{a^2b^2c^2} R}$$

$$= g \frac{abc\,[abc\,(V - F) - \alpha\beta\gamma W]}{a^2b^2c^2V' + \alpha^2\beta^2\gamma^2 W + b^2c^2n^2 N + c^2\alpha^2m^2 M + \alpha^2\beta^2r^2 R}$$

Wenn G' die Beschleunigung der Last W ist, so verhält sich

$$G : G' = abc : \alpha\beta\gamma$$

also ist

$$G' = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} G \quad \text{daher}$$

die Beschleunigung der Last

$$G' = g \frac{\alpha\beta\gamma\,[abc\,(V - F) - \alpha\beta\gamma W]}{a^2b^2c^2V' + \alpha^2\beta^2\gamma^2 W + b^2c^2n^2 N + c^2\alpha^2m^2 M + \alpha^2\beta^2r^2 R}$$

79. §.

Damit bei dem angenommenen Räderwerke die Beschleunigung der Last am größten werde, wird erfordert, daß unter übrigens gleichen Umständen der Halbmesser a einen solchen Werth erhalte, welcher diese Bedingung erfüllt. Man setze

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 W + b^2c^2n^2 N + c^2\alpha^2m^2 M + \alpha^2\beta^2r^2 R = D$$

so ist für die größte Beschleunigung der Last, der Halbmesser des ersten Rades

$$a = \frac{\alpha\beta\gamma W}{bc(V - F)} + \sqrt{\left[\left(\frac{\alpha\beta\gamma W}{bc(V - F)}\right)^2 + \frac{D}{b^2c^2V'}\right]}$$

setzt man diesen Ausdruck statt a in G' so findet man die größte Beschleunigung der Last

$G' =$

$$= \frac{g(V-F)}{\frac{W}{V-F} + 2V' \sqrt{\left[\frac{W^2}{(V-F)^2} + \frac{W}{V'} + \frac{b^2c^2n^2N}{\alpha^2\beta^2\gamma^2V'} + \frac{c^2m^2M}{\beta^2\gamma^2V'} + \frac{r^2R}{\gamma^2V'}\right]}}$$ *)

*) Diese etwas weitläuftige Rechnung zu verrichten, se man

$a = x$

$\alpha\beta\gamma bc\,(V-F) = A$

$\alpha^2\beta^2\gamma^2 W = B$

$b^2c^2V' = C$ und D wie oben, so ist

$$G' = g\,\frac{xA - B}{x^2C + D}$$

o auf eine ähnliche Art wie 77. §. für das Maximum n G'

$$x^2 - 2x\frac{B}{A} - \frac{D}{C} = 0 \text{ oder}$$

$$x = \frac{B}{A} \pm \sqrt{\left[\frac{B^2}{A^2} + \frac{D}{C}\right]}$$

o der positive Werth der Wurzel gilt, weil hier nicht e entgegengesetzte Lage von x genommen wird. Hier-us erhält man ferner, wenn

$$\frac{B^2}{A^2} + \frac{D}{C} = E^2$$

setzt wird

$$x^2 = \frac{B^2}{A^2} + \frac{2BE}{A} + E^2 = \frac{2BE}{A} + \frac{2B^2}{A^2} + \frac{D}{C}$$

Die für x und x^2 gefundenen Werthe in die Glei-ung von G' gesetzt, giebt

$$= \frac{gAE}{\frac{2BCE}{A} + \frac{2B^2C}{A^2} + 2D} = \frac{gA}{\frac{2BC}{A} + \frac{2C}{E}\left[\frac{B^2}{A^2} + \frac{D}{C}\right]}$$

$$= \frac{gA}{\frac{2BC}{A} + 2CE}$$ weil $\frac{B^2}{A^2} + \frac{D}{C} = E^2$ ist.

Beispiel. Es sei $V = V' = 12$; $F = 4$; $W = 36$; $n^2 N = m^2 M = r^2 R = 10$; $\alpha = \beta = \gamma = 1$; $b = 3$; $c = 2$; so ist der vortheilhafteste Halbmesser des ersten Rades für die größte Beschleunigung der Last W

$$a = \frac{36}{2.3.8} + \sqrt{\left[\left(\frac{36}{2.3.8}\right)^2 + \frac{446}{4.9.12}\right]} = 2{,}013.$$

Für diesen Halbmesser ist, wenn man nach dem zuletzt für G' gefundenen Ausdruck rechnet, die größte Beschleunigung der Last W

$$G' = 0{,}0276 \,.\, g$$

welches man auch erhält, wenn 78. §. $a = 2{,}013$ gesetzt wird.

Wenn $a = 2$, so ist

$$G' = 0{,}0275 \,.\, g$$

und für $a = 3$

$$G' = 0{,}0249 \,.\, g.$$

80. §.

Es läßt sich leicht einsehen, wie man die Werthe von G' und a bei einem noch mehr zusammengesetzten Räderwerk findet, weil das Gesetz zur Bestimmung dieser Werthe deutlich vor Augen liegt.

Auch folgt aus der Betrachtung des zuletzt gefundenen Ausdrucks für G', daß der Nenner desto kleiner wird, wenn die Anzahl der Räder, woraus die Maschine bestehet, abnimmt,

---

Setzt man für A, B, C, E die zugehörigen Werthe, und dividirt Zähler und Nenner durch $\alpha\beta\gamma bc$, so wird nach gehöriger Abkürzung

$$G' = \frac{g\,(V - F)}{\frac{2V'W}{V-F} + 2V'\sqrt{\left[\frac{W^2}{(V-F)^2} + \frac{W}{V'} + \frac{b^2c^2n^2N}{\alpha^2\beta^2\gamma^2V'} + \frac{c^2m^2M}{\beta^2\gamma^2V'} + \frac{r^2R}{\gamma^2V'}\right]}}.$$

h. an einem Räderwerke kann die Be-
chleunigung der Last dadurch vermehrt
erden, daß unter übrigens gleichen Um-
änden, die Anzahl der Räder vermin-
ert wird.

Außer dem vierten Bande von Karstens Lehr-
egriff und den angeführten Kästner- und Langs-
orfschen Schriften, findet man mehrere hieher ge-
örige Untersuchungen in

J. Pasquich, Versuch eines Beitrags zur allgemeinen Theorie von der Bewegung und vortheilhaftesten Einrichtung der Maschinen. Leipzig 1789.

Achtes Kapitel.

Vom Pendel.

81. §.

Ein schwerer Körper werde mittelst eines Fadens oder einer Stange so aufgehangen, daß er sich hin und her schwingen kann, so heißt diese Einrichtung ein **Pendel** (Pendulum).

Wird der Körper als ein schwerer Punkt betrachtet, und dem Faden kein Gewicht zugeschrieben, so entstehet ein **einfaches**, sonst aber ein **zusammengesetztes Pendel**.

Erhebt man das Pendel, so daß es sich in einer vertikalen Ebene hin und her schwingt, so nennt man einen Hin- oder Rückgang einen **Schwung** oder **Pendelschlag** (Oscillatio), und die Abweichung des Fadens von der Vertikale bei der Erhebung, den **Elongationswinkel**.

82. §.

Das vertikal hängende Pendel CA werde bis B erhoben, so fällt es im Bogen BA vermöge seiner Schwere herunter. Durch den Fall hat es aber eine Geschwindigkeit in A erlangt welche der Höhe EA zugehört, weshalb es, wenn seiner Bewegung keine Hindernisse entgegen stehen, wieder durch den Bogen AD = AB in die Höhe steigen muß (57. §.) Der Elongationswinkel ACB ist alsdenn = ACD, und das

Pendel muß fortwährend in gleichen Zeiten einen Schwung durch den Bogen BAD oder DAB verrichten.

83 §.

Für das einfache Pendel findet man die Zeit t eines kleinen Schwunges, wenn der Elongationswinkel nicht über 15 Grad groß ist, und die Länge des Pendels = l gesetzt wird,

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \sqrt{l} \quad *)$$

wo $\pi = 3,14..$ und g die Fallhöhe in der ersten Sekunde ist.

Hienach verhalten sich bei verschiedenen Pendeln die Schwungzeiten wie die Quadrat-

*) Der Beweis dieses Ausdrucks, läßt sich, mit hinlänglicher Schärfe, nur durch höhere Analysis geben. Man setze die Länge des Pendels CA = l, und wenn dasselbe bis B erhoben wird, die dazu gehörige Höhe AE = b. Fällt nun das Pendel durch den Bogen BM = s in der Zeit t', und es ist die zum Punkt M gehörige Höhe AP = x, so findet man die in M erlangte Geschwindigkeit c', welche das Pendel durch den Fall im Bogen BM erhalten hat (57. §.)

$$c' = 2\sqrt{g.EP} = 2\sqrt{[g(b-x)]}$$

In der nächstfolgenden unendlich kleinen Zeit dt' werde der Bogen Mm = ds durchlaufen, so ist (5. §.), weil man in dieser kleinen Zeit die Bewegung als gleichförmig ansehen kann,

$$dt' = \frac{ds}{c'} = \frac{ds}{2\sqrt{[g(b-x)]}}$$

Nun ist nach den Gründen der Differentialrechnung, weil $PM = \sqrt{(2lx - x^2)}$

$$ds = \frac{l\,dx}{\sqrt{(2lx - xx)}}$$

Achtes Kapitel.

Vom Pendel.

81. §.

Ein schwerer Körper werde mittelst eines Fadens oder einer Stange so aufgehangen, daß er sich hin und her schwingen kann, so heißt diese Einrichtung ein Pendel (Pendulum).

Wird der Körper als ein schwerer Punkt betrachtet, und dem Faden kein Gewicht zugeschrieben, so entstehet ein einfaches, sonst aber ein zusammengesetztes Pendel.

Erhebt man das Pendel, so daß es sich in einer vertikalen Ebene hin und her schwingt, so nennt man einen Hin- oder Rückgang einen Schwung oder Pendelschlag (Oscillatio), und die Abweichung des Fadens von der Vertikale bei der Erhebung, den Elongationswinkel.

82. §.

Das vertikal hängende Pendel CA werde bis B erhoben, so fällt es im Bogen BA vermöge seiner Schwere herunter. Durch den Fall hat es aber eine Geschwindigkeit in A erlangt welche der Höhe EA zugehört, weshalb es, wenn seiner Bewegung keine Hindernisse entgegen stehen, wieder durch den Bogen AD = AB in die Höhe steigen muß (57. §.) Der Elongationswinkel ACB ist alsdenn = ACD, und

Pendel muß fortwährend in gleichen Zeiten einen Schwung durch den Bogen BAD oder DAB verrichten.

83 §.

Für das einfache Pendel findet man die Zeit t eines kleinen Schwunges, wenn der Elongationswinkel nicht über 15 Grad groß ist, und die Länge des Pendels $= l$ gesetzt wird,

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \sqrt{l} \quad ^{*)}$$

wo $\pi = 3{,}14..$ und g die Fallhöhe in der ersten Sekunde ist.

Hienach verhalten sich bei verschiedenen Pendeln die Schwungzeiten wie die Quadrat-

---

*) Der Beweis dieses Ausdrucks, läßt sich, mit hinlänglicher Schärfe, nur durch höhere Analysis geben. Man setze die Länge des Pendels $CA = l$, und wenn dasselbe bis B erhoben wird, die dazu gehörige Höhe $AE = b$. Fällt nun das Pendel durch den Bogen $BM = s$ in der Zeit t', und es ist die zum Punkt M gehörige Höhe $AP = x$, so findet man die in M erlangte Geschwindigkeit c', welche das Pendel durch den Fall im Bogen BM erhalten hat (57. §.)

$$c' = 2\sqrt{g.\overline{LP}} = 2\sqrt{[g(b-x)]}$$

In der nächstfolgenden unendlich kleinen Zeit dt' werde der Bogen $Mm = ds$ durchlaufen, so ist (5. §.), weil man in dieser kleinen Zeit die Bewegung als gleichförmig ansehen kann,

$$dt' = \frac{ds}{c'} = \frac{ds}{2\sqrt{[g(b-x)]}}$$

Nun ist nach den Gründen der Differentialrechnung, weil $PM = \sqrt{(2lx - x^2)}$

$$ds = \frac{l\,dx}{\sqrt{(2lx - xx)}}$$

wurzeln aus den Pendellängen. Ein 4mal so langes Pendel braucht also doppelt so viel Zeit einen Schwung zu vollbringen, als das einfache.

Wenn ein Körper frei von der Höhe $\frac{1}{2}l$ fällt, so ist die Fallzeit $t' = \sqrt{\frac{l}{2g}}$ (17. §.) daher verhält sich

$$t : t' = \pi : 1$$

---

setzt man daher diesen Ausdruck in obigen statt ds, so wird

$$dt' = \frac{l\,dx}{2\sqrt{[g(b-x)]}\,\sqrt{(2lx-xx)}} \text{ daher}$$

$$t' = \frac{l}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(b-x)}\,\sqrt{(2lx-xx)}}$$

Nach Karsten's Anfangsgründe der mathematischen Analysis, Greifswalde 1786, 90. §. findet man dieses Integral für den Fall daß es für $x = 0$ verschwindet, und alsdenn $x = b$, also der halbe Bogen BA in der Zeit t' durchlaufen wird, wenn man den Druckfehler S. 153 Z. 5 nach S. 151 Z. 14 verbessert, und $c = 2l$ setzt:

$$t' = \frac{1}{2}\frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{b}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{b}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{b}{2l}\right)^3 + \dots\right]$$

Wird nun der ganze Bogen BAD in der Zeit t durchlaufen, so ist die Zeit eines Schwunges $t = 2t'$ oder

$$t = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left[1 + \frac{1}{8}\frac{b}{l} + \frac{9}{256}\frac{b^2}{l^2} + \dots\right]$$

und je kleiner b gegen l wird, desto sicherer kann man das dritte und die folgenden Glieder weglassen, daher ist

$$t = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left(1 + \frac{b}{8l}\right)$$

Setzt man den Elongationswinkel $ACB = \alpha$, so ist $\frac{b}{l} = 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\alpha^2$ also $\frac{b}{8l} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\alpha^2$. Für $\alpha = 16$ Grad ist daher $\frac{b}{8l} = \frac{1}{4}(\mathrm{Sin}\,8°)^2 = 0{,}00484\dots$ man

d. h. die Zeit eines Schwunges, verhält sich zur Zeit, darin ein Körper von der halben Pendellänge frei herunter fällt, wie ~~1 zu~~ 3,14159.... zu 1

84. §.

Ein Pendel, welches in jeder Sekunde einen Schwung verrichtet, heißt ein Sekundenpendel. Für das einfache Sekundenpendel ist daher die Zeit eines Schlags, t = 1 Sekunde, also

$$1 = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \sqrt{l} \quad \text{oder}$$

$$l = \frac{2g}{\pi^2}$$

und wenn die Länge des einfachen Sekundenpendels aus Beobachtungen genau bekannt ist, so giebt dies ein Mittel ab, daraus die Fallhöhe g genau zu bestimmen, weil man leicht einsieht, daß es nicht wohl möglich ist, diese Höhe nur erträglich genau, aus unmittelbaren Beobachtungen über den freien Fall der Körper auszumitteln.

Aus der bekannten Länge des Sekundenpendels findet man die Fallhöhe eines Körpers in der ersten Sekunde

$$g = \tfrac{1}{2} \pi^2 l.$$

Die Länge des Sekundenpendels ist aber nicht auf der ganzen Erdfläche einerlei, sondern sie wird größer gegen die Pole und kleiner gegen den Äqua-

---

kann daher, wenn der Elongationswinkel nicht größer als 15 bis 16 Grad ist,

$$t = \frac{\pi \sqrt{l}}{\sqrt{2g}}$$

setzen. Auch sieht man, daß in diesem Falle die Zeit des Schwunges dieselbe bleibt, wenn man den Elongationswinkel auch noch kleiner nimmt.

wurzeln aus den Pendellängen. Ein 4mal so langes Pendel braucht also doppelt so viel Zeit einen Schwung zu vollbringen, als das einfache.

Wenn ein Körper frei von der Höhe $\frac{1}{2}l$ fällt, so ist die Fallzeit $t' = \sqrt{\frac{l}{2g}}$ (17. §.) daher verhält sich

$$t : t' = \pi : 1$$

---

setzt man daher diesen Ausdruck in obigen statt ds, so wird

$$dt' = \frac{l\,dx}{2\sqrt{[g(b-x)]}\ \sqrt{(2lx-xx)}} \text{ daher}$$

$$t' = \frac{l}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(b-x)}\ \sqrt{(2lx-xx)}}$$

Nach Karsten's Anfangsgründe der mathematischen Analysis, Greifswalde 1786, 90. §. findet man dieses Integral für den Fall daß es für $x = 0$ verschwindet, und alsdenn $x = b$, also der halbe Bogen BA in der Zeit t' durchlaufen wird, wenn man den Druckfehler S. 153 Z. 5 nach S. 151 Z. 14 verbessert, und $c = 2l$ setzt:

$$t' = \frac{1}{2}\frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left[1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \frac{b}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2l}\right)^3 + \ldots\right]$$

Wird nun der ganze Bogen BAD in der Zeit t durchlaufen, so ist die Zeit eines Schwunges $t = 2t'$ oder

$$t = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left[1 + \tfrac{1}{8}\frac{b}{l} + \tfrac{9}{256}\frac{b^2}{l^2} + \ldots\right]$$

und je kleiner b gegen l wird, desto sicherer kann man das dritte und die folgenden Glieder weglassen, daher ist

$$t = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left(1 + \frac{b}{8l}\right)$$

Setzt man den Elongationswinkel $ACB = \alpha$, so ist $\frac{b}{l} = 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\alpha^2$ also $\frac{b}{8l} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\alpha^2$. Für $\alpha = 16$ Grad ist daher $\frac{b}{8l} = \frac{1}{4}(\mathrm{Sin}\,8^\circ)^2 = 0{,}00484\ldots$ man

d. h. die Zeit eines Schwunges, verhält sich zur Zeit, darin ein Körper von der halben Pendellänge frei herunter fällt, wie 3,14159....

84. §.

Ein Pendel, welches in jeder Sekunde einen Schwung verrichtet, heißt ein **Sekundenpendel**. Für das einfache Sekundenpendel ist daher die Zeit eines Schlags, $t = 1$ Sekunde, also

$$1 = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \sqrt{l} \text{ oder}$$

$$l = \frac{2g}{\pi^2}$$

und wenn die Länge des einfachen Sekundenpendels aus Beobachtungen genau bekannt ist, so giebt dies ein Mittel ab, daraus die Fallhöhe g genau zu bestimmen, weil man leicht einsieht, daß es nicht wohl möglich ist, diese Höhe nur erträglich genau, aus unmittelbaren Beobachtungen über den freien Fall der Körper auszumitteln.

Aus der bekannten Länge des Sekundenpendels findet man die Fallhöhe eines Körpers in der ersten Sekunde

$$g = \tfrac{1}{2} \pi^2 l.$$

Die Länge des Sekundenpendels ist aber nicht auf der ganzen Erdfläche einerlei, sondern sie wird größer gegen die Pole und kleiner gegen den Äqua-

---

kann daher, wenn der Elongationswinkel nicht größer als 15 bis 16 Grad ist,

$$t = \frac{\pi \sqrt{l}}{\sqrt{2g}}$$

setzen. Auch sieht man, daß in diesem Falle die Zeit des Schwunges dieselbe bleibt, wenn man den Elongationswinkel auch noch kleiner nimmt.

wurzeln aus den Pendellängen. Ein 4ma
so langes Pendel braucht also doppelt so viel Ze
einen Schwung zu vollbringen, als das einfache.

Wenn ein Körper frei von der Höhe $\frac{1}{2}l$ fäll
so ist die Fallzeit $t' = \sqrt{\frac{l}{2g}}$ (17. §.) daher verhäl
sich

$$t : t' = \pi : 1$$

---

setzt man daher diesen Ausdruck in obigen statt ds, so
wird

$$dt' = \frac{l\,dx}{2\sqrt{[g(b-x)]}\ \sqrt{(2lx-xx)}} \text{ daher}$$

$$t' = \frac{l}{2\sqrt{g}}\int\frac{dx}{\sqrt{(b-x)}\ \sqrt{(2lx-xx)}}$$

Nach Karsten's Anfangsgründe der mathematischen
Analysis, Greifswalde 1786, 90. §. findet man dieses
Integral für den Fall daß es für $x = 0$ verschwindet,
und alsdenn $x = b$, also der halbe Bogen BA in der
Zeit t' durchlaufen wird, wenn man den Druckfehler S. 153
Z. 5 nach S. 151 Z. 14 verbessert, und $c = 2l$ setzt:

$$t' = \frac{1}{2}\frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left[1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2l}\right)^3 + \ldots\right]$$

Wird nun der ganze Bogen BAD in der Zeit t durch-
laufen, so ist die Zeit eines Schwunges $t = 2t'$ oder

$$t = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left[1 + \tfrac{1}{8}\frac{b}{l} + \tfrac{9}{256}\frac{b^2}{l^2} + \ldots\right]$$

und je kleiner b gegen l wird, desto sicherer kann man
das dritte und die folgenden Glieder weglassen, daher ist

$$t = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left(1 + \frac{b}{8l}\right)$$

Setzt man den Elongationswinkel $ACB = \alpha$, so ist
$\frac{b}{l} = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2$ also $\frac{b}{8l} = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2$. Für $\alpha = 16$
Grad ist daher $\frac{b}{8l} = \tfrac{1}{4}(\mathrm{Sin}\,8^\circ)^2 = 0{,}00484\ldots$ man

d. h. die Zeit eines Schwunges, verhält sich zur Zeit, darin ein Körper von der halben Pendellänge frei herunter fällt, wie 1 : 3,14159.... 3 /

84. §.

Ein Pendel, welches in jeder Sekunde einen Schwung verrichtet, heißt ein Sekundenpendel. Für das einfache Sekundenpendel ist daher die Zeit eines Schlags, t = 1 Sekunde, also

$$1 = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \sqrt{l} \text{ oder}$$

$$l = \frac{2g}{\pi^2}$$

und wenn die Länge des einfachen Sekundenpendels aus Beobachtungen genau bekannt ist, so giebt dies ein Mittel ab, daraus die Fallhöhe g genau zu bestimmen, weil man leicht einsieht, daß es nicht wohl möglich ist, diese Höhe nur erträglich genau, aus unmittelbaren Beobachtungen über den freien Fall der Körper auszumitteln.

Aus der bekannten Länge des Sekundenpendels findet man die Fallhöhe eines Körpers in der ersten Sekunde

$$g = \tfrac{1}{2} \pi^2 l.$$

Die Länge des Sekundenpendels ist aber nicht auf der ganzen Erdfläche einerlei, sondern sie wird größer gegen die Pole und kleiner gegen den Äqua-

---

kann daher, wenn der Elongationswinkel nicht größer als 15 bis 16 Grad ist,

$$t = \frac{\pi \sqrt{l}}{\sqrt{2g}}$$

setzen. Auch sieht man, daß in diesem Falle die Zeit des Schwunges dieselbe bleibt, wenn man den Elongationswinkel auch noch kleiner nimmt.

tor (m. s. Gehler phys. Wörterb. 3ter Theil, Art. Pendel); daher ist auch g nicht aller Orten gleich groß. In der neuesten Ausgabe von der Astronomie par Jérôme le Français (*la Lande*) à Paris 1792, Tom. III. p. 46, findet man eine Tafel, welche zum Theil hier abgedruckt ist.

Grad der Breite	Pendellängen in pariser Linien	Grad der Breite	Pendellängen in pariser Linien
0	439,07	52	440,65
5	439,09	53	440,68
10	439,15	54	440,71
20	439,38	55	440,75
30	439,72	56	440,79
40	440,13	57	440,82
45	440,35	58	440,85
46	440,40	59	440,88
47	440,45	60	440,92
48	440,49	65	441,07
49	440,54	70	441,20
50	440,58	80	441,38
51	440,62	90	441,45

Für **Berlin** ist daher die Länge des einfachen Sekundenpendels

= 440,665 pariser Linien
= 3,1673 rheinländische oder brandenburgische Fuß *).
= 3 Fuß 2 Zoll beinahe.

*) Den brandenburgischen Fuß = 139,13 pariser Linien groß angenommen. Die hieher gehörigen Tafeln, zur Erleichterung dieser und ähnlicher Rechnungen, findet man in meiner
Vergleichung der in den Königl. Preußischen Staaten eingeführten Maaße und Gewichte. Berlin 1798. S. 73 u. f.

Für Paris = 440,53 pariser Linien
= 3,1663 brandenburgische Fuß.

Hienach erhält man für Berlin

$2 \text{ Log } \pi = 0{,}9942997$

$\text{Log } \tfrac{1}{2} \, l = 0{,}1996592$

$1{,}1939589 = \text{Log. } g,$

wozu die Zahl 15,6299 stimmt.

Es ist daher für Berlin die Fallhöhe in der ersten Sekunde 15,63 brandenburgische Fuß.

Für Paris findet man durch eine ähnliche Rechnung g = 15,625 brandenburgische Fuß; in der Ausübung setzt man gewöhnlich auch für unsere Gegenden, g = 15,625 = $15\tfrac{5}{8}$ brandenburgische Fuß.

85. §.

Die zusammengesetzten Pendel erfordern eine weitere Ausführung des vorhergehenden Kapitels. Soll ein dergleichen Pendel Sekunden schlagen, und es ist das Gewicht der cylindrischen Stange = N, das Gewicht der Kugel = M, und die Länge des einfachen Sekundenpendels = l, so muß die Entfernung des Aufhängepunkts vom Mittelpunkte der Kugel

$$= \frac{M + \frac{1}{2}N}{M + \frac{1}{3}N} \, l \text{ seyn,}$$

vorausgesetzt daß die Kugel nur klein ist.

Man s. Kästner's höhere Mechanik, 2ter Abschnitt 34. §., und Karsten's Lehrbegriff, 4ter Th. 179. §., wo man überhaupt die Lehren vom Pendel sehr vollständig abgehandelt findet.

tor (m. s. Gehler phys. Wörterb. 3ter Theil, Art. Pendel); daher ist auch g nicht aller Orten gleich groß. In der neuesten Ausgabe von der Astronomie par Jérôme le Français (*la Lande*) à Paris 1792, Tom. III. p. 46, findet man eine Tafel, welche zum Theil hier abgedruckt ist.

Grad der Breite	Pendellängen in pariser Linien	Grad der Breite	Pendellängen in pariser Linien
0	439,07	52	440,65
5	439,09	53	440,68
10	439,15	54	440,71
20	439,38	55	440,75
30	439,72	56	440,79
40	440,13	57	440,82
45	440,35	58	440,85
46	440,40	59	440,88
47	440,45	60	440,92
48	440,49	65	441,07
49	440,54	70	441,20
50	440,58	80	441,38
51	440,62	90	441,45

Für Berlin ist daher die Länge des einfachen Sekundenpendels

= 440,665 pariser Linien

= 3,1673 rheinländische oder brandenburgische Fuß *).

= 3 Fuß 2 Zoll beinahe.

*) Den brandenburgischen Fuß = 139,13 pariser Linien groß angenommen. Die hieher gehörigen Tafeln, zur Erleichterung dieser und ähnlicher Rechnungen, findet man in meiner
Vergleichung der in den Königl. Preußischen Staaten eingeführten Maaße und Gewichte. Berlin 1798. S. 73 u. f.

Für Paris = 440,53 pariser Linien
= 3,1663 brandenburgische Fuß.

Hienach erhält man für Berlin

$$2 \text{ Log } \pi = 0{,}9942997$$
$$\text{Log } \tfrac{1}{2} \, l = 0{,}1996592$$
$$1{,}1939589 = \text{Log. } g,$$

wozu die Zahl 15,6299 stimmt.

Es ist daher für Berlin die Fallhöhe in der ersten Sekunde 15,63 brandenburgische Fuß.

Für Paris findet man durch eine ähnliche Rechnung g = 15,625 brandenburgische Fuß; in der Ausübung setzt man gewöhnlich auch für unsere Gegenden, g = 15,625 = $15\frac{5}{8}$ brandenburgische Fuß.

85. §.

Die zusammengesetzten Pendel erfordern eine weitere Ausführung des vorhergehenden Kapitels. Soll ein dergleichen Pendel Sekunden schlagen, und es ist das Gewicht der cylindrischen Stange = N, das Gewicht der Kugel = M, und die Länge des einfachen Sekundenpendels = l, so muß die Entfernung des Aufhängepunkts vom Mittelpunkte der Kugel

$$= \frac{M + \frac{1}{2}N}{M + \frac{1}{3}N} \, l \text{ seyn,}$$

vorausgesetzt daß die Kugel nur klein ist.

Man s. Kästner's höhere Mechanik, 2ter Abschnitt 34. §., und Karsten's Lehrbegriff, 4ter Th. 179. §., wo man überhaupt die Lehren vom Pendel sehr vollständig abgehandelt findet.

Mit Hülfe des vorstehenden Ausdrucks wird man in den Stand gesetzt, einem Sekundenpendel die nöthigen Abmessungen zu geben, wobei für die hiesige Gegend, $l = 3{,}167$ brandenburgische Fuß angenommen wird.

Zweite Abtheilung.

Die Hydraulik.



Einleitung.

86. §.

Die Mechanik flüssiger Körper (Mechanica corporum fluidorum) lehrt die Bewegung und die aus derselben entspringenden Wirkungen flüssiger Massen kennen. Eine besondere Abtheilung ist die Hydraulik (Hydraulica) oder Hydrodynamik (Hydrodynamica), in welcher die Gesetze der Bewegung des Wassers, und die aus der Bewegung desselben entstehenden Wirkungen untersucht werden.

Anmerk. Man unterscheidet sonst die Hydraulik von der Hydrodynamik dadurch, daß erstere von der Bewegung des Wassers allein, letztere aber von den Kräften desselben handet, ob gleich diese Abgrenzung selten beobachtet wird.

87. §.

Die flüssigen Massen unterscheiden sich vorzüglich von den festen, durch die vollkommene Bewegbarkeit ihrer einzelnen Theile, welche, unerachtet ihres noch so starken Zusammenhanges, bei der geringsten Kraftäußerung aneinander verschoben werden können.

Denkt man sich nun das Wasser als einen schweren, unpreßbaren und vollkommen flüssigen Körper, dessen kleinste Theile überdies weder unter sich, noch mit andern Körpern, mit einiger Kraft zusammenhängen, und untersucht dessen Eigenschaften, so entstehet eine Hydraulik, unabhängig von aller Erfahrung; weil aber das Wasser sowohl unter sich (Cohäsion, Cohaesio, *Cohésion*) als auch

mit andern Körpern (Adhäsion, Adhaesio, *Viscosité*) so zusammenhängt, daß eine gewisse Kraft zur Überwältigung dieses Zusammenhanges erfordert wird, auch bei der Bewegung so mancherlei Umstände eintreten, die bei einer vollkommenen flüssigen Masse nicht in Betrachtung kommen, so erfordert dies, wenn die Hydraulik mit Nutzen auf Gegenstände des bürgerlichen Lebens angewandt werden soll, daß ihre Lehren in genauer Verbindung mit der Erfahrung stehen.

Wenn nun gleich genaue Versuche aller Art, das nothwendigste Erforderniß für die Hydraulik sind, so ist es doch sehr zu bedauern, daß es grade hieran noch am meisten fehlt, und daß manche Versuche, aus welchen Regeln abgeleitet werden, nicht immer zureichen, um davon mit Sicherheit in der Ausübung Gebrauch zu machen. Es haben zwar mehrere der ersten Gelehrten, mit vielem Aufwande von Scharfsinn, die Hydraulik erweitert, allein es fehlt ihr doch noch sehr vieles, um das zu seyn, was andere ihr verschwisterte mathematische Wissenschaften sind.

Erstes Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers bei dem Ausflusse aus Behältern, und von der Zusammenziehung des Wasserstrahls.

88. §.

Befindet sich in dem horizontalen Boden eines Gefäßes eine Öfnung (Apertura, *Orifice*, *Ouverture*), so heißt solche eine horizontale (Ap. horizontalis), sonst aber eine Seitenöfnung (Ap. lateralis).

Die lothrechte Höhe des Wasserspiegels über einer horizontalen Öfnung heißt die Druckhöhe (Altitudo pressionis, *Charge d'eau*), und wenn in der Folge dabei nichts weiter erinnert wird, so ist immer stillschweigend vorausgesetzt, daß dieselbe unverändert bleibe, und durch anderes Wasser das ausfließende ersetzt werde.

Zur Bestimmung der Wassermenge (Quantitas aquae, *Quantité d'eau*, *Dépense*) welche aus einer Öfnung läuft, nimmt man eine gewisse Zeit als Einheit an, gewöhnlich eine Sekunde; und weil unter der Geschwindigkeit eines Körpers derjenige Weg verstanden wird, welchen er in einer Sekunde gleichförmig durchläuft, so ist die Geschwindigkeit des Wassers, mit der Länge desjenigen Strahls, welcher in einer Sekunde ausfließt einerlei. Wenn daher die durchaus gleiche Geschwindigkeit $= c$, mit welcher das Wasser aus einer Öfnung läuft, bekannt ist, so findet man c

[illegible] die Wassermenge $= M$, wenn die Größe der Öfnung $= a$ mit der Geschwindigkeit c multiplizirt wird, oder

$$M = ac$$

Für irgend eine Zeit t welche in Sekunden gegeben ist, erhält man hiernach die Wassermenge

$$tM = tac$$

Sucht man das Gewicht $= P$ der Wassermenge M, so muß dieselbe mit dem Gewicht von einem Kubikfuß Wasser, welches durch γ bezeichnet wird, multiplizirt werden, also

$$P = \gamma M.$$

89. §.

Bei horizontalen Öfnungen, verhalten sich die Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers, wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen.

Man setze daß bei zwei verschiedenen Gefäßen

h, H die Druckhöhen,

a, A die Flächeninhalte der Ausflußöfnungen, und

c, C die Geschwindigkeiten bezeichnen, mit welchen das Wasser im Beharrungsstande durch die Öfnungen ausläuft,

so entstehet offenbar bei derjenigen Öfnung ein größerer Druck auf jedes ausfließende Wassertheilchen, über welchem sich eine größere Wasserhöhe befindet, weshalb auch eine größere Geschwindigkeit bei dem Ausflusse erzeugt werden muß. Wenn die Wassertheilchen die Öfnung verlassen, so hört zwar dieser Druck nach und nach auf; aber im Augenblicke des Ausflusses, in irgend einer wenn auch noch so kleinen Zeit t, muß der Druck welcher von

der

der Wasserhöhe herrührt, auf die ausfließenden Wassertheile wirken, und es lassen sich daher die Gewichte der Wassersäulen $ah\gamma$, $AH\gamma$ als bewegende Kräfte ansehen, welche die in gleichen Zeiten ausfließende Wassermassen gleichförmig beschleunigen. Haben daher beide Massen in der Zeit t ihre Geschwindigkeiten c, C, mit welchen sie ausfließen erhalten, so ist das Gewicht der in dieser Zeit ausfließenden Wassermengen $tac\gamma$, $tAC\gamma$, und daher das Verhältniß ihrer beschleunigenden Kräfte (32. §.)

$$\frac{ah\gamma}{tac\gamma} : \frac{AH\gamma}{tAC\gamma} = \frac{h}{c} : \frac{H}{C}$$

Nun verhalten sich aber die beschleunigenden Kräfte zweier Massen, wie die in gleichen Zeiten erlangten Geschwindigkeiten (35. §.), daher

$$\frac{h}{c} : \frac{H}{C} = c : C \text{ oder}$$

$$h : H = c^2 : C^2 \text{ oder auch}$$

$$\sqrt{h} : \sqrt{H} = c : C.$$

1. Anmerk. Dieser Satz wird gewöhnlich aus Beobachtungen abgeleitet, die sehr wohl damit übereinstimmen. Vorstehende Auseinandersetzung ist ein Versuch denselben a priori darzuthun.

2. Anmerk. Zur Vergleichung mit den Erfahrungen, können die Versuche des Hrn. Bossüt *) (2ter Bd.

*) Herrn Abt Bossüt, Lehrbegriff der Hydrodynamik, nach Theorie und Erfahrung, vorzüglich für solche, welche zur Ausführung dieser Wissenschaft bestimmt sind. Aus dem Französischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen herausgeg. von K. C. Langsdorf. I. Band, welcher die Theorie der Hydrodynamik enthält. II. Band, welcher die Experimentalhydraulik enthält. Mit Kupfern. Frankf. a. M. 1792.

S. 47) dienen. Hienach ist für eine kreisförmige Oefnung von 1 Zoll Durchmesser, bei einer

Druckhöhe	1 Fuß,	die Wassermenge	2722 par. K. Zoll.
⸗ ⸗	2 ⸗	⸗ ⸗ ⸗	3846 ⸗ ⸗ ⸗
⸗ ⸗	4 ⸗	⸗ ⸗ ⸗	5436 ⸗ ⸗ ⸗
⸗ ⸗	8 ⸗	⸗ ⸗ ⸗	7672 ⸗ ⸗ ⸗
⸗ ⸗	9 ⸗	⸗ ⸗ ⸗	8135 ⸗ ⸗ ⸗

Weil sich nun die Wassermengen wie die Geschwindigkeiten, und diese wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen verhalten, so müßte seyn:

$$\sqrt{1} : \sqrt{4} = 2722 : 5436$$
$$\sqrt{1} : \sqrt{9} = 2722 : 8135$$
$$\sqrt{2} : \sqrt{8} = 3846 : 7672$$
$$\sqrt{4} : \sqrt{9} = 5436 : 8135$$

welches auch mit einer geringen Abweichung, so weit es die Genauigkeit bei dergleichen Versuchen zuläßt, eine gute Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung zeigt.

Benedict Castelli lehrte ums Jahr 1640, daß sich die Geschwindigkeit des Wassers wie seine Druckhöhe verhalte; ihm wurde von Evangelista Torricelli widersprochen, welcher in seiner 1644 gedruckten Schrift del moto dei gravi behauptete, die Geschwindigkeiten des Wassers verhielten sich wie die Quadratwurzeln seiner Druckhöhen. Die Beschreibung der Torricellischen Versuche, welche sehr gut mit dieser Behauptung übereinstimmen, findet man in des Herrn Hofr. Kästner's Hydrodynamik *).

90. §.

Weil die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers von der Druckhöhe abhängt, so sieht man ein, daß bei Seitenöfnungen, wo jeder ho-

*) A. G. Kästner, Anfangsgründe der Hydrodynamik, welche von der Bewegung des Wassers besonders die praktischen Lehren enthalten. Zweite vermehrte Auflage. M. K. Göttingen 1797. §. 96. S. 67 u. f.

rizontale Streifen eine andere Wasserhöhe hat, die Geschwindigkeiten in der Öfnung verschieden seyn müssen Denkt man sich nun unter allen Geschwindigkeiten eine solche, bei der eben so viel Wasser ausflösse wie bei den verschiedenen, so heißt diese die mittlere Geschwindigkeit (Celeritas media, *Vitesse moyenne*), und diejenige Wasserhöhe welche dieser mittleren Geschwindigkeit zugehört, ihre Geschwindigkeitshöhe (Altitudo celeritati debita, *Hauteur due à la vitesse*), welche man auch die Druckhöhe der Seitenöfnung nennen kann.

Wenn die lothrechte Höhe einer Seitenöfnung in Bezug auf die lothrechte Entfernung des Wasserspiegels von dieser Öfnung nur klein ist, so können auch die Geschwindigkeiten in der Öfnung nicht sehr von einander abweichen, und man nimmt in solchen Fällen, die Entfernung des Schwerpunkts der Öfnung vom Wasserspiegel, als Geschwindigkeitshöhe an.

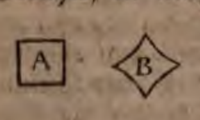
91. §

Beim freien Falle der Körper hängt ihre erlangte Geschwindigkeit von der Höhe ab, von welcher sie gefallen sind (12. §.); weil nun ebenfalls bei der Bewegung des Wassers durch eine Öfnung, die Geschwindigkeiten desselben sich wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen verhalten, so sieht man, daß zwischen dem freien Falle der Körper und der Bewegung des Wassers durch Öfnungen, eine gewisse Übereinstimmung in Absicht der zugehörigen Höhen und erlangten Geschwindigkeiten Statt finde. Für eine ganz freie und ungehinderte Bewegung des Wassers ist man berechtiget, eben die Gesetze wie beim freien Falle fester Körper anzunehmen; wenn aber Wasser durch eine Öfnung ausläuft, so sind nach den verschiedenen Gestalten welche eine Öfnung haben kann, die

Geschwindigkeiten in derselben verschieden, weil sich nicht nur die Wassertheile von den Wänden der Öfnung losreissen müssen, sondern auch dadurch, daß sich das Wasser von allen Seiten nach der Öfnung bewegt, eine Ablenkung der Wassertheile von ihrer Bahn entstehet, welche eine Contraction oder Zusammenziehung (Contractio) des Strahls bewirkt.

Wenn ein Strahl durch eine Öfnung in einer dünnen Wand (Apertura laminae inserta, *Orifice en mince paroi*) ausfließt, so ist der Punkt der größten Zusammenziehung des Strahls von der Öfnung weiter entfernt, wenn die Druckhöhe größer wird; so wie auch mit Vergrößerung der Öfnung bei einerlei Druckhöhe und hinlänglich großem Querschnitt des zuströmenden Wassers, der Abstand der größten Zusammenziehung größer wird, wie man sich leicht durch Versuche überzeugen kann.

Aus diesem letzten Umstande kann man erklären, warum bei einer länglichen horizontalen Öfnung, der Durchschnitt des zusammengezogenen Strahls, in einiger Entfernung von der Öfnung, eine vertikale länglichte Figur bildet, und weshalb aus einer quadratförmigen Öfnung A, der Querschnitt des auslaufenden Strahls die Gestalt B annimmt.



92. §.

Ein von mir vielfältig wiederholter Versuch, unter einer Druckhöhe von 3 Fuß rheinländisch, gab bei einer scharf abgedrehten vertikalen 15 Linien weiten Öfnung in einer dünnen messingenen Platte, den vertikalen Durchmesser des zusammengezogenen Wasserstrahls im Punkt der größten Zusammenziehung, sehr wenig kleiner als 12 Linien; dagegen fand ich den horizontalen Durch-

ᴉesser sehr wenig größer als 12 Linien, so daß ᴉan bei 8 Linien Abstand von der beschriebenen Öfnung den mittlern Durchmesser des zusammengezogenen Strahls, 12 Linien groß annehmen ann.

Die Herren Bossüt (angef. Hydrod. 2ter Bd. 447. §.) und Venturi *) führen Versuche an, welche sich auf die Zusammenziehung des Strahls bei Öfnungen in einer dünnen Wand oder Metallplatte beziehen. Vergleicht man die verschiedenen Beobachtungen mit einander, so geben die Bossütschen Versuche den Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahls (Sectio venae aquae contractae, *Section de la veine contractée*) 0,660 bis 0,666, oder etwa $\frac{2}{3}$ von dem Inhalte der Ausflußöfnung. Die Venturische Ausmessung des zusammengezogenen Strahls giebt 0,631, und die meinige 0,64 = $\frac{16}{25}$, welches auch mit andern Resultaten des Herrn Venturi übereinstimmt, bei welchen aus der Weite die ein Strahl erreicht, wenn er durch eine vertikale Öfnung ausfließt, die Geschwindigkeit im Querschnitt der größten Zusammenziehung, und hieraus dessen Inhalt selbst gefunden worden ist.

Hienach verhält sich der Durchmesser einer kreisförmigen Öfnung in einer dünnen Wand, zum Durchmesser des zusammengezogenen Strahls = 5 : 4.

---

*) Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides. Appliqué à l'explication de différens Phénomènes hydrauliques. Par le Citoyen J. B. *Venturi.* à Paris. An VI. (1797). p. 75 etc.

Von dieser lehrreichen Schrift findet man eine deutsche Uebersetzung in den Annalen der Physik von L. W. Gilbert, im 2ten und 3ten Bande, Halle 1799.

Anmerk. Die folgenden Versuche sind von Herrn Bossüt, der letzte von Herrn Venturi; alles in pariser Maaß ausgedrückt.

No.	Druckhöhe			Durchmesser der Öfnung. Linien	Durchmesser des zusammengezog. Strahls. Linien	Abstand von der Öfnung. Linien
1	11′	8″	10‴	12	$9\frac{4}{5}$	7
2	11′	8″	10‴	12	$9\frac{4}{5}$	$6\frac{1}{2}$
3	11′	8″	10‴	24	$19\frac{4}{5}$	$12\frac{1}{2}$
4	11′	8″	10‴	36	$29\frac{1}{4}$	18
5	9′	—	—	6	$4\frac{8}{9}$	$4\frac{1}{2}$
6	9′	—	—	12	$9\frac{4}{5}$	$6\frac{1}{2}$
7	2′	8″	6‴	18	14,3	11

Sämmtliche Oefnungen waren kreisförmig, nur der erste Versuch bezieht sich auf eine quadratförmige.

93. §.

Die verschiedenen Arten der Zusammenziehung bewirken eine größere oder kleinere mittlere Geschwindigkeit in der Ausflußöfnung, und in dem Verhältnisse eine vermehrte oder verminderte Wassermenge. Nur durch Versuche ist es möglich, für die verschiedenen Arten des Ausflusses anzugeben, welchen Veränderungen die Wassermengen und mittleren Geschwindigkeiten unterworfen sind.

Um diese verschiedenen Wassermengen leichter miteinander zu vergleichen, und den Verlust wegen der Zusammenziehung und anderer Hindernisse bei dem Ausflusse besser zu übersehen, kann man die Hypothese annehmen, daß das Wasser, wenn es vollkommen flüssig wäre und nicht zusammengezogen würde, in der Ausflußöfnung eine Geschwindigkeit erlangte, die derjenigen gleich wäre, die ein von der Druckhöhe frei fallender Körper erhielte.

Die so berechnete Wassermenge kann die **hypothetische** heißen.

Für diesen Fall ist die Geschwindigkeit des Wassers in der Öfnung, oder $c = 2\sqrt{g}\sqrt{h}$.

In nachstehender Tafel, welche Versuche von Herrn Bossüt (Hydrod. 2. B. 2. K.), mit **Öfnungen in einer dünnen Wand** bei einem prismatischen 3 Fuß weiten Gefäße enthält, ist in der letzten Spalte angegeben, der wievielte Theil die durch Versuche erhaltene Wassermenge von der hypothetischen ist. Da den Versuchen gemäß, das Verhältniß der Wassermenge dasselbe bleibt, die Öfnung mag, bei einerlei Druckhöhe, horizontal oder vertikal stehen, so ist hierauf nicht Rücksicht genommen; auch ist sowohl hier, als bei allen übrigen Bossütschen Versuchen, zu bemerken, daß solche im pariser Maaße ausgedrückt sind.

N	Gestalt der Öfnung: rechtwinklicht. Linien. lang.	breit.	kreisförmig. Durchmesser. Linien.	Druckhöhe F.	Z.	L.	Ausgelaufene Wassermenge in 1. Min Kubikzoll.	Hypothetische Wassermenge in 1. Min. Kubikzoll.	Verhältniß der hypothetischen zur wirklichen Wassermenge.
1			6	11	8	10	2311	3762	0,6142
2			12	11	8	10	9281	15048	0,6167
3			24	11	8	10	37203	60192	0,6180
4	12	3	—	11	8	10	2933	4792	0,6121
5	12	12	—	11	8	10	11817	19170	0,6164
6	24	24	—	11	8	10	47361	76680	0,6176
7			6	9	—	—	2018	3286	0,6141
8			12	9	—	—	8135	13144	0,6189
9			6	4	—	—	1353	2191	0,6175
10			12	4	—	—	5436	8763	0,6203

Aus diesen Versuchen geht hervor, daß das Verhältniß der Wassermenge, also auch der Ge-

schwindigkeiten in den Öfnungen, sehr nahe dasselbe bleibt. Der größere Umfang der Öfnung, bei übrigens gleichen Umständen und bei weiten Behältern, giebt zwar eine etwas kleinere Geschwindigkeit, so wie kleinere Druckhöhen, wegen der geringern Zusammenziehung in Vergleichung mit der hypothetischen Wassermenge, einen größern Ausfluß geben, als bei vergrößerter Druckhöhe. Diese Abweichungen sind aber so geringe, daß man in der Ausübung annehmen kann, die wirkliche Ausflußmenge sei ein bestimmter Theil der hypothetischen, wofür man als eine Mittelzahl 0,619 annehmen kann.

Nun ist die hypothetische Geschwindigkeit des Wassers bei der Druckhöhe h

$$= 2\sqrt{g}\,\sqrt{h} = 7{,}9057\,\sqrt{h}$$

daher die wirkliche mittlere Geschwindigkeit c, wenn Wasser durch eine Öfnung in einer dünnen Wand abfließt, oder

$$c = 0{,}619 \cdot 7{,}9 \cdot \sqrt{h} = 4{,}8936 \cdot \sqrt{h}$$

Hienach kann man annehmen, daß die wirkliche Wassermenge 0,619, oder sehr nahe $\frac{5}{8}$ der hypothetischen beträgt.

94. §.

Läuft das Wasser nicht durch eine Öfnung in der dünnen Wand eines Behälters, sondern durch eine cylindrische Ansatzröhre, oder durch eine Öfnung in einer dicken Wand, so bemerkt man zwar an dem ausfließenden Strahl keine äußere Zusammenziehung, weil er mit einer Dicke ausfließt, die der Weite der Röhre gleich ist. Wegen der schiefen Richtung in welcher die Wassertheilchen gegen die Einflußöfnung der Röhre strömen, ist man aber berechtigt, eine innere Zusammenziehung

nzunehmen, ohne welche offenbar mehr Wasser usfließen würde.

Sollen die Versuche über die Verminderung es ausfließenden Wassers durch die Zusammenzieung, bei dem Eintritt in eine cylindrische Röhre ntscheidend seyn, so dürfen diese Röhren nur kurz mommen werden, damit durch die Länge der Röhrenwände keine Verzögerung oder Verminderung der Geschwindigkeit des Wassers entstehet. Sind die Röhren zu kurz, so daß ihre Länge dem Durchmesser der Öfnung gleich ist, so folgt das Wasser nicht den Wänden der Röhre, sondern er Strahl reißt sich von denselben los, und der lusfluß erfolgt eben so, wie bei Öfnungen in eier dünnen Wand. Dies geschiehet noch, wenn ie Röhre doppelt so lang als der Durchmesser ist, enn man nicht durch besondere Mittel das Wasr den Wänden zu folgen nöthiget.

Bei den angeführten Versuchen in der nachsteenden Tafel, folgte das Wasser den Wänden er Röhre, welche sämmtlich cylindrisch waren. Die Vergleichung mit der hypothetischen Wassernenge ist eben so wie im vorigen §. angestellt. Sämmtliche Maaße beziehen sich auf das Pariser.

Versuche von	N.	Länge der Röhre. Linien.	Durchmesser der Röhre. Linien.	Druckhöhe. F.	Z.	L.	Ausgelaufene Wassermenge in 1. Min. Kubikzoll.	Hypothetische Wassermenge in 1. Min. Kubikzoll.	Verhältniß der hypothetischen zur wirklichen Wassermenge.
Bossut.	1	18	12	11	8	10	12168	15084	0,8066
	2	24	12	11	8	10	12188	15084	0,8080
	3	48	12	11	8	10	12274	15084	0,8137
	4	24	6	3	10	—	1689	2143	0,7881
	5	24	10	3	10	—	4703	5955	0,7897
	6	24	6	2	—	—	1222	1549	0,7899
	7	24	10	2	—	—	3402	4303	0,7906
Venturi.	8	57	18	2	3	6	12198	14975	0,8146
	9	54	18	2	8	6	13378	16274	0,8220
	10	57	18	2	8	6	13378	16274	0,8220
	11	60	18	2	8	6	13378	16274	0,8220

Nimmt man als einen mittlern Werth aus diesen Versuchen an, daß die wirkliche Wassermenge $0{,}8125 = \frac{13}{16}$ von der hypothetischen beträgt, so ist die mittlere Geschwindigkeit des Wassers beim Eintritt in die Röhre

$$c = \frac{13}{16} \cdot 7{,}9 \sqrt{h} = 6{,}42 \sqrt{h}$$

Hieraus geht hervor, daß unter gleichen Umständen kurze Ansatzröhren beinahe $\frac{3}{16}$ mehr Wasser geben, als Öfnungen in einer dünnen Wand.

Anmerk. Liegt die Einmündung der Röhre nicht in den innern Wänden des Gefäßes, sondern tritt noch um einen Theil in den Behälter, so daß sie von allen Seiten mit Wasser umgeben ist, so fand Herr Borda (Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des Vases. Mém. de l'ac. de Paris année 1766. Paris 1767. p. 579) daß bei einer 6 Zoll langen und $14\frac{1}{16}$ Linien weiten Röhre

von dünnem Blech, wenn solche ganz mit Wasser umgeben war, und der Strahl den Wänden der Röhre nicht folgte, daß für die Einflußöfnung

$$c = 4{,}07 \sqrt{h} \text{ ist.}$$

Wenn hingegen das Wasser den Wänden der Röhre folgt, und die Röhrenwände eine Linie dick sind, so folgt aus meinen Versuchen (97. §. IX. Erf.) daß der Ausfluß eben derselbe bleibt, die Röhre mag sich innerhalb oder außerhalb des Gefäßes befinden.

95. §.

Durch konische Röhren, welche sich gegen ie Ausmündung verengen, kann die Wassermenge n Vergleichung mit andern Öfnungen, noch anhnlich vermehrt werden, wie nachstehende Versu- e vom Marchese J. Poleni (de castellis. Flor. 718) beweisen.

	Länge der konischen Röhre.	Durchmesser der		Druckhöhe.			Beobachtete Wassermenge.	Hypothetische Wassermenge.	Verhältniß der hypothetischen Wassermenge zur wirklichen.
		Einmündung	Ausmündung						
.	Linien.	Lin.	Lin.	F.	Z.	L.	Kubikzoll.	Kubikzoll.	
1	92	118	26	1	9	4	23687	27527	0,8605
2	92	60	26	1	9	4	24345	27527	0,8844
3	92	42	26	1	9	4	24619	27527	0,8939
4	92	33	26	1	9	4	24758	27527	0,8992

Bei der konischen Form im letzten Versuche, ist er Verlust des Wassers nur etwa $\frac{1}{10}$ von der ypothetischen Wassermenge.

Giebt man der konischen Ansatzröhre die Gealt des zusammengezogenen Strahls, wie bei Öfungen in einer dünnen Wand (92. §.), so daß er Durchmesser der Ausmündung $\frac{4}{5}$ vom Durch-

messer der Einmündung, und die Länge der Röhre etwas größer als der Halbmesser der Einmündung ist, so muß das Wasser eben so ausfließen, wie durch den Querschnitt des zusammengezogenen Strahls, vorausgesetzt daß die scharfen Ecken der konischen Röhre etwas abgerundet sind. Eine solche Röhre kann Mündung nach der Gestalt des zusammengezogenen Strahls (Ostium instar aquae venae contractae, *Embouchure qui suit la forme de la veine contractée*), zur Abkürzung in der Folge, Mündung φ heißen.

Durch den kleinsten Querschnitt des zusammengezogenen Strahls fließt eben so viel Wasser, als durch die dazu gehörige Öfnung in einer dünnen Wand, daher muß die Geschwindigkeit in dem Querschnitte, in demselben Verhältniß zunehmen, wie sein Flächeninhalt abnimmt; nun ist (92. §) der Querschnitt des zusammengezogenen Strahls $\frac{16}{25}$ vom Querschnitte der Öfnung, daher die Geschwindigkeit im Querschnitte der größten Zusammenziehung, oder

$$c = \tfrac{25}{16} . 0{,}619 . 2\sqrt{g}\sqrt{h} = 0{,}9672 . 2\sqrt{g}\sqrt{h}$$

Hat die Röhre φ die erforderliche Gestalt, so ist die Geschwindigkeit des Wassers in der Ausflußöfnung EF, oder

$$c = 0{,}9672 . 2\sqrt{g}\sqrt{h} = 7{,}646\sqrt{h}$$

Für den freien Fall eines Körpers wäre die Geschwindigkeit

$$= 2\sqrt{g}\sqrt{h};$$

hienach verhält sich die wirkliche Wassermenge welche durch die Mündung φ bei EF ausläuft, zur hypothetischen Wassermenge für die Öfnung EF wie

$$0{,}9672 : 1 \text{ oder nahe } = 30 : 31$$

und es ist wahrscheinlich, daß beide Wassermengen gleich wären, wenn die Wassertheile nicht wegen der Adhäsion an den Wänden der Röhre verzögert würden, und wenn man φ ganz genau die Gestalt des zusammengezogenen Strahls geben könnte.

Die Ansatzröhre φ ist daher unter allen Ausflußöffnungen von einer bestimmten Größe die vortheilhafteste, weil das ausfließende Wasser beim Ausgange eine solche Geschwindigkeit in der Öffnung EF erlangt, welche nur wenig von derjenigen verschieden ist, die ein Körper durch den freien Fall von der Druckhöhe erreichen würde.

Mit einer solchen Mündung hat Herr Venturi einen Versuch (am angef. O. Exp. 4. p. 12) angestellt. Die Axe der Röhre war horizontal, bei einer Druckhöhe von $32\frac{1}{2}$ pariser Zoll. Der Durchmesser am Gefäß hielt 18, und bei der Ausmündung $14\frac{1}{2}$ Linien. Die ganze Länge der Röhre = 11 Linien, und man fand die Wassermenge für eine Sekunde = 164,6 Kubikzoll. Die hypothetische Wassermenge ist hier 176 Kubikzoll, daher die wirkliche 0,935 von der hypothetischen. Dieses nähert sich der vorhin gefundenen Grenze 0,967 schon ansehnlich, und man würde sie erreicht haben, wenn die konische Röhre nicht scharfe Ecken gehabt hätte.

Aus meinen mit einer dergleichen Mündung angestellten Versuchen (98. §. 1. T. N. 2), wenn die Einmündung 15, die Ausmündung 12, und die Länge der Röhre 8 Linien groß war, findet sich die wirkliche Wassermenge 0,9186 von der hypothetischen. Hiebei hatte die Mündung φ ihre scharfe Ecken behalten. Nachdem aber diese innerhalb sanft abgerundet waren (98. §. 1. T. N. 3), vermehrte sich die Wassermenge bis 0,9798 von der hypothetischen, so daß sich nur ein geringer Unterschied zwischen beiden befand, und eine größere Ausflußmenge als durch die Venturischen Versuche bewirkt ward.

Der Wasserverlust bei einerlei Ausmündung und gleicher Druckhöhe ist hienach

bei der Mündung φ mit abgerundt. Ecken 0,0202

bei der Mündung φ mit scharfen Ecken 0,0813

bei einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre 0,1875

bei einer Öfnung in einer dünnen Wand 0,3810

von der hypothetischen Wassermenge.

96. §.

Es giebt noch ein Mittel wodurch die Wassermenge, ohne Vermehrung der Druckhöhe, welche man durch eine bestimmte Öfnung erhält, vermehrt werden kann. Statt der vorhin beschriebenen konischen Mündungsstücke, welche man konische Röhren der ersten Art nennen kann, die sich gegen die Ausflußöfnung verengen, kann man solche konische Röhren noch ansetzen, die sich nach dem Ausfluß hin erweitern, so daß die Einflußöfnung AB kleiner als die Ausflußöfnung EF ist, und die hier konische Röhren der zweiten Art heißen sollen.



Herr Venturi (Recherches Prop. V. Exp. 13—17. p. 26 etc.), hat hierüber wichtige Versuche angestellt. Die Einmündung AB der erweiterten konischen Röhre ABEF hatte bei allen Versuchen 15,5 Linien im Durchmesser, sie befand sich aber nicht unmittelbar am Behälter, sondern zwischen ihr und diesem war eine konische Röhre der ersten Art angebracht, welche beinahe die Gestalt des zusammengezogenen Strahls hatte. Die Länge AD und Ausmündung EF wurde bei jedem Versuche abgeändert, und man hatte bei unveränderter Druckhöhe von $32\frac{1}{2}$ Zoll die größte Wassermenge, wenn AD = 148, AB = 15,5 und EF

= 27 Linien groß war. In diesem Falle erhielt man in jeder Sekunde 329,14 par. Kubikzoll (Exp. 16), welches weit mehr ist, als die hypothetische Wassermenge für eine Öfnung von 15½ Lin. im pariser Maaße giebt. Herr Venturi beschreibt auch noch einen Versuch (Exp. 14), bei welchem zwischen die Mündung φ und die konische Ausflußröhre von der zweiten Art, eine drei Zoll lange cylindrische Röhre angebracht war, wodurch ebenfalls eine Vermehrung der Wassermenge bewirkt wurde. Weil aber keine Versuche mit der konischen Röhre der zweiten Art, die hier, wenn sie die vortheilhafteste Gestalt hat, ψ heißen kann, ohne Verbindung mit andern Röhren beschrieben sind, auch von der Vermehrung der Wassermenge bei einer drei Zoll langen cylindrischen Röhre, durch Ansetzung der Röhren φ und ψ, nicht gradezu auf längere Röhren geschlossen werden kann, und daher die Behauptung des Herrn Venturi (Prop. VII. p. 38 u. f.), daß man bei einer cylindrischen Röhrenleitung, bei unveränderter Druckhöhe, durch zweckmäßige Ansatzröhren (φ und ψ) die Wassermenge im Verhältniß 10 : 24 vermehren könne, sich nicht so gradezu annehmen läßt, so schien es mir wichtig genug zu seyn, über diese zur Erweiterung der Hydraulik und für die Ausübung wichtigen Gegenstände, Versuche mit der möglichsten Genauigkeit anzustellen.

97. §.

Zu den folgenden Versuchen diente ein 4 Fuß *) hoher prismatischer Behälter, dessen horizontaler Durchschnitt ein im lichten 18,5 Zoll langes und

*) Alle hier gegebene Abmessungen beziehen sich auf das schon angeführte rheinländische Maaß.

14,4 Zoll breites Rechteck bildete. In der schmalen vertikalen Seitenwand desselben befand sich in einiger Entfernung vom Boden, eine messingene Platte, welche mit der innern Wand des Behälters in einerlei Fläche lag, und in die man alle metallene Ansätze oder Röhren so einschrauben konnte, daß ihre Einmündung in eben die Fläche fiel. Die Einmündung konnte mittelst einer Klappe nach Gefallen geöfnet oder geschlossen werden. Zur Bestimmung der Zeit diente eine sehr gut gearbeitete Sekundenpendeluhr, welche durch einen Zeiger die Sekunden bemerkte, und mittelst einer Glocke durch Schläge hörbar machte *).

Sämmtliche Ansatzstücke und Röhren waren von Messing gearbeitet, und die innere Flächen aufs genaueste polirt, auch zur leichtern Vergleichung der verschiedenen Resultate, beziehen sich alle Öfnungen auf die Weite von einem Zoll, auch sind alle Abmessungen mit dem hiesigen Originalmaaße verglichen.

Die cylindrischen Röhren waren insgesammt einen Zoll weit, die Röhre φ nach meinen Beobachtungen (92. §.) 8 Linien lang, in der Einmündung 15, und in der Ausmündung 12 Lin. oder einen Zoll weit. Die Röhre ψ war $8\frac{13}{16}$ Zoll lang, in der Einmündung 1 Zoll, und in der Ausmündung $1\frac{19}{24}$ Zoll weit. Die Röhre φ in Verbindung mit andern Röhren wurde nur bei der Einmündung, und ψ bei der Ausmündung angebracht.

Verschiedene angestellte Versuche zeigten kleine Unregelmäßigkeiten, wenn man das Wasser im Behäl-

*) Diese Uhr wurde vor dem Gebrauche nach dem Chronometer des Herrn Major von Zach rectifizirt, welcher sich damals in der Verwahrung des Herrn Lieutenant von Textor befand.

ehälter, bei Beobachtung aller Vorsicht, auf ei-
clei Höhe erhalten wollte, weil es sich so leicht
:ignet, daß in gewissen Augenblicken mehr oder
:niger Wasser zugelassen wird als erforderlich ist.
uch war es unvermeidlich, daß nicht durch das
fließende Wasser eine unregelmäßige Bewegung
t Behälter entstand, weshalb ich es der Genauig-
it, welche diese Versuche erfordern, angemessener
nd, beim Anfange eines jeden Versuchs eine
ruckhöhe von 3 Fuß zu bewirken, und ohne Zu-
iß den Wasserspiegel so weit sinken zu lassen,
s ein Gefäß von 4156 Kubikzoll angefüllt war.
iedurch senkte sich jedesmal der Wasserspiegel im
ehälter, nach oft wiederholten Ausmessungen,
;,6 Zoll, wodurch eben so genaue Vergleichun-
n entstanden, als wenn die Druckhöhe unverän-
rt blieb; auch hat man diesem Umstande die gute
bereinstimmung der Versuche mit einerlei Röhre
zuschreiben.

Alle hier angeführten Versuche sind in Gegen-
art des Königl. Professors Herrn Hobert, an-
ıgestellt oder wiederholt worden.

Erfahrung. Kreisförmige einen Zoll weite Öfnung in einer $\frac{1}{24}$ Zoll dicken Platte mit scharfen Kanten.

Beobachtete Zeit des Ausflusses:

1. Versuch; $59\frac{1}{2}$ Sekunden.
2. Versuch; $59\frac{1}{2}$ Sekunden.

. Erfahrung. Das Mundstück φ beim Einfluß $1\frac{1}{4}$ Zoll, beim Ausfluß 1 Zoll weit, mit scharfen Kanten.

1. Versuch; 40 Sekunden.
2. Versuch; 40 Sekunden.

I. Erfahrung. Dasselbe Mundstück φ, wenn

14,4 Zoll breites Rechteck bildete. In der sc
len vertikalen Seitenwand desselben befand sic
einiger Entfernung vom Boden, eine messin
Platte, welche mit der innern Wand des Be
ters in einerlei Fläche lag, und in die man
metallene Ansätze oder Röhren so einschrau
konnte, daß ihre Einmündung in eben die Fl
fiel. Die Einmündung konnte mittelst einer Kl
nach Gefallen geöfnet oder geschlossen werden.
Bestimmung der Zeit diente eine sehr gut gea
tete Sekundenpendeluhr, welche durch einen Ze
die Sekunden bemerkte, und mittelst einer G
durch Schläge hörbar machte *).

Sämmtliche Ansatzstücke und Röhren waren
Messing gearbeitet, und die innere Flächen
genaueste polirt, auch zur leichtern Vergleich
der verschiedenen Resultate, beziehen sich alle Öf
gen auf die Weite von einem Zoll, auch sind
Abmessungen mit dem hiesigen Originalmaaße
glichen.

Die cylindrischen Röhren waren insgesamm
nen Zoll weit, die Röhre φ nach meinen Beob
tungen (92. §.) 8 Linien lang, in der Einm
dung 15, und in der Ausmündung 12 Lin.
einen Zoll weit. Die Röhre ψ war $8\frac{13}{16}$
lang, in der Einmündung 1 Zoll, und in der A
mündung $1\frac{18}{24}$ Zoll weit. Die Röhre φ in V
bindung mit andern Röhren wurde nur bei der E
mündung, und ψ bei der Ausmündung an
bracht.

Verschiedene angestellte Versuche zeigten kl
Unregelmäßigkeiten, wenn man das Wasser
Bei

*) Diese Uhr wurde vor dem Gebrauche nach
Chronometer des Herrn Major von Zach rectifizirt,
cher sich damals in der Verwahrung des Herrn Lie
nant von Teuvor befand.

hälter, bei Beobachtung aller Vorsicht, auf ei-
lei Höhe erhalten wollte, weil es sich so leicht
griet, daß in gewissen Augenblicken mehr oder
iiger Wasser zugelassen wird als erforderlich ist.
:ch war es unvermeidlich, daß nicht durch das
ließende Wasser eine unregelmäßige Bewegung
Behälter entstand, weshalb ich es der Genauig-
:, welche diese Versuche erfordern, angemessener
id, beim Anfange eines jeden Versuchs eine
ruckhöhe von 3 Fuß zu bewirken, und ohne Zu-
ß den Wasserspiegel so weit sinken zu lassen,
ein Gefäß von 4156 Kubikzoll angefüllt war.
iedurch senkte sich jedesmal der Wasserspiegel im
ehälter, nach oft wiederholten Ausmessungen,
,6 Zoll, wodurch eben so genaue Vergleichun-
n entstanden, als wenn die Druckhöhe unverän-
rt blieb; auch hat man diesem Umstande die gute
bereinstimmung der Versuche mit einerlei Röhre
uschreiben.

Alle hier angeführten Versuche sind in Gegen-
art des Königl. Professors Herrn Hobert, an-
gestellt oder wiederholt worden.

Erfahrung. Kreisförmige einen Zoll weite
Öfnung in einer $\frac{1}{24}$ Zoll dicken Platte mit
scharfen Kanten.

Beobachtete Zeit des Ausflusses:

1. Versuch; $59\frac{1}{2}$ Sekunden.
2. Versuch; $59\frac{1}{2}$ Sekunden.

Erfahrung. Das Mundstück φ beim Ein-
fluß $1\frac{1}{4}$ Zoll, beim Ausfluß 1 Zoll weit, mit
scharfen Kanten.

1. Versuch; 40 Sekunden.
2. Versuch; 40 Sekunden.

I. Erfahrung. Dasselbe Mundstück φ, wenn

die Kanten beim Ein- und Ausfluß sanft a
gerundet waren.

1. Versuch; $37\frac{1}{2}$ Sekunden.
2. Versuch; $37\frac{1}{2}$ Sekunden.

IV. Erfahrung. Die konische $8\frac{13}{16}$ Zoll lan
Ansatzröhre ψ, beim Einfluß 1 Zoll, bei
Ausfluß $1\frac{12}{24}$ Zoll weit, mit scharfen Kante

1. Versuch; 31
2. Versuch; $31\frac{1}{2}$ } $31\frac{1}{4}$ Sekunden.

V. Erfahrung. Die Mundstücke φ *) und
genau mit einander verbunden.

1. Versuch; $23\frac{1}{2}$
2. Versuch; 24
3. Versuch; $23\frac{1}{2}$ } $23\frac{2}{3}$ Sekunden.

VI. Erfahrung. Cylindrische Röhre, 1 Zoll lan
Das Wasser folgte nicht den Wänden de
Röhre.

1. Versuch; $59\frac{1}{2}$ Sekunden.

VII. Erfahrung. Cylindrische Röhre, 1 Zoll lan
an der Einmündung mit φ verbunden. Da
Wasser folgte den Wänden der Röhren.

1. Versuch; 38
2. Versuch; $38\frac{1}{2}$ } $38\frac{1}{4}$ Sekunden.

VIII. Erfahrung. Cylindrische Röhre, 1 Zoll lan
bei der Einmündung mit φ, bei der Ausmün
dung mit ψ verbunden.

1. Versuch; $27\frac{1}{2}$ Sekunden.
2. Versuch; $27\frac{1}{2}$ Sekunden.

*) Wenn das Mundstück φ ohne weitere Bemerkunge
angeführt wird, so ist immer dasjenige mit scharfen Ka
ten zu verstehen, welches bei der zweiten Erfahrung z
den Versuchen diente.

Erfahrung. Cylindrische Röhre, 3 Zoll lang, Das Wasser folgte nicht den Wänden der Röhre.

1. Versuch; $59\frac{1}{2}$ Sekunden.

Das Wasser folgte den Wänden der Röhre.

2. Versuch; 45
3. Versuch; $44\frac{1}{2}$ } $44\frac{3}{4}$ Sekunden.

Dieselbe Röhre innerhalb des Behälters angebracht, so daß sie von allen Seiten mit Wasser umgeben war, und ihre Ausmündung mit der innern Fläche des Behälters in einerlei Ebene lag.

4. Versuch; 45 Sekunden.
5. Versuch; 45 Sekunden.

Bei einer $1\frac{1}{2}$ Zoll langen innerhalb des Behälters angebrachten Röhre, wobei das Wasser den Wänden folgte, fand man dieselbe Zeit.

X. Erfahrung. Cylindrische 3 Zoll lange Röhre, mit der Einmündung φ.

1. Versuch; 39
2. Versuch; $38\frac{1}{2}$ } $38\frac{3}{4}$ Sekunden.

XI. Erfahrung. Cylindrische 3 Zoll lange Röhre, mit der Ausmündung ψ.

1. Versuch; $33\frac{1}{2}$
2. Versuch; 33
3. Versuch; 33 } $33\frac{1}{6}$ Sekunden.

XII. Erfahrung. Cylindrische 3 Zoll lange Röhre, mit φ und ψ.

1. Versuch; $27\frac{1}{2}$ Sekunden.
2. Versuch; $27\frac{1}{2}$ Sekunden.

XIII. Erfahrung. Cylindrische 12 Zoll la
Röhre

1. Versuch; 48 Sekunden.
2. Versuch; 48 Sekunden.

XIV. Erfahrung. Cylindrische 12 Zoll la
Röhre, mit φ.

1. Versuch; 42½ Sekunden.
2. Versuch; 42½ Sekunden.

XV. Erfahrung. Cylindrische 12 Zoll la
Röhre, mit ψ.

1. Versuch; 37½ }
2. Versuch; 38 } 37¾ Sekunden.
3. Versuch; 37½ }

XVI. Erfahrung. Cylindrische 12 Zoll la
Röhre, mit φ und ψ.

1. Versuch; 33 }
2. Versuch; 33½ } 33¼ Sekunden.

XVII. Erfahrung. Cylindrische 24 Zoll la
Röhre.

1. Versuch; 50 }
2. Versuch; 51 } 50½ Sekunden.

XVIII. Erfahrung. Cylindrische 24 Zoll la
Röhre, mit φ.

1. Versuch; 46 Sekunden.

XIX. Erfahrung. Cylindrische 24 Zoll la
Röhre, mit ψ.

1. Versuch; 40½ }
2. Versuch; 41 } 40⅚ Sekunden.
3. Versuch; 41 }

X. Erfahrung. Cylindrische 24 Zoll lange Röhre, mit φ und ψ.

1. Versuch; 37½ Sekunden.
2. Versuch; 37½ Sekunden.

XI. Erfahrung. Cylindrische 36 Zoll lange Röhre.

1. Versuch; 54 Sekunden.
2. Versuch; 54 Sekunden.

XXII. Erfahrung. Cylindrische 36 Zoll lange Röhre, mit φ.

1. Versuch; 49½ Sekunden.
2. Versuch; 49½ Sekunden.

XXIII. Erfahrung. Cylindrische 36 Zoll lange Röhre, mit ψ. Das Wasser folgte nicht den Wänden der Röhre ψ, sondern nur dem Untertheil derselben.

1. Versuch; 52½ Sekunden.

Wenn das Wasser genöthigt wurde, den Wänden der Röhre ψ zu folgen.

2. Versuch; 44 Sekunden.
3. Versuch; 44 Sekunden.
4. Versuch; 44 Sekunden.

XXIV. Erfahrung. Cylindrische 36 Zoll lange Röhre, mit φ und ψ.

1. Versuch; 40½ Sekunden.
2. Versuch; 40½ Sekunden.

XXV. Erfahrung. Cylindrische 48 Zoll lange Röhre.

1. Versuch; 58 Sekunden.
2. Versuch; 58 Sekunden.

XXVI. Erfahrung. Cylindrische 48 Zoll lange Röhre, mit φ.

1. Versuch; $53\frac{1}{2}$ } $53\frac{1}{4}$ Sekunden.
2. Versuch; 53

XXVII. Erfahrung. Cylindrische 48 Zoll lange Röhre, mit ψ. Das Wasser folgt den Wänden der Röhre.

1. Versuch; 48 Sekunden.
2. Versuch; 48 Sekunden.

XXVIII. Erfahrung. Cylindrische 60 Zoll lange Röhre.

1. Versuch; 61 Sekunden.
2. Versuch; 61 Sekunden.

XXIX. Erfahrung. Cylindrische 60 Zoll lange Röhre, mit φ.

1. Versuch; 57 } $56\frac{3}{4}$ Sekunden.
2. Versuch; $56\frac{1}{2}$

XXX. Erfahrung. Cylindrische 60 Zoll lange Röhre, mit ψ. Das Wasser folgte den Wänden der Röhre ψ, außer etwa $\frac{1}{3}$ des Obertheils blieb unausgefüllt, und das Wasser war durch keinen Kunstgriff dahin zu bringen, daß es die Röhre ganz ausfüllte.

1. Versuch; 52 Sekunden.
2. Versuch; 52 Sekunden.

98. §.

Um die vorstehenden Erfahrungen besser zu übersehen und auf eine gemeinschaftliche Einheit zurück zu führen, darf man nur nach 115. §. die Zeit bestimmen, in welcher bei der anfänglichen Druckhöhe von 3 Fuß, und den übrigen bekannten Abmessungen, 4156 Kubikzoll Wasser durch eine 1 Zoll

te kreisförmige Öfnung ablaufen, indem man
ausſetzt, daß weder Contraction noch andere
nderniſſe die Bewegung des Waſſers aufhalten,
dern daſſelbe eben die Geſchwindigkeit in der
nung, wie ein frei fallender Körper erlangt.
eſes giebt die Zeit für die hypothetiſche Waſſer-
nge = 36,745 Sekunden, und weil ſich die
iten des Ausfluſſes gleicher Waſſermengen, bei
ichen Gefäßen ohne Zufluß, die ſich mit ver-
iedener Contraction ausleeren, umgekehrt wie die
aſſermengen verhalten, welche bei unveränderten
uckhöhen und mit derſelben Contraction in glei-
n Zeiten auslaufen würden *), ſo giebt dies ein
htes Mittel, bei ſämmtlichen vorſtehenden Er-
rungen, anzugeben, wie ſich die Waſſermenge
lche bei unveränderter Druckhöhe ausgelaufen
re, zur hypothetiſchen verhält. Anfänger wer-
die hier angegebenen Verhältnißzahlen ſo lange

) Wenn T die Zeit iſt, in welcher ſich das Gefäß,
en Querſchnitt A und Ausflußöfnung a iſt, ohne
traction bei der anfänglichen Druckhöhe h, um die
ſe k ausleert, und t dieſe Zeit für eine beſtimmte
traction bei eben dieſem Gefäße bezeichnet. Wenn
er bei unveränderter Druckhöhe h in der Zeit τ ohne
traction die Waſſermenge M, und in eben der Zeit
Contraction die Waſſermenge m ausläuft, ſo iſt
§.

$$T = \frac{2}{2\sqrt{g}} [\sqrt{h} - \sqrt{(h-k)}] \frac{A}{a} \text{ und}$$

$$t = \frac{2}{\alpha} [\sqrt{h} - \sqrt{(h-k)}] \frac{A}{a}.$$

ner $M = \tau a 2\sqrt{g}\sqrt{h}$ und
$m = \tau a \alpha\sqrt{h}$; daher verhält ſich
$T : t = \alpha : 2\sqrt{g}$ und
$m : M = \alpha : 2\sqrt{g}$ folglich
$T : t = m : M$.

als Wahrheit annehmen, bis sie mit Hülfe des folgenden fünften Kapitels, von der Richtigkeit dieser Rechnung überzeugt sind. Es ist nur noch zu bemerken, daß in der letzten Spalte der folgenden Tafel, die hypothetische Wassermenge wie bisher = 1 gesetzt ist, und daß die Versuche eben so aufeinander folgen, wie sie vorhin beschrieben sind.

Erste Tafel.

Einmündung. φ	Länge der 1 Zoll weiten Röhre. Zoll.	Ausmündung. ↓	Beobachtete Zeit. Sekunden.	Verhältniß der hypothetischen Wassermenge zur wirklichen.
	$\frac{1}{24}$		$59\frac{1}{2}$	0,6176
φ′	0		40	0,9186
φ	0		$37\frac{1}{2}$	0,9798
	0	↓	$31\frac{1}{4}$	1,1758
φ	0	↓	$23\frac{2}{3}$	1,5526
	1		$59\frac{1}{2}$	0,6176
φ	1		$38\frac{1}{4}$	0,9606
φ	1	↓	$27\frac{1}{2}$	1,3362
	3		$44\frac{3}{4}$	0,8211
φ	3		$38\frac{3}{4}$	0,9482
	3	↓	$33\frac{1}{8}$	1,1079
φ	3	↓	$27\frac{1}{2}$	1,3362
	12		48	0,7655
φ	12		$42\frac{1}{2}$	0,8646
	12	↓	$37\frac{1}{2}$	0,9798
φ	12	↓	$33\frac{1}{4}$	1,1051
	24		$50\frac{1}{2}$	0,7276
φ	24		46	0,7988
	24	↓	$40\frac{5}{8}$	0,8999
φ	24	↓	$37\frac{1}{2}$	0,9798
	36		54	0,6804
φ	36		$49\frac{1}{2}$	0,7423
	36	↓	44	0,8351
φ	36	↓	$40\frac{1}{2}$	0,9073
	48		58	0,6335
φ	48		$53\frac{1}{4}$	0,6900
	48	↓	48	0,7655
	60		61	0,6024
φ	60		$56\frac{1}{4}$	0,6475
	60	↓	52	0,7066

In der vorstehenden Tafel sind sämmtliche Ver=
he nach der Länge der einen Zoll weiten Röhren

φ′ bedeutet die Mündung mit abgerundeten Kanten.

geordnet; stellt man aber diejenigen Versuche zusammen, welche sich auf Röhren von einerlei Art beziehen, so entstehen zur bessern Vergleichung noch folgende vier Tafeln.

Zweite Tafel.

N.	Länge der Röhre. Zoll.	Beobachtete Zeit. Sekunden.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
1	$\frac{1}{24}$	$59\frac{1}{2}$	0,6176
2	1	$59\frac{1}{2}$	0,6176
3	3	$44\frac{3}{4}$	0,8211
4	12	48	0,7655
5	24	$50\frac{1}{2}$	0,7276
6	36	54	0,6804
7	48	58	0,6335
8	60	61	0,6024

Dritte Tafel.

N.	Einmündung.	Länge der Röhre. Zoll.	Beobachtete Zeit. Sekunden.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
1	φ	0	40	0,9186
2	φ	1	$38\frac{1}{4}$	0,9606
3	φ	3	$38\frac{3}{4}$	0,9482
4	φ	12	$42\frac{4}{5}$	0,8646
5	φ	24	46	0,7988
6	φ	36	$49\frac{1}{2}$	0,7423
7	φ	48	$53\frac{1}{4}$	0,6900
8	φ	60	$56\frac{3}{4}$	0,6475

Vierte Tafel.

N.	Länge der Röhre. Zoll.	Ausmündung. Zoll.	Beobachtete Zeit. Sekunden.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
1	0	ψ	31¼	1,1758
2	3	ψ	33⅛	1,1079
3	12	ψ	37½	0,9798
4	24	ψ	40⅝	0,8999
5	36	ψ	44	0,8351
6	48	ψ	48	0,7655
7	60	ψ	52	0,7066

Fünfte Tafel.

N.	Einmünd.	Länge der Röhre. Zoll	Ausmünd.	Beobachtete Zeit Sekunden	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
1	φ	0	ψ	23⅔	1,5526
2	φ	1	ψ	27½	1,3361
3	φ	3	ψ	27½	1,3361
4	φ	12	ψ	33¼	1,1051
5	φ	24	ψ	37½	0,9798
6	φ	36	ψ	40½	0,9073

99. §.

Die in vorstehenden Tafeln geordneten Erfahrungen, berechtigen zu folgenden Schlüssen.

1. Unter übrigens gleichen Umständen verhalten sich die Wassermengen bei einer Öfnung in einer dünnen Wand, zur Mündung φ, nach der Form des zusammengezogenen Strahls,

wenn die Ausmündung der Röhre φ gl
Weite mit der Öfnung in der dünnen W
hat, wie

$$40 : 59\tfrac{1}{2} = 1 : 1{,}487.$$

Sind die scharfen Kanten der Mündun
abgerundet, wie

$$37\tfrac{1}{2} : 59\tfrac{1}{2} = 1 : 1{,}587.$$

II. Bei einer Öfnung in einer dünnen Wand,
Mündung ψ, wenn die Einmündung
Röhre ψ der Öfnung in der dünnen W
gleich ist, wie

$$31\tfrac{1}{4} : 59\tfrac{1}{2} = 1 : 1{,}904$$

III. Bei einer Öfnung in einer dünnen W
zu der aus den Röhren φ und ψ zusam
gesetzten Mündung, wie

$$23\tfrac{2}{3} : 59\tfrac{1}{2} = 1 : 2{,}514.$$

Es ist bemerkenswerth, daß durch diese
sammensetzung um die Hälfte mehr W
ausläuft, als wenn das Wasser wie ein
fallender Körper beschleuniget würde.

IV. Die Wassermenge bei einer kurzen Ansatzrö
verhält sich zu der, mit der kurzen Ansatzr
verbundenen Einmündung φ, wie

$$38\tfrac{3}{4} : 44\tfrac{3}{4} = 1 : 1{,}154.$$

V. Bei einer kurzen Ansatzröhre, zu dieser R
mit der Ausmündung ψ verbunden, wie

$$33\tfrac{1}{6} : 44\tfrac{3}{4} = 1 : 1{,}349.$$

VI. Bei einer kurzen Ansatzröhre, zu dieser
der Ein- und Ausmündung φ und ψ verb
denen Röhre, wie

$$27\tfrac{1}{2} : 44\tfrac{3}{4} = 1 : 1{,}627.$$

[A]nmerk. So weit diese Schlüsse von Oefnungen in einer dünnen Wand oder von kurzen Ansatzröhren gelten, können sie durch die beschriebenen Versuche gerechtfertiget werden; wenn aber Herr Venturi (a. a. O. Prop. VII. p. 38) behauptet, daß man durch angemessene Ein- und Ausmündungen bei jeder cylindrischen Röhre die Wassermenge im Verhältniß von 10 zu 24 vermehren könne, und sich dieserhalb auf seine Versuche mit 3 Zoll langen Röhren beruft, so ist offenbar der Schluß von kurzen Ansatzröhren zu weit ausgedehnt, wenn er von jeder cylindrischen Röhre gelten soll.

Daß bei längern Röhren die Wassermenge nicht in einem eben so großen Verhältnisse vermehrt wird, wie bei kurzen Ansatzröhren, beweisen meine Versuche hinlänglich, und es muß irgend eine Röhrenlänge geben, wo die Mündungen φ und ψ gar keine Vermehrung der Wassermenge bewirken.

Vergleicht man die Wassermengen der zweiten Tafel mit denen der dritten, so stehen die Vermehrungen welche durch die Einmündung φ bewirkt werden, in folgenden Verhältnissen:

Länge der Röhre						
3 Zoll	$38\frac{1}{4}$	:	$44\frac{1}{4}$	=	1 :	1,154
12 „	$42\frac{1}{2}$	:	48	=	1 :	1,129
24 „	46	:	$50\frac{1}{2}$	=	1 :	1,098
36 „	$49\frac{1}{2}$	:	54	=	1 :	1,091
48 „	$53\frac{1}{4}$	:	58	=	1 :	1,089
60 „	$56\frac{3}{4}$	:	61	=	1 :	1,075

woraus hervorgeht, daß die Mündung φ die Wassermenge bei langen Röhren nicht eben so vermehrt, wie bei kurzen Ansatzröhren.

Dasselbe gilt von der Ausmündung ψ.

Länge der Röhre						
3 Zoll	$33\frac{1}{6}$	:	$44\frac{3}{4}$	=	1 :	1,349
12 „	$37\frac{1}{2}$	:	48	=	1 :	1,280
24 „	$40\frac{5}{6}$	:	$50\frac{1}{2}$	=	1 :	1,236
36 „	44	:	54	=	1 :	1,227
48 „	48	:	58	=	1 :	1,208
60 „	52	:	61	=	1 :	1,173

Aehnliche Abnahme in der Vermehrung der W
sermenge findet man für längere Röhren, wenn
Mündungen φ und ψ zusammen angebracht we
auch habe ich zur Ueberzeugung, daß bei eine
wissen Länge der Röhre, die Mündung ψ
Vermehrung der Wassermenge bewirke, unter 3
Druckhöhe, mit einer 20 Fuß langen Röhre
suche angestellt, bei welcher immer eben die
Wassermenge in gleicher Zeit erhalten wurde,
mogte ψ anbringen oder nicht; auch war es
möglich zu bewerkstelligen, daß das Wasser die g
Röhre ψ ausfüllte, weil es sich immer von
obern Theil derselben losriß.

Wenn es nun gleich wahrscheinlich ist, daß
kleinere Geschwindigkeiten des ausfließenden W
sers, die Weite der Ausmündung der Röhre ψ
ner werden muß, so läßt sich doch absehen,
wenn hiedurch auch eine geringe Vermehrung
Wassermenge bewirkt wird, diese doch nie so
trächtlich seyn kann, wie sie Herr Venturi ang

100. §.

Um die verschiedenen Werthe zusammen
stellen, welche bei der Bestimmung der mittl
Geschwindigkeit c, für eine gegebene Druckhöh
nach den verschiedenen Arten des Ausflusses, in
vorzüglichsten Fällen der Ausübung nöthig
dient die nachstehende Auseinandersetzung, bei
cher, außer eigenen Erfahrungen, zugleich die
gen Angaben benutzt worden, welche Herr
Buat*) in seiner Hydraulik (1. B. 1. Absch. 1.
gegeben hat.

---

*) Principes d'Hydrauliques vérifiés par un gr
nombre d'Expériences faites par ordre du Gou
nement. Par M. le Chevalier *du Buat*. Nouv
édition. Tom. I et II. à Paris 1786. (Tom. I. Se
Chap. 1.)

Von dem ersten Theile dieses Werkes hat man
deutsche Uebersetzungen, wovon die des Herrn Profes

Zur Bestimmung der hypothetischen Geschwinschwindigkeit, oder für den freien Fall der Körper von einer Höhe h, erhält man (16. §.) die erforderliche Geschwindigkeit

$$c = 7{,}9 \sqrt{h} \text{ und}$$
$$h = \frac{c^2}{62{,}5} = 0{,}016 \, . \, c^2.$$

Bei Mündungen an einem Behälter, von der Gestalt des zusammengezogenen Strahls (95. §.)

$$c = 7{,}646 \sqrt{h}$$
$$h = \frac{c^2}{58{,}46} = 0{,}0171 \, . \, c^2.$$

Bei breiten Gerinnen, deren Sohle bei ihrer Einmündung mit dem Boden des Behälters gleich hoch liegen; bei Freischleusen mit Flügelwänden ohne Schützöfnung; bei langen Einbauen welche eine schräge Lage haben, und bei Brückenpfeilern mit zugespitzten Vordertheilen

$$c = 7{,}54 \sqrt{h}$$
$$h = \frac{c^2}{56{,}85} = 0{,}0176 \, . \, c^2.$$

7. Bei schmalen Gerinnen, deren Sohle bei ihrer Einmündung mit dem Boden des Behälters gleich hoch liegt; bei Schützöfnungen in Freiarchen mit Flügelwänden; bei steilen Einbauen und Brückenpfeilern mit graden Vordertheilen

$$c = 6{,}76 \, . \sqrt{h}$$
$$h = \frac{c^2}{45{,}7} = 0{,}0219 \, . \, c^2.$$

…smann, von mir mit Anmerkungen und Zusätzen ver…en, im Jahre 1796 herausgegeben ist. Die zweite …ersetzung, welche ebenfalls Zusätze enthäl… …rrn Prof. Lempe.

V. Bei kurzen Ansatzröhren, deren Lä[nge]
bis 4mal so groß ist als der Durchme[sser der]
Öfnung (94. §.)

$$c = 6{,}42 \sqrt{h}$$

$$h = \frac{c^2}{41{,}22} = 0{,}0242 \cdot c^2.$$

VI. Für Schützöfnungen ohne Flügel
im Bord eines Behälters mit dicken
den oder an Schleusenthoren

$$c = 5 \sqrt{h}$$

$$h = \frac{c^2}{25} = 0{,}04 \cdot c^2.$$

VII. Bei Öfnungen in einer dünnen
(93. §.)

$$c = 4{,}89 \sqrt{h}$$

$$h = \frac{c^2}{23{,}95} = 0{,}0417 \cdot c^2.$$

VIII. Der kürzern Bezeichnung wegen wird
Folge zur Bestimmung der Werthe
und h ein allgemeines Zeichen gebrauc[ht]
der Coefficient mit welchem $\sqrt{h}$ mul[tiplicirt]
werden muß, um c zu finden, $= \alpha$
so daß ganz allgemein

$$c = \alpha \sqrt{h} \text{ also}$$

$$c^2 = \alpha^2 h \text{ und}$$

$$h = \frac{c^2}{\alpha^2}$$

gesetzt wird, da denn nach den besonder[n Um-]
ständen, statt α *) die nöthigen Wer[the ge-]
setzt werden können.

*) Dieser Buchstabe ist um so mehr zu bemer[ken, weil]
solcher in der Folge immer die hier gegebene Be[deutung]
behalten wird, so daß α und α^2 hier in der H[ydraulik]
eben so, wie $2\sqrt{g}$ und $4g$ beim freien Falle [der Kör-]
per vorkommen, nur daß erstere nach den Umstän[den an-]
dere Werthe erhalten, letztere aber unveränderlic[h]

Um die vorhin gegebenen Coefficienten und die
von abhängenden Zahlen, welche in der Folge
r oft gebraucht werden, besser zu übersehen, dient
lgende Tafel.

I.		α	α^2	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$
I.	Freier Fall der Körper	7.91	62,50	0,1265	0,0160
II.	Mündungen von der Gestalt des zusammengez. Strahls	7,646	58,40	0,1308	0,0171
III.	Breite Gerinne. Freischleusen mit Flügelwänden. Schräge Einbaue. Spitze Brückenpfeiler	7,54	56,85	0,1326	0,0176
IV.	Schmale Gerinne. Schutzöfnungen mit Flügelwänden. Steile Einbaue. Grade Brückenpfeiler	6,76	45,70	0,1480	0,0219
V.	Kurze Ansatzröhren	6,42	41,22	0,1558	0,02[illegible]
VI.	Schutzöfnungen ohne Flügelwände	5,00	25,00	0,2000	0,0400
VII.	Öfnungen in dünnen Wänden	4,89	23,91	0,2045	0,0417

Anmerk. Die vorstehende Tafel ist zwar in den gewöhnlichen Fällen der Ausübung zur Bestimmung der Wassermenge hinreichend. Weil aber die Zusammenziehung geringer ist, wenn bei unveränderten Querschnitte des zuströmenden Wassers, die Ausflußöfnung größer wird, und gänzlich wegfiele, wenn beide einander gleich wären, so setze man daß

A den Flächeninhalt vom senkrechten Querschnitte des gegen die Ausflußöfnung strömenden Wassers, und

a den Flächeninhalt d[illegible] fnung bezeichne,

so muß in Absicht de[illegible] für a = A

$c =$

und für $\frac{a}{A} = 0$, oder bei einem sehr weiten [Be-]hälter, wo a gegen A sehr klein ist

$$c = \alpha \sqrt{h} \text{ seyn.}$$

Beide Bedingungen, in welchen zugleich die ä[ußer-]sten Grenzen von c bei einerlei Druckhöhe h [ent-]halten sind, werden erfüllt, wenn man

$$c = \frac{\alpha \sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{4g}\right)\frac{a}{A}\right]}}$$

setzt, und man könnte sich dieses Ausdrucks [bedie-]nen, wenn die mittlere Geschwindigkeit genaue[r als] gewöhnlich in Rechnung gebracht werden sollt[e.]

Für Oefnungen in einer dünnen Wand ist hi[er]

$$c = \frac{4{,}89 \sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 - \frac{771}{1250}\frac{a}{A}\right]}}$$

und alsdann für a = A

$$c = 7{,}9 \sqrt{h}$$

für $\frac{a}{A} = 0$

$$c = 4{,}89 \sqrt{h}$$

wie erfordert wird.

Auch ist es den Versuchen gemäß, anzunehmen, [daß] bei einem größern Umfange gleich großer Oe[ffnun-]gen, der Ausfluß geringer wird. Es fehlen [aber] hierüber noch die nähern Versuche, um einen [allge-]meinen Ausdruck dadurch zu begründen.

Zweites Kapitel.

Vom Ausflusse des Wassers durch horizontale und kleine Seitenöfnungen, eines beständig voll erhaltenen Gefäßes.

101. §.

Man setze, daß

h die Druckhöhe,

c die mittlere Geschwindigkeit in der Öfnung,

a den Flächeninhalt der Ausflußöfnung, und

M die Wassermenge in jeder Sekunde bezeichne,

so ist, weil

$$M = ac$$

I. die Wassermenge

$$M = a\alpha\sqrt{h}$$

II. die Druckhöhe

$$h = \frac{1}{\alpha^2} \frac{M^2}{a^2}$$

III. der Inhalt der Öfnung

$$a = \frac{1}{\alpha} \frac{M}{\sqrt{h}}$$

Fließt in irgend einer Zeit von t Sekunden die Wassermenge = N aus, so ist $N = Mt$ oder $t = \frac{N}{M}$, daher

IV. die Zeit, in welcher die Wassermenge N abfließt

$$t = \frac{N}{\alpha a \sqrt{h}}$$

102. §.

Vorstehende allgemeine Ausdrücke lassen
am besten durch Beispiele erläutern.

1. Beispiel. In der dünnen Wand eines Gefäßes
findet sich eine Oefnung, deren Inhalt 6 □ Z
ist; wie viel Wasser wird in jeder Sekunde a
laufen, wenn die der Oefnung zugehörige Druckh
8 Fuß beträgt?

Hier ist $a = 6 \square$ Zoll $= \frac{1}{24} \square$ Fuß, $\alpha = 4$
daher die Wassermenge

$$M = \tfrac{1}{24} \cdot 4{,}89 \sqrt{8} = 0{,}576 \text{ Kubikfuß}$$
$$= 995 \text{ Kubikzoll.}$$

Für eine kurze Ansatzröhre ist die Rechnung diese
außer daß $\alpha = 6{,}42$ gesetzt werden muß.

2. Beispiel. An einem Gefäße, welches alle 9 Sek
den, 4 Kubikfuß Wasser Zufluß hat, befindet
eine kurze Ansatzröhre, oder eine Oefnung in e
dicken Wand, deren Inhalt 3 □ Zoll betr
Wie hoch wird das Wasser über der Mitte
Oefnung stehen bleiben, damit der Zufluß d
Abflusse gleich ist?

Hier ist $M = \frac{4}{9}$ K. F; $a = 3 \square$ Zoll $= \frac{1}{48} \square$
$\frac{1}{\alpha} = 0{,}0242$, daher die gesuchte Höhe

$$h = 0{,}0242 \left(\frac{4}{9 \cdot \frac{1}{48}}\right)^2 = 11{,}014 \text{ Fuß.}$$

3. Beispiel. Ein Wasserbehälter hat in jeder Sek
de $\frac{1}{2}$ Kubikfuß Zufluß. Wie viel muß der
halt des Querschnitts einer kurzen Ansatzröhre
tragen, damit das Wasser über der Ausflußöfn
11 Fuß hoch stehe?

$M = \frac{1}{2}$ K. F; $h = 11$, daher der Fläche
halt der Oefnung

$$a = 0{,}1558 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} = 0{,}02338 \square \text{ Fuß}$$
$$= 3{,}36 \square \text{ Zoll.}$$

Beispiel. Wie viel Zeit wird verfliessen, damit durch eine kreisförmige Oefnung in einer dünnen Wand von 1 Zoll Durchmesser, bei einer Druckhöhe von 3 Fuß, 4 Kubikfuß Wasser ausfließen?

Es ist $a = 0{,}785 \;\square$ Zoll $= \frac{0{,}785}{144} \;\square$ Fuß, $h = 3$ Fuß und $N = 4$ Kubikfuß, daher die gesuchte Zeit

$$t = \frac{4}{4{,}89 \frac{0{,}785}{144} \sqrt{3}} = 86{,}6 \text{ Sekunden.}$$

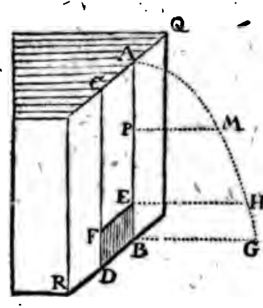
Zur Abkürzung obiger Rechnungen, kann man sich mit vielem Vortheile der Logarithmen bedienen.

Drittes Kapitel.

Vom Ausflusse durch oben offene rechtwi[...] lichte Oefnungen, in den Seitenwän[...] eines Behälters.

103. §.

Im zweiten Kapitel ist vorausgesetzt worden, bei Seitenöfnungen, die Höhe derselben so g[...] wäre, damit unter den verschiedenen Geschwi[...]keiten, womit das Wasser ausfließt, kein betr[...]licher Unterschied sei; wenn aber diese Geschwi[...]keiten, sehr von einander abweichen, so wird d[...]halb eine eigene Untersuchung erfordert.



Gesetzt, das Gefäß wäre bis A mit Wass[...] gefüllt, und es fließe während so viel zu, da[...] Höhe desselben unverä[...] bleibe, so kann man sich erst in der Vertikallini[...] welche sich in der verti[...] Wand QR befindet, me[...] kleine Öfnungen P, B u. über einander denken, und für jede derselbe[...] dazu gehörige Geschwindigkeit des Wassers [...]stimmen.

Es sei AP = x, die Geschwindigkeit in P so ist

$$y = \alpha \sqrt{x}$$

Ebendasselbe gilt für jede andere Öfnung B,

der Druckhöhe $AB = h$, wenn die Geschwindig- h
keit in $B = c$ gesetzt wird, alsdann ist c

$$c = \alpha \sqrt{h}.$$

Man nehme $PM = \alpha \sqrt{x} = y$

$$BG = \alpha \sqrt{h} = c$$

so verhält sich

$$\left.\begin{array}{l} AP : AB = x : h \\ PM : BG = \sqrt{x} : \sqrt{h} \end{array}\right\} \text{daher}$$

$$AP : AB = PM^2 : BG^2.$$

Weil dieses nun für jede andere Abscisse wie AP und dazu gehörige Ordinate wie PM gilt, so folgt daß die Linie AMHG, welche durch die Endpunkte M, G ꝛc. der auf AB senkrechten Geschwindigkeiten geht, eine Parabel ist.

Denkt man sich nun längs der ganzen Linie AB lauter solche kleine Öfnungen, so wird die Parabelfläche AGBA zur Bestimmung des Inhalts von dem Wasser, welches in einer Sekunde durch die Spalte AB ausfließt, dienen können. Nun ist der Inhalt der Parabelfläche $ABG = \frac{2}{3} AB \,.\, BG = \frac{2}{3} ch$; und wenn die Breite des schmalen Streifens $AB = b'$ gesetzt wird, so findet man die Wassermenge, welche in jeder Sekunde durch die Spalte AB abfließt $= \frac{2}{3} b'ch$, oder wenn man eine rechtwinklichte Öfnung ABCD in der ganzen vertikalen Wand QR annimmt, und die Breite

$$AC = BD = b \text{ setzt,}$$

so wird durch das Rechteck ABCD, wenn das Wasser in unveränderlicher Höhe bei AC erhalten wird, und daselbst als stillstehend angesehen werden kann, in jeder Sekunde die Wassermenge

$$M = \tfrac{2}{3} cbh = \tfrac{2}{3} \alpha bh \sqrt{h}$$

abfließen, vorausgesetzt daß diesem Abflusse keine Hindernisse im Wege stehen.

104. §.

Bei dem wirklichen Ausflusse pflegt sich
Theil der Oberfläche des Wassers oberhalb
Öfnung bei AG zu senken, so daß der Wa
strahl nicht in der ganzen Höhe AB=h auslä
Dieser Abfall des Wassers macht es sehr schwi
einen allgemein gültigen Ausdruck aus theoreti
Gründen zu geben, nach welchem in jedem vork
menden Falle, die Wassermenge bestimmt wer
könnte.

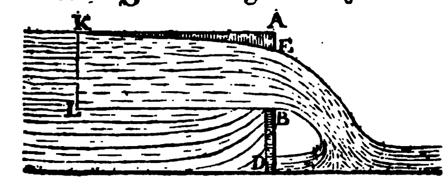
Um sowohl über die Wassermenge als ü
die Gestalt des ausfließenden Strahls urtheilen
können, sind auf meine Veranlassung durch
Herrn Bauinspektor Kypke, bei Bromberg m
rere wichtige Versuche angestellt worden. Ich w
aber nur diejenigen anführen, bei welchen ich s
gegenwärtig war und mit Herrn Kypke gem
schaftlich alle Abmessungen aufzeichnete.

Neben dem Bromberger Kanal, eine Vier
meile von der Stadt Bromberg, befindet sich
kleiner Bach, der auf eine Länge von 260 F
in grader Richtung fließt, und seinen Zufluß
Quellen neben dem Kanal, und theils aus
Kanal selbst erhält. Dieser Bach war auf
Länge von 250 Fuß, nach einer graden Richtu
mit starken Brettern auf 4 Fuß Breite und 3 F
Höhe genau ausgesetzt, so daß das Wasser
einem rechtwinklichten Flußbette laufen konnte.
Oberkante der vertikalen Seitenbretter war h
zontal abgehobelt, um von da ab, bis auf
Oberfläche des Wassers, mit möglichster Genau
keit messen zu können. Es wurden bei dem un
hinderten Laufe des Wassers, mehrere Querp
file gemessen, und mittelst des Stromquadraten
verschiedenen Geschwindigkeiten in denselben bestim
um hieraus die in jeder Sekunde abfließende W
sermenge zu finden. Zur Prüfung dieser Besti
mung wurde aber noch vor und nach den Ver

hen, eine hölzerne Querwand mit einem rechtwinklichten $11\frac{15}{16}$ Zoll breiten und $5\frac{15}{16}$ Zoll hohen Öfnung, welche sich in einer Platte von dünnem Eisenbleche befand, eingesetzt, und, nach eingetretenem Beharrungsstande, konnte aus dem beobachteten Druckwasser über der Öfnung, ebenfalls die Wassermenge bestimmt werden. Sowohl die Ausmessungen der Querprofile, als auch die Prüfung mittelst der Öfnung in einer dünnen Wand, gaben eine gute Übereinstimmung, und man fand die in jeder Sekunde durch den Kanal abfließende Wassermenge 4021 Kubikzoll = 2,327 Kubikfuß.

Zu den Versuchen mit oben offenen rechtwinklichten Öfnungen, wurden jedesmal in einer Entfernung von 240 Fuß vom Anfange des Kanals, auf die ganze Breite von 4 Fuß, eine Querwand von $1\frac{1}{8}$ Zoll dicken Brettern gesetzt, und in der Mitte dieser Wand, rechtwinklichte, scharf abgehobelte Öfnungen angebracht, deren unterster Rand bei jedem Versuche $7\frac{3}{16}$ Zoll von der Sohle des Kanals abstand. Die erste Öfnung deren man sich bediente, war 6 Zoll breit; nachher wurde solche bis zu 10, 14, 18, $25\frac{3}{4}$ und $41\frac{3}{8}$ Zoll erweitert, und bei einem jeden Versuche zuvor der Beharrungsstand abgewartet, welcher leicht mittelst angebrachter Maaßstäbe, an dem unveränderlichen Stande des Wasserspiegels bemerkt werden konnte.

Um Zweideutigkeiten zu vermeiden, so ist ein für allemal zu bemerken, daß die Höhe AB = KL, welche hier, um sie von der Druckhöhe (88. §.) zu unterscheiden, der Wasserstand (Altitudo aquae, *Hauteur d'eau*) genannt wird, nicht in der Öfnung selbst, sondern allemal da gemessen



werden muß, wo sich der ursprüngliche W
spiegel noch nicht gesenkt hat. Wäre bei K
Grenze des ungesenkten Wasserspiegels, oder
nige Punkt, wo das Wasser eine beschleu
Bewegung annimmt, und bei B die tiefste S
in der Öfnung, so ziehe man BL horizontal
KL vertikal, um den Wasserstand KL = A
erhalten.

Der Punkt K wurde bei den Versuchen
durch bestimmt, daß längs dem Wasserspiege
Elfenbeinkugel des Stromquadraten, so lang
gen die Öfnung zu, eingesenkt wurde, bis
eine merkliche Zunahme der Geschwindigkeit
Wassers verspürte, weil hiedurch der Punkt,
das Wasser eine beschleunigte Bewegung anni
genauer als durch vertikale Tiefenmessung a
mittelt werden konnte, ob es gleich beinahe
möglich ist, sowohl die Entfernung AK, als
die Senkung des Wasserspiegels AE, so g
anzugeben, daß sich nicht kleine Fehler einschle
sollten.

Nachstehende Tafel enthält die Resultate,
che die sorgfältigste Ausmessung gegeben hat;
sind die in Zollen gefundenen Zahlen, der lei
Rechnung wegen, auf Fußmaaß gebracht wo

No. des Versuchs.	Breite der Öfnung. Fuß.	EB Höhe des Strahls in der Öfnung. Fuß.	AE Senkung des Wasserspiegels. Fuß.	AB Wasserstand. Fuß.	AK Abstand des ungesenkten Wasserspiegels. Fuß.
1	0,500	1,219	0,031	1,250	0,330
2	0,833	0,853	0,047	0,900	0,540
3	1,167	0,645	0,075	0,720	0,790
4	1,500	0,523	0,073	0,596	0,810
5	2,146	0,408	0,072	0,480	0,750
6	3,448	0,292	0,052	0,344	0,660

Aus der angegebenen Wassermenge von 2,327 Kubikfuß und der Höhe der Überlaßschwelle von $\frac{3}{16}$ Zoll, läßt sich mit Hülfe dieser Tafel leicht die mittlere Geschwindigkeit des Wassers oberhalb der Öfnung finden.

Anmerk. Ungeachtet die Oefnung $7\frac{1}{8}$ Zoll über der Sohle des Kanals angebracht war, so fand man doch, daß kleine nahe am Boden schwimmende Körper, wenn sie nicht weit von der Oefnung ankamen, sich allmählich vom Grunde in die Höhe bewegten, und so durch die Oefnung gingen.

Die Oberfläche des Strahls in der Oefnung bildete bei allen Versuchen eine zweimal eingebogene krumme Linie, welche in der Mitte und an beiden Rändern der Oefnung, ihre größte Höhe hatte, aber wegen ihrer unmerklichen Abweichung von einer graden Linie nicht ausgemessen werden konnte.

Die Gestalt welche der ausfließende Strahl annimmt, ist merkwürdig, weshalb die nachstehende Figur eine ungefähre Abbildung von demjenigen

werden muß, wo sich der ursprüngliche Wa
spiegel noch nicht gesenkt hat. Wäre bei K
Grenze des ungesenkten Wasserspiegels, oder d
tige Punkt, wo das Wasser eine beschleuni
Bewegung annimmt, und bei B die tiefste S
in der Öfnung, so ziehe man BL horizontal
KL vertikal, um den Wasserstand KL = AI
erhalten.

Der Punkt K wurde bei den Versuchen
durch bestimmt, daß längs dem Wasserspiege
Elfenbeinkugel des Stromquadraten, so lang
gen die Öfnung zu, eingesenkt wurde, bis
eine merkliche Zunahme der Geschwindigkeit
Wassers verspürte, weil hiedurch der Punkt,
das Wasser eine beschleunigte Bewegung anni
genauer als durch vertikale Tiefenmessung au
mittelt werden konnte, ob es gleich beinahe
möglich ist, sowohl die Entfernung AK, als
die Senkung des Wasserspiegels AE, so ge
anzugeben, daß sich nicht kleine Fehler einschle
sollten.

Nachstehende Tafel enthält die Resultate,
che die sorgfältigste Ausmessung gegeben hat;
sind die in Zollen gefundenen Zahlen, der leic
Rechnung wegen, auf Fußmaaß gebracht wor

No. des Versuchs.	Breite der Öfnung.	EB Höhe des Strahls in der Öfnung.	AE Senkung des Wasserspiegels.	AB Wasserstand.	AK Abstand des ungesenkten Wasserspiegels.
	Fuß.	Fuß.	Fuß.	Fuß.	Fuß.
1	0,500	1,219	0,031	1,250	0,330
2	0,833	0,853	0,047	0,900	0,540
3	1,167	0,645	0,075	0,720	0,790
4	1,500	0,523	0,073	0,596	0,810
5	2,146	0,408	0,072	0,480	0,750
6	3,438	0,292	0,052	0,344	0,660

Aus der angegebenen Wassermenge von 2,327 Kubikfuß und der Höhe der Überlaßschwelle von $7\frac{3}{10}$ Zoll, läßt sich mit Hülfe dieser Tafel leicht die mittlere Geschwindigkeit des Wassers oberhalb der Öfnung finden.

Anmerk. Ungeachtet die Oefnung $7\frac{1}{8}$ Zoll über der Sohle des Kanals angebracht war, so fand man doch, daß kleine nahe am Boden schwimmende Körper, wenn sie nicht weit von der Oefnung ankamen, sich allmählich vom Grunde in die Höhe bewegten, und so durch die Oefnung gingen.

Die Oberfläche des Strahls in der Oefnung bildete bei allen Versuchen eine zweimal eingebogene krumme Linie, welche in der Mitte und an beiden Rändern der Oefnung, ihre größte Höhe hatte, aber wegen ihrer unmerklichen Abweichung von einer graden Linie nicht ausgemessen werden konnte.

Die Gestalt welche der ausfließende Strahl annimmt, ist merkwürdig, weshalb die nachstehende Figur eine ungefähre Abbildung von demjenigen

Für Öfnungen in der Wand eines Behäl
ohne Flügelwände ist $\alpha = 5$, also

$$M = \tfrac{10}{3}\, b h \sqrt{h}.$$

Wenn sich die Öfnung in einem Freigeri
mit Flügelwänden befindet, so ist $\alpha = 6,$
also $\tfrac{2}{3}\alpha = 4,506$ oder sehr nahe $= \tfrac{9}{2}$, daher

$$M = \tfrac{9}{2}\, b h \sqrt{h}.$$

Beispiel. An einem See, in welchem die Oberflä
des Wassers als stillstehend angenommen wer
kann, befindet sich eine oben offene rechtwinkli
Ausflußöfnung ohne Flügelwände, durch wel
das Wasser frei abfließen kann. Die Breite
Oefnung ist 3 Fuß, und die Höhe des Wass
standes 2 Fuß. Wie viel Wasser wird in je
Sekunde abfließen, wenn dieser Wasserstand
verändert bleibt?

Hier ist $b = 3$, $h = 2$ daher

$M = \tfrac{10}{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 28{,}28$ Kubikfuß.

107. §.

Weil $\tfrac{2}{3}\alpha b h \sqrt{h} = M$, so ist

$$h\sqrt{h} = \frac{M}{\tfrac{2}{3}\alpha b} \text{ oder quadrirt}$$

$$h^3 = \left[\frac{M}{\tfrac{2}{3}\alpha b}\right]^2 \text{ daher}$$

findet man allgemein den Wasserstand oder di
Höhe des ungesenkten Wasserspiegels über den
Fachbaum

$$h = \sqrt[3]{\left[\frac{M}{\tfrac{2}{3}\alpha b}\right]^2}$$

oder wen[illegible]an sich der Logarithmen bedient

so [illegible] $= \tfrac{1}{3}\,[\text{Log. } M - \text{Log. } (\tfrac{2}{3}\alpha b)]$

Bei Überfällen in der Wand eines Behäl-
s ist $\alpha = 5$, daher

$$h = \sqrt[3]{\left[\frac{3\,M}{10\,.\,b}\right]^2}$$

eispiel. Ein See hat in jeder Sekunde 200 Kubikfuß Wasser Zufluß. Wie tief wird der Fachbaum eines 6 Fuß breiten Ueberfalls unter dem horizontalen Wasserspiegel angelegt werden müssen, damit in jeder Sekunde diese Wassermenge abfließt?

Hier ist M = 200, b = 6 man findet daher die gesuchte Tiefe oder den Wasserstand

$$h = \sqrt[3]{\left[\frac{3\,.\,200}{10\,.\,6}\right]^2}$$

Hier ist $\frac{3\,.\,200}{10\,.\,6} = 10$, also die gesuchte Tiefe des Fachbaums unter dem horizontalen Wasserspiegel

$$h = \sqrt[3]{100} = 4{,}64 \text{ Fuß.}$$

108. §.

Nach 103. §. findet man ganz allgemein die reite des Überfalls

$$b = \frac{M}{\frac{2}{3}\,.\,\alpha\, h \sqrt{h}}$$

er wenn $\alpha = 5$ gesetzt wird

$$b = \frac{3\,M}{10\,.\,h \sqrt{h}}$$

1. Beispiel. In der Wand eines Wasserbehälters, in welchem man die Oberfläche des Wassers als stillstehend ansehen kann, soll eine oben offene rechtwinklichte Ausflußöfnung so angelegt werden, daß ihr unterer Rand 4 Fuß tief unter dem Wasserspiegel liegt. Wie breit wird man solche machen müssen, damit in jeder Sekunde 150 Kubikfuß abfließen?

M = 150, h = 4 daher die erfor-

$$\frac{3\,.\,150}{\sqrt{4}} = 5{,}62 \text{ Fuß.}$$

horizontalen Durchschnitt enthält, welcher mit Ueberlaufsschwelle in gleicher Höhe genommen



AB ist die Breite des ausfließen Strahls, AC, BD sind die 1⅓ dicken Bohlenwände, und AEGIH die Grundfläche des ausfließen Strahls, der bei E und F eine ßerordentliche Zusammenziehung er det, sich aber bei G und H plöt wieder ausbreitet. Diese horizontale Grundfl des Strahls, wird weit stärker zusammengezogen die Oberfläche desselben, welche von oben angese ungefähr die Gestalt wie AKGIHLB hat, wie ein Mantel überhängt.

105. §.

Um die Versuche mit dem im 103. §. gefunde allgemeinen Ausdruck $M = \frac{2}{3} \alpha b h \sqrt{h}$ zu gleichen, würde erfordert, daß die Geschwindig des zufließenden Wassers so gering wäre, daß che im Punkte des ungesenkten Wasserspiegels = angenommen werden könnte, welches zwar n mit aller Schärfe zutrift, aber doch wegen geringen Einflusses auf die Rechnung, hier Seite gesetzt werden kann.

Stellt man sich vor, daß der ausfließe Wasserstrahl nicht nur eine Contraction an Rändern der Ofnung, sondern auch in seiner O fläche erleidet, so lassen sich zwar diese an sich verschiedenen Zusammenziehungen nicht als eine ansehen, man könnte aber, ohne den Einfluß e jeden auf die Wassermenge besonders zu bestimm sich damit begnügen, die Größe des Coeffiziente aus den Versuchen zu bestimmen. Berechnet m die Werthe von

$$\frac{M}{b h \sqrt{h}} = \frac{2}{3} \alpha$$

so entstehet die folgende Tafel.

N°.	b	h	M	$\frac{2}{3}a$
1	0,500	1,250	2,327	3,330
2	0,833	0,900	2,327	3,271
3	1,167	0,720	2,327	3,334
4	1,500	0,596	2,327	3,372
5	2,146	0,480	2,327	3,261
6	3,448	0,344	2,327	3,337

Nimmt man als einen Mittelwerth $a = 5$ so

$$\frac{2}{3} a = 3,333 = \frac{10}{3} \text{ so wird}$$

$$M = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot bh\sqrt{h} = \frac{10}{3} bh\sqrt{h}$$

nd man sieht daraus, daß sich die Contraction ben so wie 100. §. N. VI. bei Schutzöfnungen in freigerinnen ohne Flügelwände, in Rechnung brinen läßt.

Aus den du Buatschen Versuchen (1ster Band 43. §. meiner Zusätze) folgt $\frac{2}{3} a = 3,3014$, welhes nicht viel von obiger Bestimmung abweicht, o daß der hier angenommene Werth so lange in er Ausübung beibehalten werden kann, bis noch nannichfaltigere Versuche und eine erschöpfende Theorie, die noch fehlenden Modifikationen anreben.

106. §.

Es läßt sich daher allgemein die Wassermenge

$$M = \frac{2}{3} a bh\sqrt{h}$$

tzen, nur muß in jedem besondern Falle der Coeficient a nach 100. §. bestimmt werden.

horizontalen Durchschnitt enthält, welcher mit
Ueberlaufsschwelle in gleicher Höhe genommen



AB ist die Breite des ausfließen
Strahls, AC, BD sind die $1\frac{1}{2}$
dicken Bohlenwände, und AEGIH
die Grundfläche des ausfließen
Strahls, der bei E und F eine
ßerordentliche Zusammenziehung e
det, sich aber bei G und H plötz
wieder ausbreitet. Diese horizontale Grundfl
des Strahls, wird weit stärker zusammengezogen
die Oberfläche desselben, welche von oben angese
ungefähr die Gestalt wie AKGIHLB hat,
wie ein Mantel überhängt.

105. §.

Um die Versuche mit dem im 103. §. gefunde
allgemeinen Ausdruck $M = \frac{2}{3}\alpha b h \sqrt{h}$ zu
gleichen, würde erfordert, daß die Geschwindig
des zufließenden Wassers so gering wäre, daß
che im Punkte des ungesenkten Wasserspiegels =
angenommen werden könnte, welches zwar n
mit aller Schärfe zutrift, aber doch wegen
geringen Einflusses auf die Rechnung, hier
Seite gesetzt werden kann.

Stellt man sich vor, daß der ausfließe
Wasserstrahl nicht nur eine Contraction an
Rändern der Öfnung, sondern auch in seiner O
fläche erleidet, so lassen sich zwar diese an sich
verschiedenen Zusammenziehungen nicht als eine
ansehen, man könnte aber, ohne den Einfluß e
jeden auf die Wassermenge besonders zu bestimm
sich damit begnügen, die Größe des Coeffiziente
aus den Versuchen zu bestimmen. Berechnet m
die Werthe von

$$\frac{M}{b h \sqrt{h}} = \frac{2}{3}\alpha$$

so entstehet die folgende Tafel.

N°.	b	h	M	$\frac{2}{3}\alpha$
1	0,500	1,250	2,327	3,330
2	0,833	0,900	2,327	3,271
3	1,167	0,720	2,327	3,334
4	1,500	0,596	2,327	3,372
5	2,146	0,480	2,327	3,261
6	3,448	0,344	2,327	3,337

Nimmt man als einen Mittelwerth $\alpha = 5$ so

$$\frac{2}{3}\alpha = 3{,}333 = \frac{10}{3} \text{ so wird}$$

$$M = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot bh\sqrt{h} = \frac{10}{3}\, bh\sqrt{h}$$

nd man sieht daraus, daß sich die Contraction ben so wie 100. §. N. VI. bei Schutzöfnungen in reigerinnen ohne Flügelwände, in Rechnung bringen läßt.

Aus den du Buatschen Versuchen (1ster Band 143. §. meiner Zusätze) folgt $\frac{2}{3}\alpha = 3{,}3014$, welches nicht viel von obiger Bestimmung abweicht, o daß der hier angenommene Werth so lange in er Ausübung beibehalten werden kann, bis noch nannichfaltigere Versuche und eine erschöpfende Theorie, die noch fehlenden Modifikationen angeben.

106. §.

Es läßt sich daher allgemein die Wassermenge

$$M = \frac{2}{3}\alpha\, bh\sqrt{h}$$

zen, nur muß in jedem besondern Falle der Coefcient α nach 100. §. bestimmt werden.

Für Öfnungen in der Wand eines Behält
ohne Flügelwände ist $\alpha = 5$, also

$$M = \frac{10}{3}\, b h \sqrt{h}.$$

Wenn sich die Öfnung in einem Freigerin
mit Flügelwänden befindet, so ist $\alpha = 6,$
also $\frac{2}{3}\alpha = 4{,}506$ oder sehr nahe $= \frac{9}{2}$, daher

$$M = \frac{9}{2}\, b h \sqrt{h}.$$

Beispiel. An einem See, in welchem die Oberflä des Wassers als stillstehend angenommen werd kann, befindet sich eine oben offene rechtwinklic Ausflußöfnung ohne Flügelwände, durch wel das Wasser frei abfließen kann. Die Breite d Oefnung ist 3 Fuß, und die Höhe des Wass standes 2 Fuß. Wie viel Wasser wird in je Sekunde abfließen, wenn dieser Wasserstand u verändert bleibt?

Hier ist $b = 3$, $h = 2$ daher

$$M = \frac{10}{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 28{,}28 \text{ Kubikfuß.}$$

107. §.

Weil $\frac{2}{3}\,\alpha b h \sqrt{h} = M$, so ist

$$h\sqrt{h} = \frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b} \text{ oder quadrirt}$$

$$h^3 = \left[\frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b}\right]^2 \text{ daher}$$

findet man allgemein den Wasserstand oder d Höhe des ungesenkten Wasserspiegels über d Fachbaum

$$h = \sqrt[3]{\left[\frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b}\right]^2}.$$

oder wenn man sich der Logarithmen bedient

$$\text{Log. } h = \frac{2}{3}\left[\text{Log. } M - \text{Log. } (\tfrac{2}{3}\alpha b)\right]$$

Bei Überfällen in der Wand eines Behälters ist $\alpha = 5$, daher

$$h = \sqrt[3]{\left[\frac{3M}{10 \cdot b}\right]^2}$$

Beispiel. Ein See hat in jeder Sekunde 200 Kubikfuß Wasser Zufluß. Wie tief wird der Fachbaum eines 6 Fuß breiten Ueberfalls unter dem horizontalen Wasserspiegel angelegt werden müssen, damit in jeder Sekunde diese Wassermenge abfließt?

Hier ist $M = 200$, $b = 6$ man findet daher die gesuchte Tiefe oder den Wasserstand

$$h = \sqrt[3]{\left[\frac{3 \cdot 200}{10 \cdot 6}\right]^2}$$

Hier ist $\frac{3 \cdot 200}{10 \cdot 6} = 10$, also die gesuchte Tiefe des Fachbaums unter dem horizontalen Wasserspiegel

$$h = \sqrt[3]{100} = 4{,}64 \text{ Fuß.}$$

108. §.

Nach 103. §. findet man ganz allgemein die Breite des Überfalls

$$b = \frac{M}{\frac{2}{3} \cdot \alpha h \sqrt{h}}$$

oder wenn $\alpha = 5$ gesetzt wird

$$b = \frac{3M}{10 \cdot h\sqrt{h}}$$

1. Beispiel. In der Wand eines Wasserbehälters, in welchem man die Oberfläche des Wassers als stillstehend ansehen kann, soll eine oben offene rechtwinklichte Ausflußöfnung so angelegt werden, daß ihr unterer Rand 4 Fuß tief unter dem Wasserspiegel liegt. Wie breit wird man solche machen müssen, damit in jeder Sekunde 150 Kubikfuß Wasser abfließen?

Hier ist $M = 150$, $h = 4$ daher die erforderliche Breite

$$b = \frac{3 \cdot 150}{10 \cdot 4\sqrt{4}} = 5{,}62 \text{ Fuß.}$$

2. Beispiel. Bei dem Ausflusse eines Sees, dessen Oberfläche man als horizontal annehmen kann, befindet sich ein Ueberfall der 3 Fuß breit ist, und das Wasser im See auf einem Wasserstande von 5 Fuß Höhe erhält. Weil aber hiedurch die umliegende Gegend zu sehr überschwemmt wird, so verlangt man, daß der Ueberfall bei unveränderter Lage des Fachbaums so viel erweitert werden soll, damit das Wasser bei eben dem Zuflusse nicht höher als 4 Fuß hoch stehen bleibe. Wie breit muß alsdenn der Ueberfall seyn?

Man setze die gesuchte Breite $= b$, so muß, da die abfließende Wassermenge in beiden Fällen dieselbe bleibt, einmal

$$M = \tfrac{10}{3} \cdot 3 \cdot 5\sqrt{5} \text{ und auch}$$
$$M = \tfrac{10}{3} \cdot b \cdot 4\sqrt{4} \text{ seyn.}$$

Hieraus erhält man

$$\tfrac{10}{3} \cdot b \cdot 4\sqrt{4} = \tfrac{10}{3} \cdot 3 \cdot 5\sqrt{5} \text{ oder}$$
$$b \cdot 4\sqrt{4} = 3 \cdot 5\sqrt{5} \text{ daher}$$

die gesuchte Breite

$$b = \frac{3 \cdot 5\sqrt{5}}{4\sqrt{4}} = 4{,}19 \text{ Fuß.}$$

Anmerk. Eine weitere Ausführung dieser Untersuchungen für Oefnungen von mancherlei Gestalt, welche bis an die Oberfläche des Wassers reichen, findet man in

A. G. Kästner angef. Hydrodynamik, im 1. Abschnitt.
K. C. Langsdorf Lehrbuch der Hydraulik. Altenburg 1794, im 7. Kapitel.
Bossüt angef. Hydrodynamik, 1. Bd. 2. Abschn. 2. Kap.
Prony, Neue Architectura Hydraulika, a. d. Franz. von K. C. Langsdorf. Frankf. a. M. 1794. 1. Th. 4. Absch.

Wäre die Oberfläche des Wassers oberhalb der Oefnung nicht so groß, daß man solche als stillstehend ansehen könnte, so findet man die hieher gehörigen Untersuchungen im achten Kapitel.

Viertes

Viertes Kapitel.

Vom Ausflusse aus Behältern mit Seitenöfnungen von beträchtlicher Größe, bei unveränderter Druckhöhe.

109. §.

Befindet sich in der vertikalen Seitenwand QR eines Behälters, eine rechtwinklichte Öfnung BDFE, und man bezeichnet durch

$AB = h$ den Wasserstand,
$BE = e$ die Höhe der Öfnung,
$EF = b$ die Breite der Öfnung, so ist
$AE = h - e$ die Höhe des Druckwassers.

Um nun die Wassermenge zu finden welche in jeder Sekunde durch die Öfnung BDEF abfließt, vorausgesetzt daß man den Wasserspiegel im Behälter als stillstehend ansieht, so kann man sich vorstellen, als wenn diese Öfnung in gleicher Breite bis zum Wasserspiegel AC vergrößert wäre; alsdenn ist die Wassermenge welche durch ABCD ausläuft, wenn der Wasserspiegel bis an den Rand AC stehet (103. §.)

$$= \frac{2}{3} \alpha b h \sqrt{h}.$$

Wäre die Öfnung BDEF verschlossen, so würde auf eine ähnliche Art, aus der Öfnung ACEF die Wassermenge

$$= \frac{2}{3} \alpha b (h - e)$$

2. Beispiel. Bei dem Ausflusse eines Sees, dessen Oberfläche man als horizontal annehmen kann, befindet sich ein Ueberfall der 3 Fuß breit ist, und das Wasser im See auf einem Wasserstande von 5 Fuß Höhe erhält. Weil aber hiedurch die umliegende Gegend zu sehr überschwemmt wird, so verlangt man, daß der Ueberfall bei unveränderter Lage des Fachbaums so viel erweitert werden soll, damit das Wasser bei eben dem Zuflusse nicht höher als 4 Fuß hoch stehen bleibe. Wie breit muß alsdenn der Ueberfall seyn?

Man setze die gesuchte Breite $= b$, so muß, da die abfließende Wassermenge in beiden Fällen dieselbe bleibt, einmal

$$M = \tfrac{10}{3} \cdot 3 \cdot 5\sqrt{5} \text{ und auch}$$
$$M = \tfrac{10}{3} \cdot b \cdot 4\sqrt{4} \text{ seyn.}$$

Hieraus erhält man

$$\tfrac{10}{3} \cdot b \cdot 4\sqrt{4} = \tfrac{10}{3} \cdot 3 \cdot 5\sqrt{5} \text{ oder}$$
$$b \cdot 4\sqrt{4} = 3 \cdot 5\sqrt{5} \text{ daher}$$

die gesuchte Breite

$$b = \frac{3 \cdot 5\sqrt{5}}{4\sqrt{4}} = 4{,}19 \text{ Fuß.}$$

Anmerk. Eine weitere Ausführung dieser Untersuchungen für Oefnungen von mancherlei Gestalt, welche bis an die Oberfläche des Wassers reichen, findet man in

A. G. Kästner angef. Hydrodynamik, im 1. Abschnitt.
K. C. Langsdorf Lehrbuch der Hydraulik. Altenburg 1794, im 7. Kapitel.
Bossüt angef. Hydrodynamik, 1. Bd. 2. Abschn. 2. Kap.
Prony, Neue Architectura Hydraulika, a. d. Franz. von K. C. Langsdorf. Frankf. a. M. 1794. 1. Th. 4. Absch.

Wäre die Oberfläche des Wassers oberhalb der Oefnung nicht so groß, daß man solche als stillstehend ansehen könnte, so findet man die hieher gehörigen Untersuchungen im achten Kapitel.

Viertes

Viertes Kapitel.

Vom Ausflusse aus Behältern mit Seiten-öfnungen von beträchtlicher Größe, bei unveränderter Druckhöhe.

109. §.

Befindet sich in der vertikalen Seitenwand QR eines Behälters, eine rechtwinklichte Öfnung BDFE, und man bezeichnet durch

AB = h den Wasserstand,
BE = e die Höhe der Öfnung,
EF = b die Breite der Öfnung, so ist
AE = h − e die Höhe des Druckwassers.

Um nun die Wassermenge zu finden welche in jeder Sekunde durch die Öfnung BDEF abfließt, vorausgesetzt daß man den Wasserspiegel im Behälter als stillstehend ansieht, so kann man sich vorstellen, als wenn diese Öfnung in gleicher Breite bis zum Wasserspiegel AC vergrößert wäre; alsdenn ist die Wassermenge welche durch ABCD ausläuft, wenn der Wasserspiegel bis an den Rand AC stehet (103. §.)

$$= \tfrac{2}{3}\,\alpha b h \sqrt{h}.$$

Wäre die Öfnung BDEF verschlossen, so würde auf eine ähnliche Art, aus der Öfnung ACEF die Wassermenge

$$= \tfrac{2}{3}\,\alpha b\,(h-e)\,\sqrt{(h-e)}$$

ablaufen, daher bleibt, wenn man letztere v
der erstern abzieht, die Wassermenge M übri
welche in jeder Sekunde durch die Öfnun
BDEF abfließt, oder

$$M = \frac{2}{3}\alpha\,[h\sqrt{h} - (h-e)\sqrt{(h-e)}]\,b$$

wo α nach den Umständen aus 100. §. bestimm
werden muß.

Bei einer Schützöfnung in einem Freigerin
mit Flügelwänden ist $\alpha = 6{,}76$ daher

$$\tfrac{2}{3}\alpha = 4{,}507.$$

Bei einer Öfnung in einer dünnen Wand i
$\alpha = 4{,}89$ daher

$$\tfrac{2}{3}\alpha = 3{,}26.$$

Beispiel. An einer Freischleuse befindet sich eine
Fuß breite Oefnung und ein 4 Fuß hoher Wasse
stand. Das Schutzbrett ist einen Fuß hoch gez
gen; man fragt wie viel Wasser in jeder Sekund
abfließen wird.

Hier ist $h = 4$, $e = 1$, $b = 3$; daher di
gesuchte Wassermenge

$$M = 4{,}507\,[4\sqrt{4} - 3\sqrt{3}]\,3$$
$$= 37{,}911 \text{ Kubikfuß.}$$

110. §.

In den meisten Fällen der Ausübung kan
man sich der weit einfacheren Formeln des zweite
Kapitels bedienen, indem man voraussetzt, daß d
der mittlern Geschwindigkeit zugehörige Höhe
groß sei, als die lothrechte Entfernung des Schwer
punkts der Öfnung von dem Wasserspiegel.

Für das vorige Beispiel erhält man nach 101.
$h = 3\tfrac{1}{2}$ und $a = 3$

$$M = 6{,}76 \,.\, 3 \,.\, \sqrt{\tfrac{7}{2}} = 37{,}940 \text{ Kubikfuß.}$$

Der Unterschied ist also $37{,}940 - 37{,}911 = 0{,}02$
Kubikfuß, und so geringe, daß man in den me
sten Fällen, ohne Furcht einen beträchtlichen Fehl
zu begehen, nach dieser Formel rechnen kann.

Will man untersuchen, wie viel der größtmögliche Fehler beträgt, wenn man die Ausflußmenge nach 101. §. berechnet, so setze man $e = h$ welches der nachtheiligste Fall ist der sich denken läßt. Hienach hat man die Wassermenge, nach dem vorigen §. oder nach 103 §.

$$= \frac{2}{3} \alpha b h \sqrt{h}$$

nach der Formel im zweiten Kapitel 101. §.

$$= \alpha b h \sqrt{\frac{1}{2} h}$$

beide Wassermengen verhalten sich wie $\frac{2}{3} : \sqrt{\frac{1}{2}}$ oder wie

0,666666 : 0,707106

woraus folgt, daß der größtmögliche Fehler nie $\frac{1}{30}$ der ganzen Wassermenge seyn kann, wenn man nach der letzten Formel rechnet, und immer desto kleiner werden muß, je größer die Höhe des Wasserstandes gegen die Höhe der Oefnung ist.

111. §.

Setzt man die hier eingeführte Bezeichnung
tt der Werthe (101. §.), so erhält man einen
veiten Ausdruck für die Wassermenge bei ei
r rechtwinklichten Öfnung.

$$\text{I.} \quad M = \alpha b e \sqrt{(h - \frac{1}{2} e)}$$

nd daraus die Breite der Öfnung

$$\text{II.} \quad b = \frac{M}{\alpha . e \sqrt{(h - \frac{1}{2} e)}}$$

o für Schützöfnungen in einem Freigerinne mit
lügelwänden $\frac{1}{\alpha} = 0{,}148$ ist.

Aus vorstehender Gleichung läßt sich auch der
Werth von h leicht entwickeln; denn

$$\alpha b e \sqrt{(h - \frac{1}{2} e)} = M \text{ oder quadrirt}$$

$$\alpha^2 b^2 e^2 . (h - \frac{1}{2} e) = M^2 \text{ daher}$$

$$h - \frac{1}{2} e = \frac{M^2}{\alpha^2 b^2 e^2} \text{ folglich}$$

ablaufen, daher bleibt, wenn man letztere der erstern abzieht, die Wassermenge M ... welche in jeder Sekunde durch die Öfn... BDEF abfließt, oder

$$M = \frac{2}{3}\alpha \left[h\sqrt{h} - (h-e)\sqrt{(h-e)}\right]$$

wo α nach den Umständen aus 100. §. best... werden muß.

Bei einer Schützöfnung in einem Freig... mit Flügelwänden ist $\alpha = 6{,}76$ daher

$$\frac{2}{3}\alpha = 4{,}507.$$

Bei einer Öfnung in einer dünnen W... $\alpha = 4{,}89$ daher

$$\frac{2}{3}\alpha = 3{,}26.$$

Beispiel. An einer Freischleuse befindet sich ... Fuß breite Oefnung und ein 4 Fuß hoher ... stand. Das Schutzbrett ist einen Fuß ho... gen; man fragt wie viel Wasser in jeder ... abfließen wird.

Hier ist $h = 4$, $e = 1$, $b = 3$; ... gesuchte Wassermenge

$$M = 4{,}507\,[4\sqrt{4} - 3\sqrt{3}]\,3$$
$$= 37{,}911 \text{ Kubikfuß.}$$

110. §.

In den meisten Fällen der Ausüb... man sich der weit einfacheren Formeln de... Kapitels bedienen, indem man voraussetz... der mittlern Geschwindigkeit zugehörige ... groß sei, als die lothrechte Entfernung de... punkts der Öfnung von dem Wasserspi...

Für das vorige Beispiel erhält man ... $h = 3\frac{1}{2}$ und $a = 3$

$$M = 6{,}76 \,.\, 3 \,.\, \sqrt{\tfrac{7}{2}} = 37{,}940 \text{ Ku...}$$

Der Unterschied ist also $37{,}940 - 37{,}9$... Kubikfuß, und so geringe, daß man ... sten Fällen, ohne Furcht einen beträchtl... zu begehen, nach dieser Formel rechnen

folglich die Höhe der Öfnung

$$e = h - \sqrt[3]{\left(h\sqrt{h} - \frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b}\right)^2}$$

Für Schützöfnungen in Freigerinnen mit Flügelwänden ist $\frac{2}{3}\alpha = 4{,}507$.

Beispiel. Eine Freischleuse, welche eine 2 Fuß breite Oefnung hat, kann durch eine Fallschütze geschlossen werden. Wie hoch muß man die Schütze ziehen, damit der Wasserstand auf dem Fachbaume eine gegebene Höhe von 5 Fuß beträgt, und für einen Zufluß von 20 Kubikfuß, eine hinlänglich große Oefnung entstehe?

$M = 20$, $b = 2$, $h = 5$, daher ist die Erhöhung des Schutzbretts

$$e = 5 - \sqrt[3]{\left(5\sqrt{5} - \frac{20}{4{,}507 \cdot 2}\right)^2} = 5 - 4{,}314$$
$$= 0{,}686 \text{ Fuß} = 8{,}23 \text{ Zoll.}$$

113. §.

Wenn die Ausflußöfnung nicht die bisher vorausgesetzte Gestalt eines Rechtecks hat, so wird man sich dennoch in den meisten Fällen der 110 §. angeführten Regel bedienen können. Besondere Untersuchungen über Öfnungen von mancherlei Gestalt, findet man in den am Ende des dritten Kapitels angeführten Schriftstellern.

III. der Wasserstand

$$h = \frac{1}{\alpha^2} \frac{M^2}{b^2 e^2} + \frac{1}{2} e$$

wo für Schutzöfnungen in Freigerinnen mit Fli
gelwänden $\frac{1}{\alpha^2} = 0{,}0219$ ist.

Beispiel. An einem See, welcher in jeder Sekun
18 Kubikfuß Wasser Zufluß hat, soll in einer Fre
schleuse eine 2 Fuß breite und 1 Fuß hohe Au
flußöfnung angelegt werden; wie hoch wird da
Wasser über dem Fachbaume stehen, damit di
abfließende Wassermenge dem gegebenen Zufluß
gleich sei?

$M = 18$, $e = 1$, $b = 2$ daher der erforder
liche Wasserstand

$$h = \frac{0{,}0219 \, . \, 18^2}{1 \, . \, 2 \, . \, 2} + \frac{1}{2} = 2{,}27 \text{ Fuß.}$$

112. §.

Wenn man h aus 109. §. bestimmt hätte, s
wäre dadurch ein weitläuftiger Ausdruck entsta
den; dagegen läßt sich die Höhe e nicht gut na
dem vorigen §. bestimmen, weil man alsdenn ei
kubische Gleichung erhält, weshalb es besser i
hiezu die Formel 109. §. zu wählen. Nun ist

$$\tfrac{2}{3}\alpha\,[h\sqrt{h} - (h-e)\sqrt{(h-e)}]\,b = M \text{ oder}$$

$$h\sqrt{h} - (h-e)\sqrt{(h-e)} = \frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b} \text{ oder}$$

$$h^{\frac{3}{2}} - (h-e)^{\frac{3}{2}} = \frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b} \text{ also}$$

$$h^{\frac{3}{2}} - \frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b} = (h-e)^{\frac{3}{2}} \text{ und}$$

wenn man auf beiden Seiten die $\frac{2}{3}$ Potenz nimm

$$\left(h^{\frac{3}{2}} - \frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}} = (h-e)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}} = h - e$$

folglich die Höhe der Öfnung

$$e = h - \sqrt[3]{\left(h\sqrt{h} - \frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b}\right)^2}$$

Für Schützöfnungen in Freigerinnen mit Flügelwänden ist $\frac{2}{3}\alpha = 4{,}507$.

Beispiel. Eine Freischleuse, welche eine 2 Fuß breite Oefnung hat, kann durch eine Fallschütze geschlossen werden. Wie hoch muß man die Schütze ziehen, damit der Wasserstand auf dem Fachbaume eine gegebene Höhe von 5 Fuß betragt, und für einen Zufluß von 20 Kubikfuß, eine hinlanglich große Oefnung entstehe?

$M = 20$, $b = 2$, $h = 5$, daher ist die Erhöhung des Schutzbretts

$$e = 5 - \sqrt[3]{\left(5\sqrt{5} - \frac{20}{4{,}507 \cdot 2}\right)^2} = 5 - 4{,}314$$
$$= 0{,}686 \text{ Fuß} = 8{,}23 \text{ Zoll}.$$

113. §.

Wenn die Ausflußöfnung nicht die bisher vorausgesetzte Gestalt eines Rechtecks hat, so wird man sich dennoch in den meisten Fallen der 110 §. angeführten Regel bedienen können. Besondere Untersuchungen über Öfnungen von mancherlei Gestalt, findet man in den am Ende des dritten Kapitels angeführten Schriftstellern.

Fünftes Kapitel.

Vom Ausflusse aus Behältern die keinen Zufluß erhalten.

114. §.

Ein prismatisches Gefäß ABCD sei mit Wasser angefüllt, welches durch eine Öfnung im Boden abfließt. Leert sich dieses Gefäß aus, ohne Zufluß zu erhalten, so wird anfänglich dem ausströmenden Wasser die Geschwindigkeitshöhe AB; wenn der Spiegel bis P gesunken ist, die Geschwindigkeitshöhe PB u. s. w. zugehören. Auf AB senkrecht setze man die Geschwindigkeiten mit welchen das Wasser ausfließt dergestalt, daß die



zum Wasserstande AB gehörige Geschwindigk. = AE,

zum Wasserstande PB gehörige Geschwindigk. = PQ,

zum Wasserstande P′B gehörige Geschwindigk. = P′Q′

u. s. w. angenommen wird, so ist EQQ′B eine Parabel, weil sich die Abscissen BP, BP′ rc. eben so, wie die Quadrate der Ordinaten PQ, PQ′ rc. verhalten (89. §.). Es nehmen daher die Geschwindigkeiten des Wassers bei einem Gefäße welches sich ausleert in eben dem Verhältnisse ab, wie die Geschwindigkeiten eines steigenden Körpers. Weil nun in derjenigen Zeit, darin ein steigender Körper mit einer bestimmten Geschwindigkeit seine größte

Höhe erreicht hat, oder bis seine Geschwindigkeit = 0 wird, ein anderer Körper der fortwährend die anfängliche Geschwindigkeit behält, einen doppelt so großen Raum durchläuft (20. und 11. §.), so wird daher aus ähnlichen Gründen in der Zeit, in der sich das prismatische Gefäß ausleert, bei unveränderlicher anfänglichen Geschwindigkeit, oder bei voll erhaltenem Gefäße, doppelt so viel Wasser auslaufen.

Der Inhalt vom horizontalen Querschnitt des Gefäßes sei A, der Inhalt der Öfnung = a und A
die anfängliche Druckhöhe AB = h, so ist der a
Inhalt des Wassers im Gefäße = A.h. Ist h
nun t die Zeit in welcher sich das prismatische t
Gefäß ausleert, so muß in dieser Zeit, bei einem stets voll erhaltenen Gefäße, die Wassermenge 2Ah auslaufen. Dies giebt

$$2Ah = \alpha \sqrt{h} \,.\, a \,.\, t \text{ daher}$$

die Zeit der Ausleerung (Tempus evacuationis, *Tems de l'écoulement*)

$$t = \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{h}}{a}$$

115 §.

Wäre das Wasser im Gefäße in der Zeit t′ t′
um die Tiefe x gesunken, so erhält man die Zeit x
t—t′, in welcher das übrige Wasser von der Höhe h—x ausläuft, wie vorher

$$t - t' = \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{h-x}}{a} \text{ oder}$$

$$t' = t - \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{(h-x)}}{a} = \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{h}}{a} - \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{(h-x)}}{a}$$

daher die Zeit in welcher der Wasserspiegel um die Tiefe x sinkt

$$t' = \frac{2}{\alpha} \left[\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)}\right] \frac{A}{a} \text{ *)}.$$

*) Die vorstehenden allgemeinen Ausdrücke erhält man

Leert sich das Gefäß ganz aus, so entste wenn der Wasserspiegel der Ausflußöfnung n kommt, oberhalb derselben eine Art von Tr ter, Strudel oder Wirbel, in dem Wasser, i chen die Luft ausfüllt, wodurch der Ausfluß z Theil verhindert wird. Wollte man dieses veri den, so müßte man ein sehr dünnes Brettchen den Wasserspiegel legen.

1. Beispiel. An einem prismatischen Behälter, de horizontaler Querschnitt 100 □ Fuß beträgt, findet sich, in einer Tiefe von 9 Fuß unter Wasserspiegel, eine 3 □ Zoll große Oefnung einer kurzen Ansatzröhre; in wie viel Zeit i

---

mittelst der höhern Analysis, mit Beibehaltung der gen Beziehung, folgendergestalt. Wenn der Wasser gel in der Zeit dt' um die Tiefe dx sinkt, so ist di der Zeit dt' gesunkene Wassermenge $= Adx$, und eben so viel Wasser in dieser Zeit auslaufen muß, (

$$Adx = \alpha a \sqrt{(h-x)} \, . \, dt' \text{ also}$$

$$dt' = \frac{A}{\alpha a} \frac{dx}{\sqrt{(h-x)}}$$

Um leichter zu integriren, setze man $h - x = z$ so das Integral

$$t' = \frac{A}{\alpha a} \int - z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{A}{\alpha a} \left[\text{Const} - 2 \right.$$

$$= \frac{A}{\alpha a} \left[\text{Const} - 2\sqrt{(h} \right.$$

Für $t' = 0$ wird $x = 0$ also $\text{Const} = 2\sqrt{h}$; findet daher

$$t' = \frac{2}{\alpha} \left[\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)} \right] \frac{A}{a} .$$

Für $x = h$ wird $t' = t$ daher

$$t = \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{h}}{a} .$$

das Wasser 5 Fuß sinken, wenn der Behälter keinen Zufluß erhält?

$A = 100$, $a = 3 \square$ Zoll $= \frac{1}{48} \square$ Fuß, $h = 9$, $x = 5$ und nach (100. §.) $\frac{2}{\alpha} = 0{,}31$, daher die Zeit in welcher sich der Behälter 5 Fuß ausleert

$$t' = 0{,}31 \left[\sqrt{9} - \sqrt{4}\right] \frac{100}{\frac{1}{48}} = 1488 \text{ Sekunden.}$$
$$= 24 \text{ Minut. } 48 \text{ Sek.}$$

Die ausgelaufene Wassermenge ist =

$$100 \cdot 5 = 500 \text{ Kubikfuß.}$$

Für die Zeit in welcher sich der ganze Behälter ausleert, findet man

$$t = 0{,}31 \frac{100 \sqrt{9}}{\frac{1}{48}} = 4464 \text{ Sekunden.}$$
$$= 74 \text{ Minuten } 24 \text{ Sekunden.}$$

2. Beispiel. An einem Sammelteiche, dessen Oberfläche 2000 □ Fuß groß ist, befindet sich in einem Grundstocke, 12 Fuß unter dem Wasserspiegel, eine 6 □ Zoll große Oefnung. Wie viel wird dieser Spiegel sinken, wenn man das Wasser eine Stunde lang aus dem Teiche, welchen man prismatisch annimmt, laufen läßt?

Aus der vorstehenden Gleichung erhält man

$$\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)} = \frac{\alpha}{2} \frac{t'a}{A} \text{ oder}$$

$$\sqrt{h} - \frac{\alpha}{2} \frac{t'a}{A} = \sqrt{(h-x)}, \text{ quadrirt}$$

$$h - \alpha \frac{t'a\sqrt{h}}{A} + \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{t'a}{A}\right)^2 = h - x, \text{ daher}$$

$$x = \alpha \frac{t'a}{A} \left(\sqrt{h} - \frac{\alpha}{4} \frac{t'a}{A}\right).$$

Hienach ist $A = 2000$, $a = 6 \square$ Zoll $= \frac{1}{24} \square$ Fuß, $h = 12$, $t' = 3600$ Sekunden, daher die Tiefe um welche sich der Wasserspiegel senkt

$$x = 6{,}42 \cdot \frac{3600}{2000 \cdot 24}\left(\sqrt{12} - \frac{6{,}42}{4} \cdot \frac{3600}{2000 \cdot 24}\right) = 1{,}61 \text{ F.}$$

116. §.

Wenn sich an einem prismatischen Behälter eine oben offene rechtwinklichte Öfnung in einer vertikalen Wand befindet, so läßt sich die Zeit in welcher der Wasserspiegel um eine bestimmte Tiefe sinkt, nur mittelst der höhern Analysis finden. Bezeichnet

A den horizontalen Querschnitt des Behälters,

h die Höhe des Wasserstandes,

b die Breite der Öfnung,

x die Tiefe welche der Wasserspiegel sinkt,

t′ die Zeit in welcher der Wasserspiegel um die Tiefe x gesunken ist,

so findet man *)

$$t' = \frac{3}{\alpha}\,\frac{A}{b}\,.\,\frac{h\sqrt{(h-x)} - (h-x)\sqrt{h}}{h\,(h-x)}$$

Beispiel. Ein prismatischer Behälter, welcher keinen Zufluß erhält, hat 70000 □ Fuß Oberfläche. In

---

*) Ist der Wasserspiegel in der Zeit t′ um die Tiefe x gesunken, so wird er in der nächsten unendlich kleinen Zeit dt′ um die Tiefe dx sinken. Aber die in der Zeit dt′ ausfließende Wassermenge ist bei der Wasserhöhe h—x (103. §.)

$$= \tfrac{2}{3}\,\alpha b\,(h-x)^{\frac{3}{2}}.\,dt'$$

welche der gesunkenen Wassermenge Adx gleich seyn muß. Hienach erhält man

$$dt' = \frac{3A}{2\alpha b}\,(h-x)^{-\frac{3}{2}}\,dx$$

und wenn man h — x = z setzt und integrirt, so wird

$$t' = \frac{3A}{2\alpha b}\int -z^{-\frac{3}{2}}\,dz = \frac{3A}{2\alpha b}\,.\,2\,z^{-\frac{1}{2}} + \text{Const.}$$

einer der Seitenwänden desselben befindet sich eine oben offene 2 Fuß breite rechtwinklichte Oefnung, deren unterer Rand oder Fachbaum 5 Fuß tief unter dem Wasserspiegel liegt. Man fragt, in wie viel Zeit wird sich der Wasserspiegel 4 Fuß tief senken?

Hier ist $A = 70000$, $b = 2$, $h = 5$, $x = 4$ und weil man hier wie 106. §. $\alpha = 5$ setzen kann, so findet man die gesuchte Zeit

$$t' = \frac{3 \cdot 70000}{5 \cdot 2} \, \frac{5\sqrt{(5-4)} - (5-4)\sqrt{5}}{5\,(5-4)}$$

= 11722 Sekunden

= 3 Stunden 15 Minuten 22 Sekunden.

Für $t' = 0$ wird $x = 0$ also $z = h$; es ist daher

$$\text{Const} = -\frac{3}{\alpha}\,\frac{A}{b}\,h^{-\frac{1}{2}} \text{ folglich}$$

$$t' = \frac{3}{\alpha}\,\frac{A}{b}\left[\frac{1}{\sqrt{(h-x)}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right]$$

der wenn man mit $h\,(h-x)$ multiplizirt und dividirt

$$t' = \frac{3}{\alpha}\,\frac{A}{b}\,\frac{h\sqrt{(h-x)} - (h-x)\sqrt{h}}{h\,(h-x)}$$

ür $h = x$ muß sich das Gefäß ausleeren, und man ndet $t' = \infty$, obgleich bei horizontalen Oefnungen, t' ür diesen Fall einen angeblichen Werth erhält (114. §.). Dieses darf aber um so weniger befremden, weil bei rtikalen Oefnungen die letzte Wasserschicht, durch eine nendlich kleine Oefnung abfließen muß, dahingegen ho- zontale Oefnungen immer einerlei Größe in Absicht des sfließenden Wassers behalten. Wenn also die Frage on der gänzlichen Entwässerung eines Behälters vor- mmt, so darf man nur bei dem Gebrauche der vorste- nden Formel, die Höhe des abzulassenden Wassers, m einen kleinen Theil geringer als die Höhe des gan- n Wasserstandes annehmen, weil ohnedem, wenn der ee beinahe ganz abgelassen ist, das Wasser nur tropfen- eise abfließen wird.

Kann man annehmen, daß sich die Gestal[t des]
Behälters mit einem umgekehrten Paraboloid [ver-]
gleichen läßt, so wird der Kalkul weitläuftiger, [und]
ist von mir in den Anmerkungen zum ersten T[heile]
der du Buatschen Hydraulik, S. 270 u. f. ausge[führt]
worden. Noch schwieriger wird die Untersuch[ung,]
wenn man den Behälter als eine umgekehrte [abge-]
kürzte Pyramide ansieht, und dabei annimmt, [daß]
noch überdies ein gleichförmiger Zufluß statt [findet.]
Weil es zu weitläuftig wäre, dieses hier [weiter]
auseinander zu setzen, so muß ich deshalb auf [eine]
Abhandlung von mir verweisen, welche sich in

Sammlung nützlicher Aufsätze und Nachri[chten]
die Baukunst betreffend, Jahrgang 1797, [...]
Band, Berlin, Seite 79 u. f.

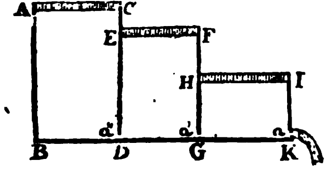
befindet.

Sechstes Kapitel.

Vom Ausflusse aus Behältern welche zusammengesetzt, oder durch Scheidewände abgetheilt sind.

117. §.

Drei oben offene Gefäße AD, EG, HK sind



dergestalt verbunden, daß sie nur durch die vertikalen Scheidewände (Diaphragmata verticalia) CD, FG von einander getrennt werden, aber mittelst der Verbindungsöfnungen bei G, D zusammenhängen, erhalten bei AC eben so viel Zufluß, als durch die Ausflußöfnung bei K abfließt. Wenn sich alles im Beharrungsstande befindet, und die Wasserspiegel bei A, E, H einen unveränderlichen Stand angenommen haben, so setze man

den Inhalt der Öfnung bei K = a;

die Geschwindigkeit des Wassers in dieser Öfnung = c;

eben diese Größen bei G = a′ und c′

bei D = a″ und c″.

Ferner sei die vertikale Entfernung des Wasserspiegels AC von der Ausflußöfnung K, oder die gesammte Druckhöhe = h; die Differenz der Wasserspiegel, CE = x, FH = y und die Höhe IK = z.

Gegen die Öfnung bei D drückt die Wasser-

Die Höhe des Wassers in der zweiten A
lung, über dem Mittelpunkte der ersten Verbind
öfnung findet man

$$h-x=4-0{,}0417\left(\frac{0{,}105}{\frac{1}{36}}\right)^2=3{,}404\ \text{F}$$

Auf ähnliche Art kann man die übrigen Wa
hen finden.

118. §.

Sind zwei Gefäße ABCD
CDEF mittelst einer Verbind
öfnung bei D zusammengesetz
findet sich im zweiten Gefäße k
Ausflußöfnung, und wir
Wasser im ersten Gefäße unv
derlich auf der Höhe CD erh
so muß sich das zweite Gefäß CF nach und
anfüllen. Die Zeit der Anfüllung kann mit
des vorigen Kapitels leicht bestimmt werden,
auf eine ähnliche Art wie die Gesetze beim
gen der Körper mit dem freien Falle überein
men, eben so muß auch bei unverändertem
serstande eines Gefäßes, zur Anfüllung eines
ten mittelst einer Verbindungsöfnung, eben s
Zeit erfordert werden, als wenn sich das
Gefäß durch eine Öfnung, die der Verbind
öfnung gleich ist, frei ausleerte, weil die D
höhe der Verbindungsöfnung, eben so wie be
Ausleeren eines Gefäßes abnimmt. Es könne
her auch die Formeln des 114. und 115. §.
angewandt werden, nur daß, was daselbst für
Sinken gilt, hier vom Steigen verst
werden muß. Ist daher

A der Inhalt vom horizontalen Quersc
des Gefäßes CF;

a der Inhalt der Verbindungsöfnung b

h die beständige Druckhöhe CD im
fäße AD

findet man die Zeit t in welcher das zweite Ge-
ß auf die ganze Höhe CD = h angefüllt wird,
der

$$t = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{A\sqrt{h}}{a}$$

ie Zeit t' in welcher das Wasser auf die Höhe
DG = h' steigt, ist alsdenn

$$t' = \frac{2A}{\alpha a}[\sqrt{h}-\sqrt{(h-h')}]$$

nd die Zeit t'' in der das Wasser auf irgend
ine Höhe GK = y steigt,

$$t'' = \frac{2A}{\alpha a}[\sqrt{(h-h')}-\sqrt{(h-h'-y)}] \text{ *)}$$

119. §.

Die Zeit welche zum Anfüllen und Ablassen
er Schleusenkammer erfordert wird, kann um so
mehr leicht bestimmt werden, da die Voraussetzung,

---

*) Mittelst der höhern Analysis erhält man diese Ausdrücke auf folgende Art. Wenn der Wasserspiegel in der Zeit dt'' auf die Höhe dy steigt, so ist die gestiegene Wassermenge = Ady, und weil eben so viel Wasser durch die Verbindungsöffnung eingetreten ist, so erhält man

$$A\,dy = \alpha a\sqrt{(h-h'-y)} \,.\, dt'' \text{ also}$$

$$dt'' = \frac{A}{\alpha a}\frac{dy}{\sqrt{(h-h'-y)}}$$

und man findet auf eine ähnliche Art wie 115 §. das Integral

$$t'' = \frac{2A}{\alpha a}[\sqrt{(h-h')}-\sqrt{(h-h'-y)}]$$

Doch ist hiebei zu bemerken, daß auf die Beschleunigung des Wassers in dem engern Gefäße nicht Rücksicht genommen ist, vermöge welcher das Wasser anfänglich auf höhe als h steigen würde, bevor es in den kommt.

säule CD, wegen des Gegendrucks von der H[illegible] ED kann aber nur die Höhe EC = x Geschw[illegible] digkeit erzeugen, es sind daher x, y, z die Geschw[illegible] digkeitshöhen für den Ausfluß in den Öfnung[illegible] a″, a′, a, weil den Erfahrungen des Hrn. du B[illegible] gemäß, das Wasser mit der ihm zugehörigen Dru[illegible] höhe aus einer Abtheilung in die andere eben[illegible] ausfließt, als wenn sich die Öfnung in die L[illegible] ausmündete.

Für die Öfnung a ist die Geschwindigkeitsh[illegible] (100. §.) $z = \frac{c^2}{\alpha^2}$, oder wenn man die in jeder S[illegible] kunde ausfließende Wassermenge M setzt, so $c = \frac{M}{a}$, also

$$z = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{M}{a}\right)^2$$

und weil $c' = \frac{M}{a'}$ so ist die Geschwindigkeitsh[illegible]

$$y = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{M}{a'}\right)^2$$

eben so weil $c'' = \frac{M}{a''}$ so ist

$$x = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{M}{a''}\right)^2$$

Aber $h = x + y + z$, daher findet man die g[illegible] sammte Druckhöhe

$$h = \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{M^2}{a^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2\right]$$

oder

$$h = \frac{1}{\alpha^2}\,M^2\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a'}\right)^2 + \left(\frac{1}{a''}\right)^2\right]$$

Hieraus ergiebt sich die Wassermenge

$$M = \frac{\alpha\, a \sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2\right]}} \text{ oder}$$

$$= \frac{\alpha \sqrt{h}}{\sqrt{\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a'}\right)^2 + \left(\frac{1}{a''}\right)^2\right]}}$$

mehr als drei Öfnungen läßt sich leicht ein-
, wie man h und M finden kann.

Bei zwei Öfnungen a, a' ist

Druckhöhe

$$h = \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{M^2}{a^2}\left[1+\left(\frac{a}{a'}\right)^2\right]$$

die Wassermenge

$$M = \frac{\alpha\, a\sqrt{h}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{a}{a'}\right)^2\right]}}$$

enn alle Öfnungen gleich groß sind, also a = a' = a'' ist, so erhält man

r zwei Öfnungen

$$h = 2\,\frac{1}{\alpha^2}\,\frac{M^2}{a^2}$$

$$M = \alpha\,\frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{2}}$$

r drei Öfnungen

$$h = 3\,\frac{1}{\alpha^2}\,\frac{M^2}{a^2}$$

$$M = \alpha\,\frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{3}}$$

Beispiel. Ein Behälter welcher durch zwei vertikale Scheidewände abgetheilt ist, hat in der ersten Scheidewand eine Oefnung von 4, in der zweiten eine von 3, und eine Ausflußöfnung von 2 □ Zoll. Wie viel Zufluß muß derselbe erhalten, damit das Wasser in der ersten Abtheilung 4 Fuß hoch über der Ausflußöfnung stehe?

Hier ist h = 4, a = 2 □ Zoll = $\frac{1}{72}$ □ Fuß, a' = 3 □ Zoll = $\frac{1}{48}$ □ Fuß, a'' = 4 □ Zoll = $\frac{1}{36}$ □ Fuß. Befinden sich nun die Oefnungen in dünnen Wänden, so ist (100. §.) α = 4,89, folglich der ...chte Zufluß oder die Wassermenge

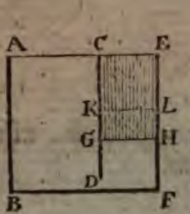
$$\ldots \cdot \frac{\sqrt{4}}{36^2]} = 0{,}105 \text{ Kubikfuß.}$$

Die Höhe des Wassers in der zweiten Ab lung, über dem Mittelpunkte der ersten Verbindu öfnung findet man

$$h-x=4-0{,}0417\left(\frac{0{,}105}{\frac{1}{38}}\right)^2=3{,}404 \text{ Fuß}$$

Auf ähnliche Art kann man die übrigen Wass hen finden.

118. §.



Sind zwei Gefäße ABCD CDEF mittelst einer Verbindu öfnung bei D zusammengesetzt, findet sich im zweiten Gefäße k Ausflußöfnung, und wird Wasser im ersten Gefäße unve derlich auf der Höhe CD erha so muß sich das zweite Gefäß CF nach und anfüllen. Die Zeit der Anfüllung kann mit H des vorigen Kapitels leicht bestimmt werden, auf eine ähnliche Art wie die Gesetze beim G gen der Körper mit dem freien Falle übereinl men, eben so muß auch bei unverändertem W serstande eines Gefäßes, zur Anfüllung eines z ten mittelst einer Verbindungsöfnung, eben so Zeit erfordert werden, als wenn sich das zw Gefäß durch eine Öfnung, die der Verbindu öfnung gleich ist, frei ausleerte, weil die D höhe der Verbindungsöfnung, eben so wie bei Ausleeren eines Gefäßes abnimmt. Es können her auch die Formeln des 114. und 115. §. angewandt werden, nur daß, was daselbst für Sinken gilt, hier vom Steigen versta werden muß. Ist daher

- A der Inhalt vom horizontalen Quersch des Gefäßes CF;
- a der Inhalt der Verbindungsöfnung b
- h die beständige Druckhöhe CD im fäße AD

findet man die Zeit t in welcher das zweite Gefäß auf die ganze Höhe CD = h angefüllt wird, der

$$t = \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{h}}{a}$$

die Zeit t′ in welcher das Wasser auf die Höhe DG = h′ steigt, ist alsdenn

$$t' = \frac{2A}{\alpha a} [\sqrt{h} - \sqrt{(h-h')}]$$

und die Zeit t″ in der das Wasser auf irgend eine Höhe GK = y steigt,

$$t'' = \frac{2A}{\alpha a} [\sqrt{(h-h')} - \sqrt{(h-h'-y)}] \text{ *)}$$

119. §.

Die Zeit welche zum Anfüllen und Ablassen der Schleusenkammer erfordert wird, kann um so mehr leicht bestimmt werden, da die Voraussetzung,

---

*) Mittelst der höhern Analysis erhält man diese Ausdrücke auf folgende Art. Wenn der Wasserspiegel in der Zeit dt″ auf die Höhe dy steigt, so ist die gestiegene Wassermenge = Ady, und weil eben so viel Wasser durch die Verbindungsöffnung eingetreten ist, so erhält man

$$A dy = \alpha a \sqrt{(h - h' - y)} \,.\, dt'' \text{ also}$$

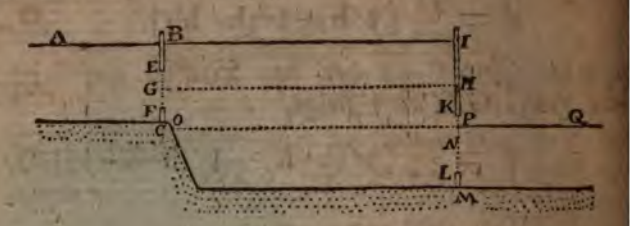
$$dt'' = \frac{A}{\alpha a} \frac{dy}{\sqrt{(h - h' - y)}}$$

und man findet auf eine ähnliche Art wie 115 §. das Integral

$$t'' = \frac{2A}{\alpha a} [\sqrt{(h-h')} - \sqrt{(h-h'-y)}]$$

Noch ist hiebei zu bemerken, daß auf die Beschleunigung des Wassers in dem engern Gefäße nicht Rücksicht genommen ist, vermöge welcher das Wasser anfänglich auf eine größere Höhe als h steigen würde, bevor es in den Beharrungsstand kommt.

daß der Wasserstand vor der Verbindungsöfnung unverändert bleibt, bei der Anwendung auf Schleusen zuläßig ist, weil durch die Anfüllung der Schleusenkammern der Wasserspiegel des Oberwassers sich nur unmerklich senkt. Auch wird zur Vermeidung weitläuftiger Rechnung der Abfluß nach 110. §. bestimmt werden können.



1. Beispiel. In wie viel Zeit wird der Raum BCOPI einer Schleusenkammer aus dem Oberwasser ABC durch die im Oberthore BC befindliche Oefnung EF mit Wasser angefüllt werden, wenn der Wasserspiegel OP des Unterwassers, 10 Fuß unter dem Spiegel AB des Oberwassers liegt; die Höhe der Oefnung EF = 5, ihre Breite = $2\frac{1}{2}$ und die Tiefe ihres Schwerpunkts G unterm Oberwasser, BG = 5 Fuß ist?

Zieht man durch den Schwerpunkt G die Horizontale GH, so kann man sich vorstellen, daß der unterste Raum GCOPH eben so angefüllt werde, als wenn das Wasser durch die Oefnung EF frei ausströmte. Die Zeit in welcher der oberste Raum BGHI angefüllt wird, kann nun nach dem vorigen Kapitel leicht bestimmt werden, daher läßt sich, wenn die zur Anfüllung beider Räume erforderlichen Zeiten zusammengenommen werden, die gesuchte Zeit leicht finden.

Es sei der Raum GCOPH = 23000 Kubikfuß, so hat man 101. §. VI.

$N = 23000,\ a = 4 \cdot 2\frac{1}{2} = 10,\ h = 5$

und wenn α nach dem 100. §. bestimmt wird, so i

$\frac{1}{\alpha}$ = 0,2, daher die Zeit zur Anfüllung des untern Raums GCOPH =

$$\frac{0{,}2 \cdot 23000}{10 \cdot \sqrt{5}} = 205{,}7 \text{ Sekunden.}$$

Zur Bestimmung der Zeit, in welcher der obere Raum BGHI angefüllt wird, ist nach 118. §. wenn die Länge BI der Schleusenkammer = 290 und ihre Breite 24 Fuß beträgt:

$$A = 24 \cdot 200 = 4800,\ a = 10,\ h = 5$$

daher die Zeit zur Anfüllung des obern Raums =

$$2 \cdot 0{,}2 \frac{4800 \cdot \sqrt{5}}{10} = 429{,}3 \text{ Sekunden.}$$

Beide Zeiten 205,7 + 429,3 Sekunden zusammengenommen, geben zur Anfüllung des Schleusenkammerraums erforderliche Zeit =

635 Sekunden = 10 Minuten 35 Sekunden.

Beispiel. Die Schleusenkammer BCMI ist bis BI mit Wasser angefüllt. Das Unterwasser PQ steht 10 Fuß unter dem Wasserspiegel BI. In wie viel Zeit wird sich das im Raume BOPI enthaltene Wasser, durch die $2\frac{1}{2}$ Fuß weite und 5 Fuß hohe Schützöfnung KL, im Unterthore IM, in das Unterwasser ausleeren, wenn vorausgesetzt wird, daß der Stand des Unterwassers unverändert bleibt?

Wenn N der Schwerpunkt von der Oefnung ist, so muß die Druckhöhe des ausfließenden Wassers allemal von der Oberfläche des Unterwassers bis zum Wasserspiegel in der Schleusenkammer gerechnet werden. Da man nun für diese Ausleerung, die Schleusenkammer als prismatisch ansehen kann, so ist 114. §.

$$A = 4800,\ a = 2\tfrac{1}{2} \cdot 5 = 12\tfrac{1}{2},\ h = 10$$

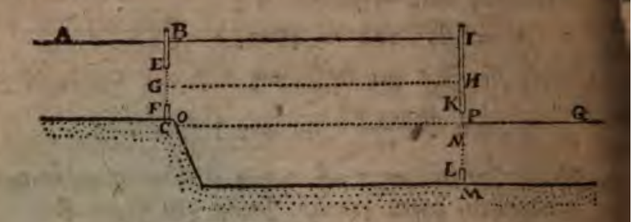
daher ist die Zeit in welcher sich der Kammerraum BOPI ausleert

$$\frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 4800 \cdot \sqrt{10}}{12{,}5} = 486 \text{ Sekunden,}$$
$$= 8 \text{ Minuten } 6 \text{ Sekunden.}$$

Es ist hienach die Zeit in welcher die Schleusen-kammer angefüllt und ausgeleert wird

18 Minuten 41 Sekunden.

Vorstehende Auflösungen, welche von mir dem Herrn Prof. Kosmann mitgetheilt sind, befinden sich ebenfalls in dessen Lehrbuch der Hydraulik, Berlin 1797.



Anmerk. Wäre die Oefnung KL nicht ganz unter dem Unterwasserspiegel PQ, sondern nur ein Theil derselben, und der übrige KP, wie in beistehender Figur, über PQ, so läßt sich das Wasser, so weit es von I bis K abläuft, wie im vorigen Beispiele berechnen; der übrige Theil von der Höhe KP muß aber, wenn diese Höhe beträchtlich ist, nach 116. §. berechnet werden.

120. §.

Weil es in der Hydraulik, wenn sie auf die Ausübung angewandt werden soll, sehr wichtig ist, daß ihre allgemeinen Lehren durch Versuche bestätiget werden, welche im Großen angestellt sind, und überhaupt noch mehrere Versuche zu wünschen übrig bleiben, so wird es nicht undienlich seyn, diejenigen sorgfältigen Beobachtungen mitzutheilen, die der Herr Bauinspektor Kypke, der mit allen hiezu erforderlichen Kenntnissen den nöthigen Beobachtungsfleiß besitzt, über das Anfüllen der zweiten massiven Schleusenkammer des Bromberger Kanals, bei verschiedenen Schützöfnungen, im Sommer 1799 angestellt hat.

ie ganze Schleusenkammer, so weit solche
t Rechnung gebracht wird, läßt sich als ein
a annehmen, dessen horizontaler Querschnitt
cheinländische □Fuß beträgt. Von den Ober-
itterthoren hat sie eine Länge von 158 und
Breite von 21 bis 29 Fuß.

ei den Versuchen ließ man die Schleusenkam-
rst so weit voll laufen, daß die Schützöf-
vollkommen unter dem Wasserspiegel in der
ner stand. Die Höhe des Wassers in der
ner wurde an einem befestigten Maaßstabe
t, und indem der eine Beobachter die Se-
t zählte, so wurde deren fortlaufende Zahl,
das Wasser eine bestimmte Höhe erreicht
immer angemerkt. Man bediente sich bei
Versuchen nur einer Schützöfnung.

Versuche.	I.		II.	
	Fuß.	Zoll.	Fuß.	Zoll.
der Schützöfnung	2	—	2	—
der Schützöfnung	1	4	1	9½
der Unterkante der Schützöfnung r dem Oberwasserspiegel	8	7	9	—
Anfang der Sekundenzählung d. das Oberwasser über dem Un- asser	7	1	7	—

Versuche.	Höhe welche das Wasser erreichte.		Zeit.	Einzelne Höhen.		Zeit.
	Fuß.	Zoll.	Sekunden.	Fuß.	Zoll	Sekunden.
I.	2	—	263	2	—	263
	4	—	590	2	—	327
	6	—	1081	2	—	491
	7	1	1763	1	1	682
II.	1	—	90	1	—	90
	2	—	192	1	—	102
	3	—	306	1	—	114
	4	—	434	1	—	128
	5	—	583	1	—	149
	6	—	780	1	—	197
	7	—	1236	1	—	454

Vergleicht man diese Erfahrungen mit de[r] Theorie 118 §. indem man die Zeit der ganze[n] Anfüllung oder

$$t = \frac{2}{5} \frac{A \sqrt{h}}{a}$$

sucht, so findet man hienach für den

erſten Versuch t = 1711 Sekunden
zweiten Versuch t = 1265 Sekunden

anſtatt daß die Erfahrung

I. t = 1763 Sekunden
II. t = 1236 Sekunden

giebt. Die Abweichungen sind zwar nicht bedeu[-]tend, sie lassen sich aber sehr gut aus dem abneh[-]menden Verhältniß des Umfangs zum Flächenin[-]halt der Schützöfnung erklären, worauf hier, um weitläuftige Formeln zu vermeiden, nicht Rücksich[t] genommen ist.

121. §.

Sind mit einem oben offenen Behälte[r]

nehrere verschlossene Gefäße von ungleicher Weite verbunden, welche mittelst Verbindungsöf-nungen in vertikalen oder horizontalen Scheidewänden zusammenhängen, so läßt sich der Ausfluß ebenfalls bestimmen, wenn vorausge-setzt wird, daß vorher alle verschlossene Behälter gänzlich mit Wasser angefüllt sind.

Wenn drei Gefäße zusammengesetzt sind, dergestalt, daß mit dem offenen Gefäße BCD, die beiden verschlossenen Gefäße DEF und FGH mittelst vertikaler oder horizontaler Scheidewände DE, FG zusammenhängen, und man setzt voraus daß der Wasserspiegel BC unverändert bleibe, und eben so viel Wasser daselbst zufließe, als durch die Ausflußöfnung in der Wand HK abläuft, so sei für das Gefäß GH, in welchem sich die Ausflußöfnung befindet:

- A der Inhalt des Querschnitts HK
- C die Geschwindigkeit des Wassers in diesem Querschnitte
- a der Inhalt der Ausflußöfnung
- c die Geschwindigkeit des Wassers in dieser Öfnung.

Für das folgende Gefäß DEFG:

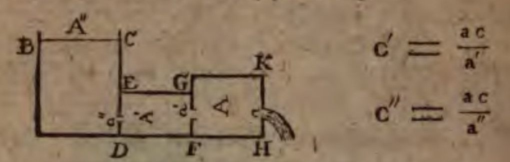
- A′ der Inhalt des Querschnitts FG
- C′ die Geschwindigkeit des Wassers in diesem Querschnitte
- a′ der Inhalt der Verbindungsöfnung
- c′ die Geschwindigkeit in derselben.

Für das Gefäß BCE haben die Größen A″, C″, a″, c″ eine ähnliche Bedeutung.

Ist nun ferner:

h die gesammte Druckhöhe

oder die vertikale Entfernung des Wasserspiegels von dem Schwerpunkte der Ausflußöfnung a, erhält man die Geschwindigkeit



$$c' = \frac{a\,c}{a'}$$

$$c'' = \frac{a\,c}{a''}$$

Wird nun die Weite des Gefäßes wenig[…] so groß vorausgesetzt, daß die Hindernisse, w[…] das Wasser, bei der Fortbewegung an den W[…] den der Gefäße, wegen der Klebrigkeit oder A[…] sion und anderer Hindernisse der Bewegung le[…] bei Seite gesetzt werden können, so ist 101. §[…] die zur Geschwindigkeit c″ erforderliche Höhe […]

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{a\,c}{a''}\right)^2$$

Die zur Geschwindigkeit c′ erforderliche Höhe […] $\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{a\,c}{a'}\right)^2$; weil aber das Wasser im Gefäße […] schon mit der Geschwindigkeit $C' = \frac{a\,c}{A'}$ zu wel[…] die Höhe $\frac{(C')^2}{4g}$ gehört*), vor der Öfnung a′ anla[…] so ist die zur Geschwindigkeit c′ erforderliche H[…]

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{a\,c}{a'}\right)^2 - \frac{1}{4g}\left(\frac{a\,c}{A'}\right)^2$$

Auf ähnliche Art findet man die zur Aus[…] geschwindigkeit c erforderliche Höhe

$$\frac{1}{\alpha^2}\,c^2 - \frac{1}{4g}\left(\frac{a\,c}{A}\right)^2$$

Sämmtliche erforderliche Geschwindigkeitsh[…]

---

*) Wo $g = 15\frac{5}{8}$ ist.

müssen der vorhandenen Druckhöhe h gleich seyn, es ist daher

$$h = \frac{1}{\alpha^2}\left[c^2 + \left(\frac{ac}{a'}\right)^2 + \left(\frac{ac}{a''}\right)^2\right] - \frac{1}{4g}\left[\left(\frac{ac}{A}\right)^2 + \left(\frac{ac}{A'}\right)^2\right]$$

oder $$h = \frac{c^2}{\alpha^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4g}\frac{a^2}{A^2} - \frac{\alpha^2}{4g}\left(\frac{a}{A'}\right)^2\right]$$

Setzt man die in jeder Sekunde ausfließende Wassermenge $= M$, so ist $ac = M$ oder $\frac{M^2}{a^2} = c^2$ daher die Druckhöhe für drei Gefäße

$$h = \frac{M^2}{\alpha^2 a^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4g}\frac{a^2}{A^2} - \frac{\alpha^2}{4g}\left(\frac{a}{A'}\right)^2\right]$$

und hieraus die Wassermenge

$$M = \frac{\alpha a \sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4g}\frac{a^2}{A^2} - \frac{\alpha^2}{4g}\left(\frac{a}{A'}\right)^2\right]}}$$

Für zwei Gefäße erhält man die Druckhöhe

$$h = \frac{M^2}{\alpha^2 a^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 - \frac{\alpha^2 a^2}{4g A^2}\right]$$

und die Wassermenge

$$M = \frac{\alpha a \sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 - \frac{\alpha^2 a^2}{4g A^2}\right]}}$$

122. §.

Wenn die Gefäße gleich weit sind, also $A = A'$ ist, so erhält man bei drei Gefäßen

$$h = \frac{M^2}{\alpha^2 a^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \frac{2\alpha^2 a^2}{4g A^2}\right]$$

$$M = \frac{\alpha a \sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \frac{2\alpha^2 a^2}{4g A^2}\right]}}$$

Bei sehr weiten Gefäßen, wo $\frac{a}{A} = 0$ gesetzt werden kann, erhält man eben die Ausdrücke für

h und M wie 117. §. Dies gilt auch wenn Öfnungen a, a', a'' einander gleich sind.

Anmerk. Bei horizontalen Scheidewänden kann der Fall ereignen, daß das Wasser durch die o Oefnung a'' mit einer größern oder geringeren schwindigkeit abfließt, als der Druckhöhe BD gehört. Wollte man dieses nicht annehmen, so n sich das untere Wasser im ersten Falle bei a'' reißen, und ein luftleerer Raum entstehen. W des Zusammenhanges der Wassertheile, beson aber weil die Atmosphäre gegen die obere und tere Oefnung mit einer ansehnlichen Gewalt dr wird die Entstehung eines luftleeren Raumes, auch die Trennung der Wassertheile verhin Wenn hingegen BD > DF ist, so würde bei g großen Oefnungen, durch a'' mehr Wasser einfli als bei a' abfließen kann; es kann daher der fluß nicht anders, als nach den vorhin entwick Gesetzen erfolgen.

Siebentes Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers in Flußbetten.

123. §.

Die Wörter Strom und Fluß sind in der gewöhnlichen Sprache fast gleichbedeutend; hier wird aber unter Strom (Fluvius, Flumen, *Fleuve*) dasjenige schiffbare fließende Gewässer verstanden, welches sich unmittelbar in das Meer oder die See ergießt; unter Fluß (Amnis, *Rivière*) hingegen, ein schiffbares fließendes Gewässer, welches seinen Ausfluß in einen Strom oder andern Fluß hat.

Die Donau, Weichsel, Elbe, Oder rc. sind Ströme, hingegen die Warthe, Havel, Netze, der Mayn, Neckar rc. sind nur Flüsse.

Ein kleines fließendes Wasser, welches nicht beschifft werden kann, heißt ein Bach oder Fließ (Rivus, *Ruisseau*). Stürzt es von großen Anhöhen herunter, ein Sturz- oder Gebirgsbach (Torrens, *Torrent*); ein Regenbach wenn es vom Zusammenflusse des Regens entstehet und zuweilen vertrocknet.

Kanäle sind solche durch Kunst angelegte Gewässer, welche zwei Flüsse oder Meere mit einander verbinden.

Wenn zur Verkürzung der Krümmungen eines Flusses, derselbe einen andern durch Kunst verfertigten Lauf erhält, so heißt dieses ein Durchstich. Ein Graben (Fossa, *Fossé*) heißt jede in die

Erde gegrabene Wasserleitung, welche nicht zur Schifffahrt bestimmt ist; wird sie mit hölzernen Wänden eingefaßt, ein Gerinne (Canalis, *Auge*).

Die Höhlung in der Oberfläche der Erde, worin ein Strom fließt, heißt sein Bette oder Rinnsal (Alveus, *Lit*). Das Grundbette (Solum rivi, *Fond du lit*) ist zwischen beiden Ufern (Ripae, *Bords*) eingeschlossen.

Derjenige Ort, wo sich ein Bach oder Fluß mit einem andern vereinigt, oder wo ein Strom ins Meer tritt, heißt seine Mündung (Ostium, *Embouchure*). Bei einem Durchstich oder Kanal heißt der Einfluß die Einmündung, der Ausfluß die Ausmündung.

Theilt sich ein Strom in zwei Ärme, so heißt dieses eine Stromscheidung (Diffluentia). Der Ort wo sich zwei Ströme vereinigen, ihr Zusammenfluß (Confluentia, *Confluent*, *Jonction*).

124. §.

Wenn man sich eine Ebene senkrecht auf die Richtung eines Stroms denkt, so nennt man solche den Querschnitt (Sectio transversa, *Section*) des Stroms, und die Zeichnung davon heißt ein Quer- oder Breitenprofil. Der Umfang des Querprofils so weit er mit dem Bette zusammenfällt, die Wand des Querschnitts.

Denkt man sich längs der Richtung des Stroms eine vertikale Fläche, welche vom Wasserspiegel bis auf das Grundbette geht, so entstehet ein Längenprofil.

Den Abhang (Declivitas, *Pente*) der Oberfläche eines Stroms auf eine bestimmte Länge auszudrücken, dient das Gefälle (Libramentum, *Chûte*), welches der vertikale Abstand derjenigen Horizontallinien ist, die durch den Wasserspiegel beim Anfang und Ende der Stromlänge gehen.

Sagt man, die Elbe habe in einer gewissen Gegend auf 100 Ruthen 3 Zoll Gefälle, so heißt dies so viel: auf 100 Ruthen senkt sich der Wasserspiegel 3 Zoll.

Bei Mühlenbächen und Gräben nennt man das Gefälle, die Räusche oder Rösche.

Dividirt man das Gefälle durch die dazu ge- rige Stromlänge, so pflegt man auch diesen uotienten den Abhang zu nennen.

Unter mittlerer Geschwindigkeit des Jassers in einem Querprofile, versteht man dieje- ze, mit welcher dasselbe durch alle Theile des rofils fließen müßte, damit eine eben so große Jassermenge durchläuft, als wenn das Wasser it verschiedenen Geschwindigkeiten abfließt.

Inmerk. Den abwechselnden Wasserstand der Flüsse bemerkt man durch die Wassermerkpfähle oder Marqueurs, indem man in eigenen Wasserstandstabellen, die Höhen des Wassers an jedem Tage einträgt. Hiedurch entstehen aber Folianten, welche die Uebersicht erschweren; daher habe ich in einer Abhandlung: Von dem Nutzen einer Wasserstandsscale, in der angef. Sammlung die Baukunst betreffend, 1ter Band, 1798. S. 25 u. f. gezeigt, wie man dergleichen Tafeln mittelst Abscissen und Ordinaten construiren könne.

125. §.

Ist in einem Flußbette die Oberfläche des Vassers horizontal, der Boden mag eine Ge- alt haben, welche er will, so wird, wenn außer m Gewichte des Wassers keine andere Ursachen nzu kommen, keine Bewegung desselben entstehen unen, weil alle Wassertheilchen auf der Ober- iche, und in jeder Tiefe, gleich stark nach allen Seiten pressen. Ist hingegen der Wasserspiegel gen den Horizont geneigt, so erhalten sie

Wassertheilchen im Flußbette nach derjenigen tung, wohin die Oberfläche des Wassers Abhang hat, einen stärkern Druck, als nach andern Seite; es muß daher Bewegung derjenigen Richtung entstehen, wo der Dru geringsten ist. Auch muß diese Bewegung allein auf der Oberfläche, sondern auch in Tiefe Statt finden, weil die Differenzen de drostatischen Pressungen in einerlei Vertikale alle Tiefen gleich groß sind.

Stellt man sich vor, daß Wasser längs geneigten Ebene sich herunter bewegt, so dasselbe, wenn sein Lauf durch nichts geh wird, eine beschleunigte Bewegung annehmen immer schneller fließen, je länger die Bew dauert (50. §.), auch selbst wenn die schiefe nach und nach weniger Neigung erhalten (8. §.). Wenn nun gleich alle Flüsse von Quelle ab bis zum Meere Gefälle haben, s det man doch größtentheils, daß ihre Geschw keit nach dem Meere hin abnimmt; es mu her ein Widerstand vorhanden seyn, welch Bewegung des Wassers aufhält, und da die Geschwindigkeit desselben vermindert. andern zufälligen Ursachen, welche zu dieser minderung der Geschwindigkeit beitragen, wird sich leicht durch einen Versuch mit der bestän Ursache bekannt machen können, welche die gung des Wassers in einem Flußbette verzög

Man bringe an einem immer auf g Höhe mit Wasser angefüllten Gefäße eine zontale Röhre an, und bemerke mittelst der flußmenge, die Geschwindigkeit des Wassers Röhre. Unter übrigens gleichen Umständen man der Röhre eine mehrmal größere Läng müßte, da Druckhöhe und Röhrenweite un dert bleiben, wenn das Wasser keine Hind längs der Röhrenwände fände, auch im

Falle, die Geschwindigkeit dieselbe bleiben. Man wird aber eine ansehnliche Verminderung der Geschwindigkeit des Wassers in der längeren Röhre finden, wodurch man anzunehmen berechtiget wird, daß das Wasser bei seiner Bewegung längs der Röhrenwände aufgehalten, oder seine Geschwindigkeit verzögert wird.

Dieser Versuch beweiset ebenfalls, daß das Wasser bei der Bewegung in einem Flußbette, längs den Wänden einen Widerstand findet, dessen Ursache man darin suchen kann, daß die Wassertheilchen vermöge ihrer Klebrigkeit oder Adhäsion, mit dem Flußbette zusammenhängen, und bei der Bewegung, theils von den Wänden, theils von denjenigen Wassertheilchen abgerissen werden müssen, welche mit den Wänden stärker zusammenhängen, als unter einander, oder wo die Adhäsion größer als die Cohäsion ist. Auch muß durch das Abprellen der Wassertheile von den Wänden, und die dadurch verursachte innere Bewegung, und vielleicht durch andere noch unbekannte Ursachen, eine Verzögerung entstehen.

Hienach wäre also außer den zufälligen Ursachen der Verzögerung des fließenden Wassers, die von Winden, Frost, Eisgängen, Wasserpflanzen, Anschwellungen beim Ausfluß, oder auch von Untiefen, Krümmungen 2c. herrühren können, eine beständige Verzögerung bekannt, die bei jedem in einem Flußbette oder in einer Röhre bewegten Wasser Statt finden muß, welche auch von einigen Schriftstellern mit dem Namen der Reibung oder Frikzion belegt wird, ob es gleich sehr schwer wird, bei einer so leicht beweglichen Flüssigkeit wie das Wasser, sich eine Frikzion zu denken, weshalb Adhäsion und Cohäsion viel wahrscheinlicher als Ursache der Verzögerung, oder als Widerstand angesehen werden können.

Wenn nun gleich nur diejenigen Wassertheile

in ihrer Bewegung verzögert werden, welche mittelbar die Wände berühren, so hängen sämmtliche Wassertheile mit einer gewissen K zusammen, wodurch auch in den entferntern, zögerung entstehet, und der Widerstand unte ganze Wassermasse verbreitet wird, ob gleich Verzögerung geringer werden muß, je größe Entfernung von der Wand ist.

1. Anmerk. Wie sehr die Wassertheile selbst unter ander zusammenhängen, kann man sich durch sehr interessante Versuche überzeugen. Man einen Wasserstrahl von unten durch ein Gefä Wasser gehen, so wird dieses Gefäß bald ausg seyn, weil sich das stillstehende Wasser an den strömenden Strahl anhängt, und mit fortg wird. Oder man bringe in der Ausflußröhre Behälters eine kleine Seitenöfnung an, und an eine dünne Röhre, welche in ein tiefer steh Gefäß mit Wasser gehet. Nach und nach wird Wasser aus dem Gefäße in die Höhe (welche zu groß seyn darf) steigen, sich mit dem ström Wasser der Ausflußröhre vereinigen, und so wegen der Adhäsion das Gefäß ausgeleert w

2. Anmerk. Wie stark das Wasser mit festen Kö zusammenhängt, darüber haben die Herren A (physik. chem. Schriften S. 354), Buat (a. 1. Bd. S. 37), und Huth (Gren's neues Jo der Physik, 3. Bd. S. 301) Versuche angestellt, aus hervorgeht, daß bei Flächen von verschie Metall- und Holzarten, im Durchschnitt eine von 1 Pfund erfordert wird, um eine Fläche einem rheinländischen Quadratfuß vom Wasser zureissen. Einige Materien äußern zwar einen kern Zusammenhang als andere, der Unterschied aber hier bei Seite gesetzt werden.

126. §.

Ein allgemein anwendbares Gesetz, welche Geschwindigkeit des Wassers in Flußbetten,

allen Umständen genau angiebt, ist bis jetzt noch nicht gefunden, und das Auffinden desselben ist deshalb um so schwieriger, weil es nicht angeht, die mancherlei, vielleicht noch unbekannten Hindernisse der Bewegung in Rechnung zu bringen. So viel läßt sich aber mit *Büat* annehmen, daß, wenn man fließendes Wasser in einem graden Flußbette, wo alle Querprofile einander gleich sind, findet, und wenn die Bewegung gleichförmig ist, in diesem Falle, *die beschleunigende Kraft, welche aus dem Abhange der Oberfläche des Wassers entspringt, dem Widerstande im Flußbette gleich seyn muß.*

Nun ist offenbar, in einem übrigens regelmäßigen Flußbette, in welchem alle Querprofile einander gleich sind, und das Wasser nach einerlei Richtung fließt, der Widerstand in dem Verhältnisse größer, je größer der Umfang eines Querprofils ist, weil ein doppelt so großer Umfang, bei übrigens gleichen Umständen, wegen des Zusammenhanges des Wassers mit den Wänden, doppelt so viel Verzögerung des Wassers verursacht, da sich wegen der Cohäsion der Wassertheile, die entstandenen Hindernisse der Bewegung, auch dem übrigen von den Wänden entfernten Wasser mittheilen. Es steht daher die Verzögerung des Wassers, oder der Widerstand, mit den Wänden in einem graden Verhältnisse, oder es wird *in demselben Verhältnisse mehr Kraft zur Bewegung des Wassers erfordert, wie die Profilwände sich vergrößern.*

Die größere Geschwindigkeit des Wassers verursacht ebenfalls einen Widerstand. Denn die in Bewegung befindlichen Wassertheile müssen von den Wänden losgerissen werden, mit welchen sie zusammenhängen, und es wird erfordert, daß bei einer doppelt so großen Geschwindigkeit, nicht nur doppelt so viel Wassertheile, sondern auch jedes

Wassertheilchen in halb so viel Zeit losger werden muß, als bei der einfachen Geschwin keit; dies heißt aber offenbar viermal so viel richten. Bei der dreifachen Geschwindigkeit n dieses neunmal so viel, u. s. w. Man kann da schließen, daß sich bei übrigens gleichen Umst den, die Widerstände wie die Quadr der Geschwindigkeiten verhalten.

Wären in zwei Querschnitten die Wände Geschwindigkeiten des Wassers einander gleich, a ihre Inhalte verschieden, so würde bei doppelt großem Inhalte, der Widerstand unter doppelt viel materielle Theile vertheilt, also für jedes zelne Theilchen, nur halb so groß seyn; man k daher schließen, daß sich unter sonst gleichen U ständen, die Widerstände welche die Be gung der einzelnen Wassertheile ver gern, umgekehrt wie die Querschnitte v halten.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß in z verschiedenen Flußbetten, in welchen die Bewegu des Wassers gleichförmig ist, sich die Wid stände, welche die Bewegung der Wassertheile zögern, eben so verhalten, wie die Prof wände und Quadrate der Geschwind keiten, und umgekehrt wie die Inha der Querschnitte.

127. §.

Zur Überwältigung des Widerstandes in ein Flußbette, ist keine andere beständige Kraft v handen als die Schwere, welche jeden beweg Körper, dessen Richtung gegen den Horizont neigt ist, beschleuniget. Setzt man nun unter Bedingungen des vorigen §. voraus, daß sich W ser in einem Flußbette gleichförmig bewege, so fo daraus, daß die Beschleunigung welche die Schw verursacht, von dem Widerstande aufgehoben wi

oder das dieser Widerstand der beschleunigenden Kraft des Wassers gleich sei, weshalb die Bewegung desselben, wie bei jeder trägen Masse, gleichförmig bleiben muß.

Sind daher für zwei verschiedene Gewässer, welche nach einer unveränderten Richtung fließen, wo alle Querschnitte einander gleich sind, und bei welchen man annehmen kann, daß sich das Wasser durch jeden Querschnitt auf einerlei Art bewege,

C, c ihre mittlere Geschwindigkeiten,
S, s die Inhalte ihrer Querprofile,
P, p ihre Wände oder die Umfänge ihrer Querprofile,
A, α ihre Gefälle, und
L, λ die dazu gehörigen Längen, auf welche die Bewegung der einzelnen Wasserfäden gleichförmig ist,

so ist bekannt, daß sich die von der Schwere bewirkten Beschleunigungen zweier Massen auf einer schiefen Ebene, oder die beschleunigenden Kräfte, wie die Höhen der schiefen Ebenen dividirt durch ihre Längen verhalten (50. §).

Nun bezeichnen in dem vorliegenden Falle, A, α die Höhen, und L, λ die Längen der schiefen Ebenen, daher verhalten sich die beschleunigenden Kräfte wie $\frac{A}{L} : \frac{\alpha}{\lambda}$. Aber die beschleunigenden Kräfte, sind den Widerständen in den Betten, welche hier durch W, w bemerkt werden, gleich, daher muß sich verhalten

$$W : w = \frac{A}{L} : \frac{\alpha}{\lambda}$$

Nach dem vorhergehenden §. verhalten sich aber die Widerstände, wie die Umfänge P, p; wie die

Wassertheilchen in halb so viel Zeit losgeri werden muß, als bei der einfachen Geschwind keit; dies heißt aber offenbar viermal so viel richten. Bei der dreifachen Geschwindigkeit w dieses neunmal so viel, u. s. w. Man kann da schließen, daß sich bei übrigens gleichen Umst den, die Widerstände wie die Quadr der Geschwindigkeiten verhalten.

Wären in zwei Querschnitten die Wände u Geschwindigkeiten des Wassers einander gleich, a ihre Inhalte verschieden, so würde bei doppelt großem Inhalte, der Widerstand unter doppelt viel materielle Theile vertheilt, also für jedes e zelne Theilchen, nur halb so groß seyn; man ka daher schließen, daß sich unter sonst gleichen U ständen, die Widerstände welche die Be gung der einzelnen Wassertheile ver gern, umgekehrt wie die Querschnitte v halten.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß in z verschiedenen Flußbetten, in welchen die Bewegu des Wassers gleichförmig ist, sich die Wid stände, welche die Bewegung der Wassertheile v zögern, eben so verhalten, wie die Prof wände und Quadrate der Geschwindi keiten, und umgekehrt wie die Inhal der Querschnitte.

127. §.

Zur Überwältigung des Widerstandes in ein Flußbette, ist keine andere beständige Kraft v handen als die Schwere, welche jeden bewegt Körper, dessen Richtung gegen den Horizont neigt ist, beschleuniget. Setzt man nun unter d Bedingungen des vorigen §. voraus, daß sich W ser in einem Flußbette gleichförmig bewege, so fol daraus, daß die Beschleunigung welche die Schw verursacht, von dem Widerstande aufgehoben wi

oder das dieser Widerstand der beschleunigenden Kraft des Wassers gleich sei, weshalb die Bewegung desselben, wie bei jeder trägen Masse, gleichförmig bleiben muß.

Sind daher für zwei verschiedene Gewässer, welche nach einer unveränderten Richtung fließen, wo alle Querschnitte einander gleich sind, und bei welchen man annehmen kann, daß sich das Wasser durch jeden Querschnitt auf einerlei Art bewege,

C, c ihre mittlere Geschwindigkeiten,

S, s die Inhalte ihrer Querprofile,

P, p ihre Wände oder die Umfänge ihrer Querprofile,

A, α ihre Gefälle, und

L, λ die dazu gehörigen Längen, auf welche die Bewegung der einzelnen Wasserfäden gleichförmig ist,

so ist bekannt, daß sich die von der Schwere bewirkten Beschleunigungen zweier Massen auf einer schiefen Ebene, oder die beschleunigenden Kräfte, wie die Höhen der schiefen Ebenen dividirt durch ihre Längen verhalten (50. §).

Nun bezeichnen in dem vorliegenden Falle, A, α die Höhen, und L, λ die Längen der schiefen Ebenen, daher verhalten sich die beschleunigenden Kräfte wie $\frac{A}{L} : \frac{\alpha}{\lambda}$. Aber die beschleunigenden Kräfte, sind den Widerständen in den Betten, welche hier durch W, w bemerkt werden, gleich, daher muß sich verhalten

$$W : w = \frac{A}{L} : \frac{\alpha}{\lambda}$$

Nach dem vorhergehenden §. verhalten sich aber die Widerstände, wie die Umfänge P, p; wie die

Quadrate der Geschwindigkeiten C^2, c^2, und
gekehrt wie die Querschnitte S, s, daher

$$W : w = \frac{PC^2}{S} : \frac{pc^2}{s} \text{ *) oder}$$

$$\frac{A}{L} : \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{PC^2}{S} : \frac{pc^2}{s} \text{ daher}$$

$$\frac{pc^2}{s} \cdot \frac{A}{L} = \frac{PC^2}{S} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \text{ oder}$$

$$c^2 = C^2 \frac{P}{S} \frac{L}{A} \cdot \frac{s}{p} \frac{\alpha}{\lambda} \text{ folglich}$$

$$c = C\sqrt{\left(\frac{P.L}{S.A}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{s}{p} \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

Hat man nun aus genauen Versuchen den W
$C\sqrt{\left(\frac{P L}{S A}\right)}$ bestimmt, so läßt sich leicht für j
Strom, unter den vorausgesetzten Umständen,
mittlere Geschwindigkeit c aus den bekannten G
ßen s, p, α, λ, oder eine von diesen aus den ü
gen finden.

Wenn alle Größen sich auf rheinländis

---

*) Denn wenn in vier verschiedenen Flußbetten
W, W', W'', w die Widerstände,
C, c, c, c die Geschwindigkeiten,
P, P, p, p die Umfänge, und
S, S, S, s die Querschnitte
welche damit zusammen gehören bezeichnete, so ve
sich

$$\left.\begin{array}{l} W : W' = C^2 : c^2 \\ W' : W'' = P : p \\ W'' : w = \frac{1}{S} : \frac{1}{s} \end{array}\right\} \text{folglich}$$

$$W : w = \frac{C^2P}{S} : \frac{c^2p}{s}$$

-zwölftheiliges Fußmaaß beziehen, so ist nach einer Mittelzahl von 36 Buatschen Beobachtungen

$$C\sqrt{\left(\frac{PL}{SA}\right)} = 90{,}9 \text{ daher}$$

die mittlere Geschwindigkeit

$$c = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{s}{p}\,\frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

Anmerk. Die Vergleichung des Resultats der hier vorgetragenen Theorie mit der Erfahrung, findet man in meinen Zusätzen zum ersten Theil der du Buatschen Hydraulik, S. 82 u. f., wo ebenfalls die hier vorgetragene Theorie von mir zum Grunde gelegt, und daraus die hier gefundene Formel entwickelt ist. Will man diese Formel auf die Bewegung des Wassers in Flüssen anwenden, so ist nur dabei zu merken, daß sie ganz allein für diejenigen Fälle gilt, wo das Wasser eine gleichförmige Bewegung angenommen hat, daß aber, wenn die Bewegung nicht gleichförmig ist, die Profile ungleich sind, oder die Strombahn Krümmungen hat, keine Anwendung derselben Statt findet, auch bis jetzt, aus Mangel an zulänglichen Erfahrungen, kein allgemein geltender Ausdruck für dergleichen Fälle aufgestellt werden kann, und selbst für die unbedingte Anwendung dieses Ausdrucks, noch mehrere Erfahrungen zur Bestätigung desselben bei großen Strömen, zu wünschen sind. Die von mir gemachte Beobachtung (130. §. Zusatz) stimmt übrigens gut mit der Formel überein.

Beispiel. Ein Fluß dessen Querprofil 100 Fuß Umfang und 600 □ Fuß Inhalt hat, besitzt auf 100 Ruthen, oder 1200 Fuß, 3 Zoll Gefälle, wie groß wird die mittlere Geschwindigkeit des Wassers seyn, wenn vorausgesetzt wird, daß auf die Weite von 100 Ruthen, Profil und Richtung des Stroms beinahe ungeändert bleiben?

Hier ist $s = 600$, $p = 100$, $\alpha = 3$ Zoll =

$\frac{1}{4}$ Fuß, $\lambda = 1200$ daher die mittlere Geschwindigkeit

$$c = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{600}{100} \cdot \frac{1}{1200 \cdot 4}\right)}$$
$$= 3{,}21 \text{ Fuß.}$$

128. §.

Für rechtwinklichte Querprofile, wenn

h die Höhe, und
b die Breite ist, erhält man
$s = bh$
$p = b + 2h$ daher in diesem Falle

die mittlere Geschwindigkeit

$$\text{I.} \quad c = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{bh}{b+2h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

die Breite des Profils

$$\text{II.} \quad b = \frac{hc^2}{4131{,}4\, h \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{1}{2} c^2},$$

die Höhe des Profils

$$\text{III.} \quad h = \frac{bc^2}{8262{,}8\, b \frac{\alpha}{\lambda} - 2c^2}$$

das Gefälle

$$\text{IV.} \quad \alpha = \frac{c^2 (b + 2h)\lambda}{8262{,}8\, bh} = \frac{c^2 p \lambda}{8262{,}8\, s}$$
$$= 0{,}000121 \frac{c^2 p \lambda}{s}$$

die Länge welche zum Gefälle α gehört

$$\text{V.} \quad \lambda = \frac{8262{,}8\, bh\alpha}{c^2 (b+2h)} = \frac{8262{,}8 \cdot s \cdot \alpha}{c^2 p}$$

1. Beispiel. Ein rechtwinklichtes Gerinne ist 3 F breit und 1 Fuß hoch, sein Gefälle beträgt

100 Fuß, 2 Zoll. Man sucht die mittlere Geschwindigkeit des Wassers.

$b = 3$, $h = 1$, $\lambda = 100$, $\alpha = \frac{1}{6}$ daher

$$c = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{1 \cdot 3}{3+2} \cdot \frac{1}{100 \cdot 6}\right)} = 2{,}87 \text{ Fuß.}$$

. Beispiel. Wie groß wird die Breite eines rechtwinklichten Gerinnes seyn müssen, wenn das Wasser in demselben $1\frac{1}{2}$ Fuß hoch stehen, und bei einem Gefälle von 2 Zoll auf 100 Fuß, sich mit einer Geschwindigkeit von 3 Fuß bewegen soll?

Hier ist $h = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\alpha = \frac{1}{6}$, $\lambda = 100$, $c = 3$ daher die gesuchte Breite

$$b = \frac{\frac{3}{2} \cdot 3^2}{4131{,}4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{600} - 1 \cdot 3^2} = 2{,}31 \text{ Fuß.}$$

. Beispiel. Wie groß ist das Gefälle, welches ein in der Sohle 6 Fuß breiter, 3 Fuß tiefer und auf beiden Seiten mit einer einfüßigen Dossirung versehener Abzugsgraben auf 100 Ruthen haben muß, damit das Wasser sich mit einer Geschwindigkeit von 1 Fuß in demselben bewege?

Wenn die Unterbreite des Profils 6 Fuß ist, so wird die Oberbreite 12 Fuß, also der Inhalt $s = 27$ □ Fuß, $p = 6 + 2\sqrt{18} = 14{,}48$, $\lambda = 1200$ Fuß, daher das Gefälle

$$\alpha = \frac{0{,}000121 \cdot 1 \cdot 14{,}48 \cdot 1200}{27} = 0{,}0779 \text{ Fuß}$$
$$= \frac{15}{16} \text{ Zoll.}$$

Unter eben den Voraussetzungen erhält man für einen zwei Fuß tiefen Graben

$s = 16$, $p = 6 + 2\sqrt{8} = 11{,}7$ und $\lambda = 1200$ daher

$$\alpha = \frac{0{,}000121 \cdot 1 \cdot 11{,}7 \cdot 1200}{16} = 0{,}106 \text{ Fuß}$$
$$= 1{,}27 \text{ Zoll.}$$

Man sieht hieraus, daß wenn in zwe[illegible]en Abzugsgräben das Wasser in dem ei[illegible] als

in dem andern steht, der erstere ein größeres Gefälle nöthig hat als der letztere, um das Wasser mit eben der Geschwindigkeit abzuführen. Auch läßt sich hieraus erklären, weshalb bei einem Abzugsgraben, wenn in demselben bei ungeändertem Gefälle das Wasser höher steht, derselbe auch besser zieht, oder das Wasser sich in ihm schneller bewegt.

129. §.

Wird durch außerordentliche Zuflüsse die Höhe des Wassers in den Flußbetten vergrößert, so hat dieses gewöhnlich eine Vermehrung der mittleren Geschwindigkeit und des Gefälles zur Folge. Wenn daher bei ungeänderter Höhe h die mittlere Geschwindigkeit

$$c = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{b\,h}{b + 2h}\;\frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

und bei unveränderter mittlerer Breite b die durch Anschwellung entstandene Höhe h' und das Gefälle α' ist, so erhält man die mittlere Geschwindigkeit des angeschwellten Flusses

$$c' = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{b\,h'}{b + 2h'}\;\frac{\alpha'}{\lambda}\right)}$$

und es verhält sich

$$c : c' = \sqrt{\left(\frac{b\,h\,\alpha}{b + 2h}\right)} : \sqrt{\left(\frac{b\,h'\alpha'}{b + 2h'}\right)}.$$

Sind die Gefälle nicht merklich von einander verschieden, so kann man bei sehr breiten Strömen $b + 2h = b + 2h'$ annehmen, und es ist beinahe

$$c : c' = \sqrt{h} : \sqrt{h'}$$

oder bei breiten Strömen verhalten sich die mittlern Geschwindigkeiten bei verschiedenen Anschwellungen, beinahe wie die Quadratwurzeln aus den mittlern Wassertiefen.

130. §.

Wird die Wassermenge welche in jeder Se-
unde durch den Querschnitt eines Flusses läuft $= M$ gesetzt, so ist in Verbindung mit den vor- in eingeführten Größen, die Wassermenge

$$\text{I.}\quad M = c \cdot s = 90{,}9 \cdot s \sqrt{\left(\frac{s}{p} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

$$= 90{,}9 \cdot bh \sqrt{\left(\frac{bh}{b+2h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}.$$

nd hieraus der Inhalt des Querschnitts

$$\text{II.}\quad s = \sqrt[3]{\left(\frac{M^2 p \lambda}{8262{,}8\,\alpha}\right)}$$

Ferner der Umfang oder die Wand des Quer-
chnitts

$$\text{III.}\quad p = \frac{8262{,}8\, s^3 \alpha}{M^2 \lambda}$$

die Breite des rechtwinklichten Profils

$$\text{IV.}\quad b^3 - \left(\frac{M^2\lambda}{8262{,}8\, h^3 \alpha}\right) b - 2\left(\frac{M^2\lambda}{8262{,}8\, h^3\alpha}\right) h = 0$$

ie Höhe des rechtwinklichten Profils

$$\text{V.}\quad h^3 - 2\left(\frac{M^2\lambda}{8262{,}8\, b^3\alpha}\right) h - \left(\frac{M^2\lambda}{8262{,}8\, b^3\alpha}\right) b = 0$$

as Gefälle

$$\text{VI.}\quad \alpha = \frac{M^2 p \lambda}{8262{,}8\, s^3}$$

$$= \frac{b+2h}{8262{,}8\, b^3 h^3} M^2 \lambda$$

ie dazu gehörige Länge

$$\text{VII.}\quad \lambda = \frac{8262{,}8\, s^3 \alpha}{M^2 p}$$

$$= \frac{8262{,}8\, b^3 h^3 \alpha}{(b+2h)\, M^2}$$

Es wird leicht seyn, für diese allgemeine Aus-
rücke besondere Beispiele zu wählen, wobei zu be-

in dem andern steht, der erstere ein größeres Gefälle nöthig hat als der letztere, um das Wasser mit eben der Geschwindigkeit abzuführen. Auch läßt sich hieraus erklären, weshalb bei einem Abzugsgraben, wenn in demselben bei ungeändertem Gefälle das Wasser höher steht, derselbe auch besser zieht, oder das Wasser sich in ihm schneller bewegt.

129. §.

Wird durch außerordentliche Zuflüsse die Höhe des Wassers in den Flußbetten vergrößert, so hat dieses gewöhnlich eine Vermehrung der mittleren Geschwindigkeit und des Gefälles zur Folge. Wenn daher bei ungeänderter Höhe h die mittlere Geschwindigkeit

$$c = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{b\,h}{b + 2\,h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

und bei unveränderter mittlerer Breite b die durch Anschwellung entstandene Höhe h′ und das Gefälle α′ ist, so erhält man die mittlere Geschwindigkeit des angeschwellten Flusses

$$c' = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{b\,h'}{b + 2\,h'} \cdot \frac{\alpha'}{\lambda}\right)}$$

und es verhält sich

$$c : c' = \sqrt{\left(\frac{b\,h\,\alpha}{b + 2\,h}\right)} : \sqrt{\left(\frac{b\,h'\alpha'}{b + 2\,h'}\right)}.$$

Sind die Gefälle nicht merklich von einander verschieden, so kann man bei sehr breiten Strömen $b + 2\,h = b + 2\,h'$ annehmen, und es ist beinahe

$$c : c' = \sqrt{h} : \sqrt{h'}$$

oder bei breiten Strömen verhalten sich die mittlern Geschwindigkeiten bei verschiedenen Anschwellungen, beinahe wie die Quadratwurzeln aus den mittlern Wassertiefen.

130. §.

Wird die Wassermenge welche in jeder Secunde durch den Querschnitt eines Flusses läuft = M gesetzt, so ist in Verbindung mit den vorhin eingeführten Größen, die Wassermenge

$$\text{I.} \quad M = c \cdot s = 90{,}9 \cdot s \sqrt{\left(\frac{s}{p} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

$$= 90{,}9 \cdot bh \sqrt{\left(\frac{bh}{b + 2h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}.$$

und hieraus der Inhalt des Querschnitts

$$\text{II.} \quad s = \sqrt[3]{\left(\frac{M^2 p \lambda}{8262{,}8\, \alpha}\right)}$$

ferner der Umfang oder die Wand des Querschnitts

$$\text{III.} \quad p = \frac{8262{,}8\, s^3 \alpha}{M^2 \lambda}$$

die Breite des rechtwinklichten Profils

$$\text{IV.} \quad b^3 - \left(\frac{M^2 \lambda}{8262{,}8\, h^3 \alpha}\right) b - 2\left(\frac{M^2 \lambda}{8262{,}8\, h^2 \alpha}\right) = 0$$

die Höhe des rechtwinklichten Profils

$$\text{V.} \quad h^3 - 2\left(\frac{M^2 \lambda}{8262{,}8\, b^3 \alpha}\right) h - \left(\frac{M^2 \lambda}{8262{,}8\, b^2 \alpha}\right) = 0$$

das Gefälle

$$\text{VI.} \quad \alpha = \frac{M^2 p \lambda}{8262{,}8\, s^3}$$

$$= \frac{b + 2h}{8262{,}8\, b^3 h^3} \cdot M^2 \lambda$$

die dazu gehörige Länge

$$\text{VII.} \quad \lambda = \frac{8262{,}8\, s^3 \alpha}{M^2 p}$$

$$= \frac{8262{,}8\, b^3 h^3 \alpha}{(b + 2h)\, M^2}$$

Es wird leicht seyn, für diese allgemeinen Ausdrücke besondere Beispiele zu wählen, we[illegible]

merken ist, daß die Bestimmung der Werthe b und h die Auflösung einer kubischen Gleichung erfordert.

Zusatz. In dem 104. §. beschriebenen 4 Fuß breiten Kanal, welcher rechtwinklicht mit Bohlen ausgesetzt war, und dessen Sohle auf 100 Fuß beinahe einen Zoll Gefälle hatte, nahm die Oberfläche des Wassers bei ungehindertem Laufe und einer mittlern Tiefe von $5\frac{1}{2}$ Zoll, ein Gefälle von $\frac{2}{3}$ Zoll auf 100 Fuß an. Die auf verschiedene Art ausgemessene Wassermenge war in jeder Sekunde 2,327 Kubikfuß. Hienach ist

$\alpha = \frac{2}{3 \cdot 12} = \frac{1}{18}'$; $\lambda = 100'$; $h = \frac{5\frac{1}{2}}{12} = \frac{11}{24}'$ und $b = 4'$.

Ferner $s = \frac{11}{6} \square'$ und $p = \frac{59}{12}'$

Bestimmt man daraus die Wassermenge, so wird

$$M = 90{,}9 \cdot \tfrac{11}{6} \sqrt{\left[\frac{11 \cdot 12}{6 \cdot 59} \cdot \frac{1}{18 \cdot 100}\right]} = 2{,}398 \text{ K. F.}$$

welche von den aus den Beobachtungen gefundenen 2,327 K. F. nur wenig abweichen, und so weit es hier erwartet werden kann, eine gute Uebereinstimmung geben.

131. §.

Die Gestalt welche man einem Stromprofile bei unverändertem Flächeninhalte giebt, ist nicht gleichgültig; denn das Wasser wird desto langsamer fließen, je größer der Umfang des Profils in Bezug auf die zugehörige Fläche ist. Dieses ist mit eine von den vorzüglichsten Ursachen, daß sich die Geschwindigkeit der Flüsse bei einem niedrigern Wasserstande vermindert, und weshalb kleine Bäche, die mit großen Flüssen einerlei Gefalle haben, öfters weit langsamer fließen.

Unter allen Flächen, hat die Kreisfläche den kleinsten Umfang, und da die Oberfläche des

Wassers bei einem Profil als Umfang oder Wand, nicht in Rechnung kommt, so muß auch unter al- en Profilen von gleichem Inhalte, dasjenige den kleinsten Umfang haben, welches einer halben Kreisfläche am nächsten kommt.

Eben dieses gilt von dem halben Quadrat in Absicht der vierseitigen Figuren, weshalb das- jenige rechtwinklichte Gerinne, welches zur Abfüh- rung einer bestimmten Wassermenge dienen soll, nicht nur das wenigste Holz erfordert, sondern auch das Wasser am schnellsten abführt, wenn die Höhe halb so groß als die Grundlinie ist.

Unter den trapezförmigen Profilen hat das halbe Sechseck den kleinsten Umfang, weil aber die Seitendossirungen desselben zu steil sind, so wird solches in der Ausübung nicht leicht angewandt werden. Um aber ein trapezförmiges Profil anzu- geben, welches hinlängliche Dossirung und dabei den möglichst kleinsten Umfang hat, so kann dazu das rechtwinklichte Profil dienen, wenn man dessen Breite in sechs gleiche Theile theilt, und davon drei Theile zur Höhe, zehn Theile zur Oberbreite, und zwei Theile zur Unterbreite des trapezförmigen Profils nimmt, in welchem Falle alsdenn die Grundlinie der Uferböschung $\frac{4}{3}$ von der Höhe ist.

Beide, sowohl das rechtwinklichte als trapez- förmige Profil, haben einerlei Inhalt und Um- fang, und können daher als gleichgeltende an- gesehen werden.

Setzt man die Höhe eines solches rechtwink- e
len Profils $= e$, so ist

seine Breite $= 2e$

der Umfang $= 4e$

der Inhalt $= 2e^2$

Für das gleichgeltende trapezförmige Profil

die Höhe $= e$

die Oberbreite $= \frac{10}{3} e$

die Unterbreite $= \frac{2}{3} e$

der Umfang $= 4 e$

der Inhalt $= 2 e^2$

und hienach überhaupt für dergleichen gleich-tende Profile

die mittlere Geschwindigkeit

$$c = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{1}{2} e \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

die Wassermenge

$$M = 2 e^2 c$$
$$= 181{,}8\, e^2 \sqrt{\left(\frac{1}{2} e \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

die Höhe

$$e = \sqrt{\frac{M}{2c}}$$
$$= \sqrt[5]{\left(\frac{M^2 \lambda}{2 \cdot 90{,}9^2 \alpha}\right)}$$

das Gefälle

$$\alpha = \frac{c^2 \lambda}{4131{,}4\, e}.$$

1. Beispiel. In einem rechtwinklichten Gerinne sollen in jeder Sekunde 15 Kubikfuß Wasser, mit einer mittlern Geschwindigkeit von 6 Fuß abgeführt werden; wie müssen die Abmessungen desselben beschaffen seyn, damit solches den kleinsten möglichen Abhang erhält?

$M = 15$, $c = 6$ daher

die Höhe des Wassers im Gerinne

$e = \sqrt{\frac{15}{12}} = 1{,}118$ Fuß und

hieraus die Breite

$2 e = 2{,}236$ Fuß

wonach man auf eine Weite von 120 Fuß das kleinstmögliche Gefälle findet

$$\alpha = \frac{36 \cdot 120}{4131,4 \cdot 1,118} = 0,935 \text{ Fuß}$$
$$= 11,22 \text{ Zoll.}$$

Im vorliegenden Falle, fände man für ein gleichgeltendes trapezförmiges Profil die Oberbreite

$$\tfrac{10}{3} e = 3,72 \text{ Fuß}$$

und die Unterbreite

$$\tfrac{2}{3} e = 0,745 \text{ Fuß.}$$

Die gefundenen Abmessungen der Profile müssen deshalb zu dem kleinsten Gefälle gehören, weil sie dem geringsten Umfange des Profils entsprechen.

Beispiel. Man soll einen Kanal graben lassen, welcher auf 100 Ruthen 5 Zoll Gefälle hat, und der in jeder Sekunde 2500 Kubikfuß Wasser abführt. Wie müssen die Abmessungen seines Querprofils beschaffen seyn, damit solches die vortheilhafteste Gestalt erhält, bei welcher die wenigste Erde auszugraben nöthig ist?

Vorausgesetzt, daß die Grundlinie der Uferböschung $\frac{4}{3}$ der Höhe sei, so wird ein jedes anderes Profil, als das vorhin beschriebene, bei eben derselben Böschung und demselben Inhalte, einen größern Umfang geben. Aber der größere Umfang vermindert die Geschwindigkeit und erfordert daher einen größern Flächenraum des Profils, daher können nur die angegebenen Abmessungen in Ansehung der auszugrabenden Erde, und den davon abhängenden Kosten, die vortheilhafteste Gestalt geben.

Nun ist $M = 2500$, $\lambda = 100 . 12 = 1200$ Fuß, und $\alpha = \frac{5}{12}$ Fuß. Aber

$$h = \sqrt[5]{\left(\frac{M^2 \lambda}{2 \cdot 90,9^2 \alpha}\right)}$$

oder wenn man sich der Logarithmen bedient

$$\text{Log } h = \tfrac{1}{5} \text{ Log} \left(\frac{M^2 \lambda}{2 \cdot 90,9^2 . \alpha}\right)$$

Hienach erhält man

$\text{Log}\,M^2 = 2\,\text{Log}\,M = 6{,}7958800$

$\text{Log}\,\lambda = 3{,}0791812$

also $\text{Log}\,(M^2\lambda) = 9{,}8750612$ . . 9,875

$\text{Log}\,90{,}9^2 = 2\,\text{Log}\,90{,}9 = 3{,}9171278$

$\text{Log}\,2\alpha = 0{,}9208187 - 1$

also $\text{Log}\,(90{,}9^2 . 2\alpha) = 3{,}8379465$ . . 3,8379

$$\text{Log}\left(\frac{M^2\lambda}{2 \cdot 90{,}9^2\,\alpha}\right) = 6{,}0371$$

$$\text{Log}\,h = \tfrac{1}{5}\,\text{Log}\left(\frac{M^2\lambda}{2 \cdot 90{,}9^2\,\alpha}\right) = 1{,}2074$$

Nach den Tafeln stimmt hiezu die Zahl 16, daher ist für den Kanal

die Tiefe $e = 16{,}122$ Fuß

die Oberbreite $\frac{10}{3}\,e = 53{,}74$ Fuß

die Unterbreite $\frac{2}{3}\,e = 10{,}75$ Fuß.

Zusatz. Bei der Untersuchung über die gleichförm Bewegung des Wassers in Flußbetten ist alle vorausgesetzt worden, daß die Oberfläche des W sers mit der Sohle des Flußbettes parallel sei, u unter dieser Bedingung nur der allgemeine Ausd im 127. §. Anwendung findet. Wäre bei einem rinne oder Kanal, dessen Querschnitt ein Rech ist, die Sohle horizontal, so ist einzusehen, wenn der Wasserspiegel mit der Sohle parallel w das Wasser stillstehen müßte. Soll es fließen, muß der Wasserspiegel gegen den Horizont gen seyn, also bei unveränderter Breite des Kanals, obere Querschnitt, wo das Wasser in den Ka fließt, höher als der untere Querschnitt am E des Kanals bei dem Ausflusse seyn.

Man setze, daß für den untern Querschnitt und b die bekannte Bedeutung (128. §.) haben, d dieser Querschnitt nebst der Wassermenge M beka

sei. In einer Entfernung y von dem untern Querschnitt, oberhalb des Kanals, sei daselbst die Wassertiefe $= x$. Wächst nun y um dy, also x um dx, so ist für die dünne Wasserschicht von der Dicke dy, der Abhang $\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{dx}{dy}$ daher (130. §. VI.)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{M^2(b+2x)}{\beta^2 b^3 x^3} \text{ oder } dy = \frac{\beta^2 b^3}{M^2} \cdot \frac{x^3 dx}{b+2x}$$

wo $\beta^2 = 8262{,}8$ ist.

Hieraus erhält man, wenn

$b+2x=z$ und $b+2h=p$ gesetzt wird

$x=\frac{1}{2}(z-b)$; $dx=\frac{1}{2}dz$

und wenn man diese Werthe substituirt und $\frac{\beta^2 b^3}{16M^2}=A$ setzt

$dy=A(z^2-3zb+3b^2-\frac{b^3}{z})\,dz$ also wenn man integrirt

$y=A(\frac{1}{3}z^3-\frac{3}{2}bz^2+3b^2z-b^3 \operatorname{Log nat} z)+\text{Const.}$

Für $y=0$ wird $x=h$ also $z=b+2h=p$ daher

$\text{Const}=-A(\frac{1}{3}p^3-\frac{3}{2}bp^2+3b^2p-b^3 \operatorname{Log nat} p)$

folglich

$$=A\left[\tfrac{1}{3}(z^3-p^3)-\tfrac{3}{2}b(z^2-p^2)+3b^2(z-b)-b^3 \operatorname{L.nat}\frac{z}{p}\right]$$

Setzt man für z und p die zugehörigen Werthe und kürzt ab, so wird

$$=2A\left[b^2(x-h)-b(x^2-h^2)+\tfrac{4}{3}(x^3-h^3)-\tfrac{1}{2}b^3 \operatorname{L.nat}\frac{b+2x}{b+2h}\right]$$

Nun ist

$$\frac{b+2x}{b+2h} = 1 + \frac{2(x-h)}{b+2h}$$

und weil nach bekannten Lehren

$$\operatorname{Log}(1+u)=u-\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{3}u^3-\tfrac{1}{4}u^4+\tfrac{1}{5}u^5-\ldots$$

so erhält man auch

$$\operatorname{Log}\frac{b+2x}{b+2h}=\frac{2(x-h)}{b+2h}-\frac{2(x-h)^2}{(b+2h)^2}+\frac{8(x-h)^3}{3(b+2h)^3}-\ldots$$

Wenn man aber nur die beiden ersten Glieder die-

ser Reihe beibehält, weil das dritte und die folgenden Glieder so abnehmen, daß solche keinen merklichen Einfluß auf die Rechnung haben, so erhält man, wenn

$$\frac{2(x-h)}{b+2h} - \frac{2(x-h)^2}{(b+2h)^2} \text{ statt } \operatorname{Log}\frac{b+2x}{b+2h}$$

in die Gleichung von y gesetzt, und die Glieder welche sich aufheben weggelassen werden

$$y = \tfrac{8}{3}A\left[x^3 - \frac{3bh(b+h)}{(b+2h)^2}x^2 + \frac{3b^2h^2}{(b+2h)^2}x - \frac{b^2+bh+4h^2}{(b+2b)^2}h^3\right]$$

wo allemal, wenn die Höhe x eines Querschnitts gegeben wird, die dazu gehörige Entfernung von demjenigen Querschnitte, dessen Abmessungen b, h sind, bestimmt werden kann.

Gewöhnlich ist die Länge y = l gegeben, und man fragt nach der Höhe x welche dieser Länge zugehört. In diesem Falle setze man in der obigen Gleichung l statt y und $\frac{\beta^2\ b^3}{16\ M^2}$ statt A, ordne die Gleichung nach den Potenzen von x, so entstehet der Ausdruck

$$x^3 - \frac{3bh(b+h)}{(b+2h)^2}x^2 + \frac{3b^2h^2}{(b+2h)^2}x = \frac{6lM^2}{\beta^2 b^3} + \frac{b^2+bh+4h^2}{(b+2b)^2}h^3$$

Die Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sind bekannte Größen, daher kann durch Auflösung dieser kubischen Gleichung, die Höhe x und das im Kanal erforderliche Gefälle x — h bestimmt werden *)

Beispiel. Für einen Kanal mit horizontalem Boden, dessen unterer Querschnitt 1 Fuß hoch ist, soll auf eine Entfernung von 1000 Fuß oberhalb, die Höhe des

*) Es läßt sich leicht einsehen, daß die Coeffizienten vor x^2 und x einfacher ausgedrückt werden könnten, wenn man $x = \frac{bh}{b+2h}\,w$ setzte und die Gleichung nach w ordnet, da dann, wenn w bestimmt ist, auch x gefunden werden kann.

des Querschnitts gefunden werden, wenn der Kanal durchgängig 5 Fuß breit ist, und in jeder Sekunde 10 Kubikfuß Wasser abfließen.

Hier ist $l = 1000$, $h = 1$, $b = 5$, und $M = 10$; daher erhält man statt des obigen Ausdrucks

$$x^3 - 1{,}83673\,x^2 + 1{,}53061\,x - 1{,}27479 = 0$$

Setzt man verschiedene Werthe für x, so ist

für $x = 1{,}4$ der Rest $+ 0{,}012$

für $x = 1{,}3$ der Rest $- 0{,}192$

woraus man schließen kann, daß x zwischen 1,4 und 1,3 und zwar sehr nahe bei 1,4 liegen muß.

Für $x = 1{,}39$ ist der Rest $- 0{,}0101$

also in Beziehung auf die Reste, sehr nahe die Höhe

$$x = 1{,}394 \text{ Fuß}.$$

Der 1000 Fuß lange Kanal erfordert hienach ein efälle

$$x - h = 0{,}394 \text{ Fuß} = 4{,}7 \text{ Zoll}.$$

132. §.

Bei den bisherigen Untersuchungen ist nur von r mittleren Geschwindigkeit des Wassers in ei- m Querprofile die Rede gewesen. Die Geschwin- gkeiten in jedem einzelnen Theile eines solchen uerschnitts können sehr verschieden seyn, nachdem ehrere Ursachen zur Vermehrung oder Vermin- rung derselben beitragen. So findet man zwi- hen graden und parallelen Ufern, meistentheils i der Mitte des Wasserspiegels über der größten iefe, eine größere Geschwindigkeit, als auf bei- en Seiten und nach dem Grunde zu, welches sich uch sehr wohl aus dem Zusammenhange des Wassers längs den Wänden des Flußbettes und en daselbst entstehenden Hindernissen der Bewe- ung erklären läßt. Bei Stromkrümmungen be- indet sich gewöhnlich die größte Geschwindigkeit

näher nach dem konkaven als nach dem konvexen Ufer, welches von der Richtung des Stroms auf das konkave Ufer herrührt.

Die verschiedenen Geschwindigkeiten in der Oberfläche des fließenden Wassers sind Ursache, daß gewöhnlich die oberste Linie eines Querprofils welche den Wasserspiegel bemerkt, nicht grade, sondern gegen die Mitte höher als an den Seiten ist, weil das schneller fließende Wasser, weniger Seitendruck als das langsamer fließende äußert.

Genaue Beobachtungen über die verschiedenen Geschwindigkeiten in den Querschnitten eines Stroms, haben die Herren Brünings und Ximenes *) angestellt, und ob sich gleich aus diesen vortrefflichen Beobachtungen noch kein allgemeines Gesetz zur Bestimmung der Abnahme der Geschwindigkeiten ableiten läßt, so geht doch so viel daraus hervor, daß die Geschwindigkeiten von oben nach unten zu abnehmen, und daß für einerlei Vertikallinie, bei größern Geschwindigkeiten an der Oberfläche, die Abnahmen bei einerlei Tiefen größer sind, als bei kleinern Geschwindigkeiten.

Nahe an der Oberfläche scheint zwar dieses Gesetz, nach den Brüningsschen Versuchen eine ge-

---

*) Man sehe hierüber:

Herrn Brünings Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers, und von den Mitteln, dieselben auf allen Tiefen zu bestimmen. A. d. Holländischen übers. von Krönke, mit einer Vorrede von Herrn Wiebeking. Frankfurth a. M. 1798.

R. Woltmann, Beiträge zur hydraulischen Architektur. Dritter Band, Göttingen 1794, S. 295 u. f.

Ximenes Nouve sperienze Idrauliche, fatte ne' Canali e ne' Fiumi per verificare le principali leggi e fenomini delle acque correnti. Siena 1780.

ige Ausnahme zu leiden, indem zuweilen die größte eschwindigkeit für eine bestimmte Tiefe, etwas iter dem Wasserspiegel angegeben ist. Diese ge- ige Ausnahme kann aber, wenn nicht die größte enauigkeit erfordert wird, aus der Acht gelassen erden, und man darf um so weniger darauf ücksicht nehmen, weil es schwierig ist, mit dem Strommesser die Geschwindigkeit nahe an der berfläche genau anzugeben.

Anmerk. Vormals glaubte man, daß die Geschwindigkeiten des Wassers von oben nach unten zunehmen, aber schon Pitot (Description d'une machine pour mesurer la vitesse des eaux courantes, Mém. de l'acad. roy. des sciences. 1732. Edit. Batav. p. 504) führt Versuche auf der Seine an, nach welchen die Geschwindigkeiten von oben nach unten zu, abnehmen.

Von nachstehenden beiden Tafeln bezieht sich die erste auf Versuche des Abts Ximenes, die zweite aber auf die Brüningsschen Versuche. Die beiden letzten horizontalen Spalten derselben, bestimmen die mittlere Geschwindigkeit in jeder Vertikale. Die Reihe I. giebt das Mittel aus den Erfahrungen, und II. nach der gleich folgenden Formel für v.

Tiefe unter der Oberfläche des Arno-Flusses.		Verhältniß der dazu gehörigen Geschwindigkeiten.	Geschwindigkeiten.
Soldi.	Rheinl. Fuß.		Rheinl. Zoll.
12,50	1,932	1000	38,398
18,75	2,898	987	37,898
25,00	3,864	972	37,322
31,25	4,830	971	37,284
37,50	5,796	943	36,209
43,75	6,763	944	36,247
56,00	7,729	939	36,055
56,25	8,695	940	36,094
62,50	9,661	939	36,055
68,75	10,627	911	34,980
75,00	11,593	911	34,980
81,25	12,559	890	34,174
87,50	13,526	874	33,559
93,75	14,492	862	33,099
100,00	15,458	848	32,561
106,75	16,502	780	29,950
mittlere Geschwindigkeit.	I.		35,304
	II.		36,159

Tiefe unter der Oberfläche.		Beobachtete Geschwindigkeiten. Namen der Flüsse in welchen die Beobachtungen angestellt sind.					
		Nieder-Rhein.	Ober-Rhein.	Nieder-Rhein.	Waal.	Ober-Rhein.	Waal.
Rhl. Fuß.		Rhl. Z	Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z.
1		56,76	56,11	54,79	46,87	41,92	27,06
2		55,45	53,44	55,45	46,08	42,78	25,67
3		54,12	54,79	51,46	44,46	41,04	25,67
4		54,12	55,45	53,43	46,87	40,13	24,21
5		54,79	54,79	54,12	46,08	41,92	24,21
6		52,75	52,75	54,12	46,08	40,13	24,21
7		52,75	54,12	53,43	44,46	39,21	
8		54,79	52,05	52,75	43,63	37,30	
9		50,62	52,05	53,43	43,63	36,30	
10		50,62	51,46	51,46	44,46		
11		48,08	46,67	49,98	42,78		
12		45,28	44,46	48,40	41,04		
13		44,46	46,87	43,26	38,27		
14		46,08	43,63		36,30		
15			41,04		35,28		
mittlere Geschwindigkeit.	I.	51,278	50,941	52,293	43,243	40,463	25,388
	II.	53,808	52,967	52,160	44,245	40,578	26,518

133. §.

Die mittlere Geschwindigkeit in einem Quer-ofile, muß nicht mit der mittleren Geschwindig-t, welche in irgend einer vertikalen Tiefe dessel-1, vom Wasserspiegel bis aufs Grundbette, tatt findet, verwechselt werden, weil dieses nur mittlere Geschwindigkeit für eine Linie, jenes er für eine Fläche ist.

Aus den angeführten Versuchen läßt sich so nge, bis Theorie und mehrere Erfahrungen hts mehr zu wünschen übrig la ersuchen größtentheils entspre usübung ableiten, um für ein

kale Tiefe, wenn die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Wassers gemessen ist, die dazu gehörige mittlere Geschwindigkeit zu finden. Sie ist von mir in den Zusätzen zum ersten Theile der Buat'schen Hydraulik S. 125 mitgetheilt, und daselbst mit mehreren Beobachtungen verglichen.

Wenn nemlich

- c die Geschwindigkeit des Wassers in der Oberfläche,
- h die dazu gehörige vertikale Wassertiefe, und
- v die mittlere Geschwindigkeit in dieser Tiefe bezeichnet,

so kann man den Beobachtungen gemäß im Durchschnitte annehmen, daß sich die Geschwindigkeit des Wassers, auf jeden Fuß Tiefe, um einen Theil

$$= 0{,}008 \, . \, c$$

vermindert, so daß auf die ganze Tiefe von h Fuß, die Geschwindigkeit c um 0,008 . c . h abgenommen hat, und daher am Grundbette = c − 0,008 ch ist. Aus der obern und untern Geschwindigkeit findet man die mittlere

$$v = \frac{c + c - 0{,}008 \, . \, ch}{2} = c - 0{,}004 \, ch \text{ oder}$$

$$v = c \, (1 - 0{,}004 \, h)$$

wo sich alle Größen auf rheinländische Fuße beziehen. Wird c in Zoll ausgedrückt, so erhält man v ebenfalls in Zollen.

Beispiel. Für eine Tiefe h = 12 Fuß sei die Geschwindigkeit c an der Oberfläche = 3 Fuß, so ist die mittlere Geschwindigkeit für diese Vertikale

$$v = 3 \, (1 - 0{,}004 \, . \, 12) = 2{,}856 \text{ Fuß.}$$

Anmerk. Wenn man für eine gegebene Tiefe zu jeder bestimmten Entfernung die entsprechenden Geschwindigkeiten senkrecht aufträgt, so entstehet daraus eine

Stromgeschwindigkeitsscale. Ist die Linie, welche durch die Endpunkten der Geschwindigkeiten geht, grade, so heißt sie eine grade; ist sie krumm, z. B. eine umgekehrte Parabel, so heißt sie parabolisch.

Herr Wasserbaudirektor Woltmann nimmt an *), daß diese Scale einer umgekehrten Parabel entspreche; von welcher Voraussetzung aber Herr Rath Langsdorf sehr gegründet (Hydraulik 189. §) anführt, daß sie sich von den wirklichen Beobachtungen zu sehr entferne; weil aber, außer dieser Voraussetzung, die vorhandenen Versuche noch unzählig viele andere Hypothesen zulassen, da es noch zu sehr an einem Geschwindigkeitsmesser fehlt, welcher in jeder Tiefe die Geschwindigkeit des Wassers so genau angiebt, daß man mit Zuverlässigkeit hierüber etwas entscheiden könnte, so ist die von mir angegebene Formel deshalb gewählt, weil sie möglichst einfach für die Ausübung ist, und sich nie weit von den bekannten Erfahrungen entfernt. Wenn erst einmal, unter allen möglichen Umständen, zuverlässige Versuche bekannt sind, dann wird sich hierüber etwas mit Gewißheit bestimmen lassen, welches aber jetzt noch zu früh ist, daher man sich mit einer leichten Annäherung behelfen muß.

134. §.

Weil es in einem unregelmäßigen Flusse nicht öglich ist, die Wassermenge desselben, nach der 27. §. gefundenen allgemeinen Formel für die leichförmige Bewegung des Wassers in Flüssen u bestimmen, so bleibt nichts übrig, als mit Hülfe ines brauchbaren Stromgeschwindigkeitsmessers, die inzelnen Geschwindigkeiten eines Querprofils ausrmitteln, und hienach die Wassermenge zu beechnen. Da es aber ebenfalls in der Ausübung,

---

*) Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels, on R. Woltmann. Hamburg 1790. S. 47.

und besonders bei tiefen Flüssen, nicht leich
die verschiedenen Geschwindigkeiten in jeder
zu messen, und man selten mit einem Instru
versehen ist, um die Geschwindigkeiten bis au
Grundbett genau zu finden, so muß man si
den meisten Fällen mit Bestimmung der Gesch
digkeiten an der Oberfläche des Wassers begn
da man dann die mittlere Geschwindigkeit fü
Tiefe, nach dem vorhin gefundenen Ausdru
rechnen kann.

Zur Ausmessung der Geschwindigkeit des W
sers nahe an der Oberfläche, kann man sic
im XXIV. Kapitel 279. §. beschriebenen St
quadranten bedienen, welcher sich unter allen
strumenten die hiezu angewandt werden kö
vorzüglich empfiehlt. Kommt es demnächst da
an, die Wassermenge eines Flusses zu
stimmen, so wird erfordert, daß man sich
solche Stromgegend wähle, wo das Bett fest
nicht sehr uneben ist, die Ufer aber auf ein
wisse Weite, in grader paralleler Richtung g
Daselbst wird in einer auf die Richtung des St
senkrechten Fläche, ein Querprofil ABKH d
stalt gemessen,
man auf der O
fläche AB in
schiedenen En
nungen AD,
EF, FG, Gl



dazu gehörigen Tiefen DH, EI, FK, GL mit
Senkblei mißt, und zugleich die dazu gehö
Geschwindigkeiten an der Oberfläche bei D,
G beobachtet, woraus denn leicht die mittlere
schwindigkeit für jeden vertikalen Streifen,
hieraus die Wassermenge gefunden werden ka

Wenn z. B. bei einer Ausmessung die W
AD = 3, DE = 6, EF = 6, GB = 3 Ruthen,

die Tiefen DH = 4, EI = 7, FK = 10, GL = 6 Fuß gefunden sind. Wenn ferner die Geschwindigkeiten in der Oberfläche bei D = 2,8; bei E = 3,1; bei F = 4,5 und bei G = 3,2 Fuß beobachtet sind, so kann hieraus leicht die mittlere Geschwindigkeit für jede zugehörige Tiefe gefunden werden. Theilt man alsdann die Weiten DE, EF, FG durch d, e, f in gleiche Theile, und zieht die Vertikallinien dh ei, fk, so darf nur der Inhalt jeder Fläche, wie Adh, deih, efki, fBk, mit der dazu gehörigen mittlern Geschwindigkeit multiplizirt werden, so giebt die Summe aller Produkte die gesuchte Wassermenge.

Es sei der Inhalt von	Adh	= 288	□ Fuß
	deih	= 504	„ „
	efki	= 710	„ „
	fBk	= 432	„ „

und die berechneten mittleren Geschwindigkeiten

für DH	= 2,755	Fuß
für EI	= 3,013	„ „
für FK	= 4,320	„ „ und
für GL	= 3,123	„ „

so erhält man hiedurch die Wassermenge für die Fläche

Adh	= 288 . 2,755	=	793,4	Kubikfuß
deih	= 504 . 3,013	=	1518,5	„ „
efki	= 710 . 4,320	=	3067,2	„ „
fBk	= 432 . 3,123	=	1349,1	„ „
			6728,2	Kubikfuß.

Es fließen daher durch das ganze Stromprofil ABKH in jeder Sekunde 6728,2 K. F. Wasser.

Die Ausmessung der Stromprofile bei breiten Strömen ist mit Schwierigkeiten verbunden und erfordert besondere Kunstgriffe. Einige Mittel, dergleichen [illegible] zunehmen, findet man in meinen Zusätzen [illegible] Hydraulik, S. 130.

135. §.

Über die Bewegung des Wassers in Flü
findet man außer den bereits angeführten Lan
dorf-, Bossut- und Buatschen Schriften,
in nachstehenden Unterricht:

Herrn Bernhard's, Neue Grundlehren der Hydra
mit ihrer Anwendung auf die wichtigsten T
der Hydrotechnik. A. d. Französischen übersetzt
mit Anmerkungen herausgegeben von K. C. La
dorf. Leipzig und Frankfurth 1790. 3tes Kap
S. 278 u. f.

J. F. Lempe, Lehrbegrif der Maschinenlehre,
Rücksicht auf den Bergbau. Ersten Theils, zu
Abtheilung, oder der technischen Maschinenl
zweiter Band. Leipzig 1797. 2tes Kap. S. 10

Fabre, Essai sur la théorie des torrens et de
vières, à Paris. An VI (1797). I. Part. S
1—5. p. 2. etc

Wiebeking und Krönke, Allgemeine auf Gesch
und Erfahrung gegründete theoretisch-prakt
Wasserbaukunst. Erster Band. Darmstadt 1
S. 391 u. f.

Achtes Kapitel.

Vom Abflusse und Aufstau bei Wehren, Ueberfällen und Einbauen, in Flüssen und Kanälen.

136. §.

Bei Überfällen in einem Flusse kann man in Absicht des Ausflusses unterscheiden:

a) vollkommene Überfälle (*Reversoirs complets*), wenn der Wasserspiegel des Unterwassers niedriger als die Oberfläche der Überlaßschwelle liegt, und

b) unvollkommene Überfälle (*Reversoirs non complets, Demi-reversoirs*), wo der Wasserspiegel des Unterwassers, höher als die Überlaßschwelle liegt.

Bei den Überfällen in Flüssen und Kanälen ist der Unterschied zwischen den im zweiten Kapitel betrachteten, daß das Wasser schon mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit vor dem Überfalle ankommt, und daher der ungesenkte Wasserspiegel nicht horizontal angenommen werden kann.

Zieht man von da, wo der Wasserspiegel oberhalb des Wehres noch beinahe horizontal ist, und mit dem vorherfließenden Wasser einerlei Neigung hat, eine Horizontale KA bis über das Wehr, so ist AB der Wasserstand des Wehrs oder Überfalls. Man setze daß

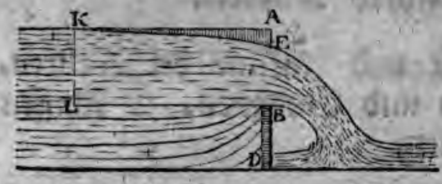
$h = AB$ den Wasserstand,

$k = BD$ die Höhe des Überfalls,

b die Breite desselben,

B die mittlere Breite des Flußbettes, und

M die Wassermenge bezeichnet, so ist



$\frac{M}{(h+k)B}$ die mittlere Geschwindigkeit des Wassers vor dem Überfalle, zu deren Hervorbringung eine Höhe

$$\left(\frac{M}{2\sqrt{g}\,.\,B(h+k)}\right)^2$$

erfordert wird.

Bei Überfällen wo man den obern Wasserspiegel als stillstehend annehmen kann, wäre der erforderliche Wasserstand (107. §.)

$$= \left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}}$$

weil aber das Wassers oberhalb des Überfalls schon eine Geschwindigkeit besitzt, welcher die Höhe $\left(\frac{M}{2\sqrt{g}\,.\,(h+k)B}\right)^2$ zugehört, so wird dadurch im vorliegenden Falle, ein Theil des erforderlichen Wasserstandes entbehrlich; und man erhält den Wasserstand bei einem vollkommenen Überfalle

$$h = \left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{M}{2\sqrt{g}\,(h+k)\,B}\right)^2$$

oder wenn man für Überfälle ohne Flügelwände $\alpha = 5$ setzt, so ist

$$h = \left(\frac{3M}{10\,.\,b}\right)^{\frac{2}{3}} - 0{,}016\left(\frac{M}{(h+k)\,B}\right)^2$$

Für Überfälle mit Flügelwänden, oder wenn $B = b$ ist, erhält man $\alpha = 6{,}76$ (100. §.) also

$$h = \left(\frac{2M}{9\,.\,b}\right)^{\frac{2}{3}} - 0{,}016\left(\frac{M}{(h+k)B}\right)^2$$

ur Bestimmung von h ist zwar diese Größe lbst noch im zweiten Gliede vorhanden, weil aber r Werth dieses Gliedes nur klein ist, so wird an mit Hülfe einer Näherungsmethode den wahn Werth von h so genau bestimmen können, als erfordert wird, ohne deshalb die Gleichung noch rwickelter zu machen.

Beispiel. In einem 100 Fuß breiten und 4 Fuß tiefen Flusse, welcher in jeder Sekunde 1400 Kubikfuß Wasser abführt, soll ein vollkommener Ueberfall 5 Fuß hoch und 80 Fuß breit erbaut werden; man fragt, wie viel wird die Höhe des Oberwassers über dem Ueberfalle betragen, wenn der Ueberfall mit keinen Flügelwänden versehen ist?

Es ist $b = 80$; $B = 100$; $k = 5$ Fuß, und $M = 1400$ Kubikfuß, daher die Höhe

$$h = \left(\frac{3 \cdot 1400}{10 \cdot 80}\right)^{\frac{2}{3}} - 0{,}016 \left(\frac{1400}{100 \cdot (5+h)}\right)^2$$

Nun ist $\left(\frac{3 \cdot 1400}{10 \cdot 80}\right)^{\frac{2}{3}} = 3{,}021$

Setzt man daher etwa $h = 3$, so findet man das letzte Glied der Gleichung

$$0{,}016 \left[\frac{1400}{100\ (5+3)}\right]^2 = 0{,}049$$

folglich die gesuchte Höhe des Oberwassers über dem Ueberfalle

$$h = 3{,}021 - 0{,}049 = 2{,}972 \text{ Fuß}$$

wofür man ohne Nachtheil

$h = 3$ Fuß annehmen kann.

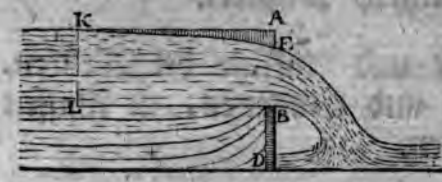
Hienach ist die ursprüngliche Oberfläche des Flusses, oberhalb des Ueberfalles, um

$5 - 4 + 3 = 4$ Fuß erhöhet.

b die Breite desselben,

B die mittlere Breite des Flußbettes, und

M die Wassermenge bezeichnet, so ist



$\frac{M}{(h+k)B}$ die mittlere Geschwindigkeit des Wassers vor dem Überfalle, zu deren Hervorbringung eine Höhe

$$\left(\frac{M}{2\sqrt{g}.B(h+k)}\right)^2$$

erfordert wird.

Bei Überfällen wo man den obern Wasserspiegel als stillstehend annehmen kann, wäre der erforderliche Wasserstand (107. §.)

$$= \left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}}$$

weil aber das Wassers oberhalb des Überfalls schon eine Geschwindigkeit besitzt, welcher die Höhe $\left(\frac{M}{2\sqrt{g}.(h+k)B}\right)^2$ zugehört, so wird dadurch im vorliegenden Falle, ein Theil des erforderlichen Wasserstandes entbehrlich, und man erhält den Wasserstand bei einem vollkommenen Überfalle

$$h = \left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{M}{2\sqrt{g}(h+k)B}\right)^2$$

oder wenn man für Überfälle ohne Flügelwände $\alpha = 5$ setzt, so ist

$$h = \left(\frac{3M}{10.b}\right)^{\frac{2}{3}} - 0{,}016\left(\frac{M}{(h+k)B}\right)^2$$

Für Überfälle mit Flügelwänden, oder wenn $B = b$ ist, erhält man $\alpha = 6{,}76$ (100. §.) also

$$h = \left(\frac{2M}{9.b}\right)^{\frac{2}{3}} - 0{,}016\left(\frac{M}{(h+k)B}\right)^2$$

ur Bestimmung von h ist zwar diese Größe
lbst noch im zweiten Gliede vorhanden, weil aber
r Werth dieses Gliedes nur klein ist, so wird
an mit Hülfe einer Näherungsmethode den wah-
n Werth von h so genau bestimmen können, als
erfordert wird, ohne deshalb die Gleichung noch
rwickelter zu machen.

Beispiel. In einem 100 Fuß breiten und 4 Fuß tiefen Flusse, welcher in jeder Sekunde 1400 Kubikfuß Wasser abführt, soll ein vollkommener Ueberfall 5 Fuß hoch und 80 Fuß breit erbaut werden; man fragt, wie viel wird die Höhe des Oberwassers über dem Ueberfalle betragen, wenn der Ueberfall mit keinen Flügelwänden versehen ist?

Es ist b = 80; B = 100; k = 5 Fuß, und M = 1400 Kubikfuß, daher die Höhe

$$h = \left(\frac{3 \cdot 1400}{10 \cdot 80}\right)^{\frac{2}{3}} - 0{,}016 \left(\frac{1400}{100 \cdot (5+h)}\right)^2$$

Nun ist $\left(\frac{3 \cdot 1400}{10 \cdot 80}\right)^{\frac{2}{3}} = 3{,}021$

Setzt man daher etwa h = 3, so findet man das letzte Glied der Gleichung

$$0{,}016 \left[\frac{1400}{100\ (5+3)}\right]^2 = 0{,}049$$

folglich die gesuchte Höhe des Oberwassers über dem Ueberfalle

$$h = 3{,}021 - 0{,}049 = 2{,}972 \text{ Fuß}$$

wofür man ohne Nachtheil

$$h = 3 \text{ Fuß annehmen kann.}$$

Hienach ist die ursprüngliche Oberfläche des Flusses, oberhalb des Ueberfalles, um

$$5 - 4 + 3 = 4 \text{ Fuß erhöhet.}$$

137. §.

Um die Breite des Überfalls zu entwickeln, ist

$$h = \left(\frac{3M}{10 . b}\right)^{\frac{2}{3}} - 0{,}016 \left(\frac{M}{B(h+k)}\right)^2 \text{ oder}$$

$$h + 0{,}016 \left(\frac{M}{B(h+k)}\right)^2 = \left(\frac{3M}{10 . b}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ oder}$$

$$\left[h + 0{,}016 \left(\frac{M}{B(h+k)}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{3M}{10 . b} \text{ folglich}$$

die Breite des Überfalls

$$b = \frac{3M}{10 . \left[h + 0{,}016 \left(\frac{M}{B(h+k)}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Beispiel. In einem Flusse, dessen mittlere Breite [illegible] Fuß, und dessen Wassermenge in jeder Seku[nde] 1672 Kubikfuß beträgt, soll ein 5 Fuß ho[her] vollkommener Ueberfall ohne Flügelwände an[ge]legt werden. Wie breit muß die Oefnung [des] Ueberfalls seyn, damit die Wasserhöhe über de[m]selben 4 Fuß betrage?

Hier ist $M = 1672$, $h = 4$, $k = 5$ [und] $B = 100$, daher die Breite des Ueberfalls

$$b = \frac{3 . 1672}{10 . \left[4 + 0{,}016 \left(\frac{1672}{100 . 9}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 61{,}43$$

138. §.

Die Wassermenge M zu bestimmen muß [ein] ähnliches Verfahren wie 136. §. beobachtet [wer]den. Man setze

$$0{,}016 \left(\frac{M}{B(h+k)}\right)^2 = N \text{ so ist}$$

$$\left(\frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}} - N = h \text{ oder}$$

$$\left(\frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}} = h + N \text{ daher}$$

$$\frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b} = (h + N)^{\frac{3}{2}}$$ und hieraus

e Wassermenge

$$M = \frac{2}{3}\alpha b\ (h + N)^{\frac{3}{2}}$$

ür einen Überfall ohne Flügelwände ist

$$M = \frac{10}{3} b\ (h + N)^{\frac{3}{2}}$$

d mit Flügelwänden

$$M = \frac{9}{2} b\ (h + N)^{\frac{3}{2}}$$

Bei der Bestimmung des Werths von M kann an zuerst N = 0 setzen, daraus sehr nahe M iden, und wenn dieser Werth in N gesetzt wird, ergiebt sich alsdann die Wassermenge mit hin- nglicher Genauigkeit.

Beispiel. Wie viel Wasser wird über einen vollkommenen Ueberfall ohne Flügelwände in jeder Sekunde fließen, von welchem bekannt ist, daß seine Breite 62, seine Höhe 5 Fuß, die Höhe des Oberwassers über dem Ueberfalle 4, und die ganze Breite des Flusses vor dem Ueberfalle 100 Fuß beträgt?

Weil $h = 4$, $b = 62$, $B = 100$, und $k = 5$ Fuß ist, so erhält man, wenn $N = 0$ gesetzt wird

$$\frac{10}{3} b \sqrt{h^3} = \frac{10}{3} . 62 . \sqrt{64} = 1653{,}3.$$

Mittelst dieses ungefähren Werths für M kann man N berechnen und erhält

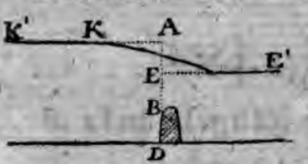
$$N = 0{,}016 \left(\frac{1653{,}3}{100 . (4 + 5)}\right)^2 = 0{,}054$$

daher ist die gesuchte Wassermenge

$$M = \frac{10}{3} . 62\ (4{,}054)^{\frac{3}{2}} = 1686{,}9$$ Kubikfuß.

139. §.

Bei unvollkommenen Überfällen, wo



Spiegel des Unterwa
EE' höher als die Ü
laßschwelle oder der S
tel B des Wehrs BD li
läßt sich der Abfluß
Wassers so ansehen,
wenn dasselbe von der Höhe AE, wie bei ei
vollkommenen Überfall abflösse; durch den übri
Theil EB aber, wo das Unterwasser gegen st
kann sich die Geschwindigkeit nicht mehr verm
ren, daher wird solches durch EB mit derjeni
Geschwindigkeit ausfließen, welche der Höhe
zugehört.

Den lothrechten Abstand des ungesenkten O
wasserspiegels vom Spiegel des Unterwassers
AE nennt man die Stauhöhe, welches eig
lich diejenige Höhe ist, auf welche sich der O
wasserspiegel durch den Einbau des Wehrs
erhoben hat.

Nimmt man zur Erleichterung der Rechn
den Spiegel des Oberwassers K'K als stillsteh
oder horizontal an, und setzt, daß

$h = ED$ die Tiefe des Flusses unter des Wehrs,

$H = AE$ die Stauhöhe,

$k = BD$ die Höhe des Wehres,

b die Breite desselben,

B die Breite des Flusses, und

M die Wassermenge bezeichne,

so ist die durch AE fließende Wassermenge, wi
einem vollkommenen Überfall 103. §.

$$\tfrac{2}{3}\,\alpha\, bH \sqrt{H}.$$

Nun ist ferner $EB = h - k$ und die in E
la

ngte Geschwindigkeit $= \alpha \sqrt{H}$, daher die mit
eser Geschwindigkeit abfließende Wassermenge
rch BE

$$\alpha\, b\, (h-k) \sqrt{H}$$

eide Wassermengen zusammengenommen, geben
n ganzen Abfluß über das Wehr, daher

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha\, b H \sqrt{H} + \alpha\, b (h-k) \sqrt{H} \text{ oder}$$
$$= \alpha (\tfrac{2}{3} H + h - k)\, b \sqrt{H}.$$

In der Voraussetzung, daß das Wasser ober-
lb des Wehrs als stillstehend angesehen wird,
d der Überfall mit keinen Flügelwänden
rsehen ist, erhält man die Wassermenge

$$M = 5\, (\tfrac{2}{3} H + h - k)\, b \sqrt{H}$$

d wenn das Wehr Flügelwände hat

$$M = 6{,}76\, (\tfrac{2}{3} H + h - k)\, b \sqrt{H}.$$

Beispiel. An dem Ausflusse eines Sees befindet sich ein 2 Fuß hoher und 10 Fuß breiter unvollkommener Ueberfall ohne Flügelwände. Die Tiefe des Wassers unterhalb des Wehrs ist 3 Fuß, und die Höhe des Aufstaues 4 Fuß; man fragt, wie viel Wasser wird in jeder Sekunde abfließen?

$h = 3$, $k = 2$, $H = 4$ und $b = 10$, daher die gesuchte Wassermenge

$$M = 5\, (\tfrac{2}{3} \cdot 4 + 3 - 2)\, 10 \sqrt{4} = 366{,}6 \text{ K. F.}$$

140. §.

Wenn sich der unvollkommene Überfall in ei-
n Flusse befindet, wo das Wasser schon mit ei-
r gewissen Geschwindigkeit vor demselben anlangt,
d nicht als stillstehend angesehen werden
nn, so erhält man nach 138. §. die durch AE
eßende Wassermenge =

$$\tfrac{2}{3}\alpha\, b\, (H + N)^{\frac{3}{2}}$$

die Geschwindigkeit in E ist alsdann $= \alpha \sqrt{(H-}$
daher die durch EB fließende Wassermenge =

$$\alpha b (h-k) \sqrt{(H+N)}$$

Diese beiden Abflüsse zusammengenommen gebe
gesammte Wassermenge

$$M = \tfrac{2}{3} \alpha b (H+N) \sqrt{(H+N)} + \alpha b (h-k) \sqrt{(H-}$$
$$= \alpha b \left[\tfrac{2}{3} (H+N) + h-k\right] \sqrt{(H+}$$

wo $N = 0{,}016 \left(\frac{M}{B(H+h)}\right)^2$ ist.

Die Anwendung dieser Formel in beson
Fällen, verursacht eine etwas weitläuftige R
nung, wie man sich aus meinen Zusätzen zu B
Hydraulik, S. 291, überzeugen kann.

141. §.

Die ursprüngliche Oberfläche AED eines Fl
dessen S
BC mit
Wasser
gel par
ist, sei d
den Ein
eines W
bis zur größten Höhe K angeschwellt oder au
stauet, so ist KE die Stauhöhe (*Hauteur*
remou). Die durch den Einbau G verursa
Anschwellung erstrecke sich bis A, woselbst der F
noch seine ursprüngliche Tiefe hat, so nennt
AK die Stauweite (*Amplitude du remo*

H Man setze die Stauhöhe KE = H und
zu der Oberfläche des Aufstaues LK in K
Tangente KH bis an den ursprünglichen W
serspiegel des Flusses; ferner sei auf irgend
Länge λ

α das ursprüngliche Gefälle des Fluss

α′ das Gefälle im höchsten Punkte bei

eht man nun HM horizontal, so verhält sich

$$\alpha : \lambda = ME : HM \text{ und}$$

$$\lambda : \alpha' = HM : MK \text{ daher}$$

$$\alpha : \alpha' = ME : MK \text{ oder}$$

$$\alpha - \alpha' : \alpha' = ME - MK : MK$$

Nun ist $ME - MK = KE = H$ daher

$$MK = \frac{H \cdot \alpha'}{\alpha - \alpha'}$$

Aus der vorstehenden Proportion erhält man ferner

$$HM = \frac{\lambda}{\alpha'} MK \text{ oder}$$

$$HM = \frac{\lambda}{\alpha'} \frac{H \cdot \alpha'}{\alpha - \alpha'} = \frac{\lambda \cdot H}{\alpha - \alpha'}$$

Setzt man nun nach Buat (Hydr. 154. §.) die Stauweite $AK = \frac{19}{10} HM$ so wird, wenn A die Stauweite $= AK$ bezeichnet A

$$A = \frac{19}{10} \frac{H\lambda}{\alpha - \alpha'}$$

Nach 128. §. IV ist, wenn die Breite des Flusses $= b$ und die ursprüngliche Tiefe $= h$ gesetzt wird

$$\alpha = \frac{c^2 (b + 2h) \lambda}{8262{,}8 \; bh}$$

oder wenn man die Wassermenge M setzt, so ist

$$\frac{M}{bh} = c \text{ oder } \frac{M^2}{b^2 h^2} = c^2 \text{ daher}$$

$$\alpha = \frac{M^2 (b + 2h) \lambda}{8262{,}8 \; b^3 h^3}$$

und auf eine ähnliche Art

$$\alpha' = \frac{M^2 [b + 2 (H + h)] \lambda}{8262{,}8 \; b^3 (H + h)^3}$$

Werden die hier gefundenen Ausdrücke für

in die Gleichung von A gesetzt und gehörig gekürzt, so erhält man die Stauweite

$$A = \frac{15700\ H b^3}{M^2 \left(\frac{b+2h}{h^3} - \frac{b+2(H+h)}{(H+h)^3}\right)}$$

$$= \frac{15700\ H b^3 h^3 (H+h)^3}{M^2 [(b+2h)(H+h)^3 - (b+2(H+h))h}$$

Beispiel. Durch einen Einbau ist die Oberfläche ei Baches 2 Fuß hoch aufgestauet worden; wie w erstreckt sich dieser Aufstau, wenn bekannt ist, d die Wassermenge des Baches in jeder Seku 40 Kubikfuß, seine Breite 4 Fuß, und seine m lere Tiefe 3 Fuß beträgt?

$H = 2$, $h = 3$, $b = 4$ und $M = 40$ her die gesuchte Stauweite

$$A = \frac{15700 \cdot 2 \cdot 64 \cdot 27 \cdot 125}{1600\ [10 \cdot 125 - 14 \cdot 27]} = 4861 \text{ Fuß}$$

$= 405$ Ruthen 1 Fuß.

142. §.

Nach den Überfällen wodurch das Grundbe eines Flusses erhöht wird, können noch durch E baue von Brücken, Buhnen ꝛc., welche die Br des Flußbettes allein verengen, Anschwellungen wirkt werden.

Setzt man die Breite des Flusses vor An
B gung des Einbaues $= B$, die Breite in welc
b das Wasser nach dem Einbaue abfließt $= b$,
mittlere Geschwindigkeit des Wassers bei der Br
c $B = c$, so ist die zwischen dem Einbaue erford liche Geschwindigkeit $= \frac{cB}{b}$, zu deren Hervorbr gung eine Höhe

$$\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{cB}{b}\right)^2$$

nöthig wäre. Weil aber das Wasser schon

ieschwindigkeit c besitzt, wozu die Fallhöhe $\frac{c^2}{4g}$ gehört, darf sich die Oberfläche des Wassers nur noch n die Größe

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{cB}{b}\right)^2 - \frac{c^2}{4g}$$

heben, damit die Geschwindigkeit $\frac{cB}{b}$ zwischen dem inbau erzeuget wird.

Setzt man den bewirkten Aufstau oder die tauhöhe $= H$, so ist allgemein

$$H = \frac{c^2}{\alpha^2}\left(\frac{B^2}{b^2} - \frac{\alpha^2}{4g}\right)$$

Für Brückenpfeiler mit spitzen Vordertheilen, er bei schrägen Einbauen, erhält man (100. §.) $= 7{,}54$ daher

$$H = 0{,}0176\ c^2\left(\frac{B^2}{b^2} - 0{,}91\right)$$

d bei Brückenpfeilern mit graden Vordertheilen, er bei steilen Einbauen ist $\alpha = 6{,}76$ daher

$$H = 0{,}0219\ c^2\left(\frac{B^2}{b^2} - 0{,}731\right)$$

1. Beispiel. Ein Fluß, dessen uneingeschränkte Breite 300 Fuß beträgt, ist durch den Einbau einer Brücke mit zugespitzten Vordertheilen so beschränkt worden, daß nur noch zwischen den Brückenpfeilern eine Weite von 200 Fuß zum Durchfließen des Wassers übrig bleibt. Wie viel wird sich wegen dieser Brücke der Wasserspiegel erheben, wenn bekannt ist, daß die mittlere Geschwindigkeit des Flusses vor Anlegung der Brücke 4 Fuß betragen hat.

$B = 300$, $b = 200$, $c = 4$ und $\alpha = 7{,}54$ daher die gesuchte Stauhöhe

$$H = 0{,}0176 \cdot 4^2\left(\frac{300^2}{200^2} - 0{,}91\right) = 0{,}375 \text{ Fuß}$$
$$= 4\tfrac{1}{2} \text{ Zoll.}$$

2. Beispiel. Durch eine angelegte Buhne, welche nahe senkrecht auf die Richtung des Stroms li ist ein 500 Fuß breiter Fluß, dessen mittlere schwindigkeit 3 Fuß beträgt, auf 350 Fuß ein schränkt worden. Wie viel Aufstau wird oberh der Buhne wegen dieser Verengung entstehen?

$B = 500, \quad b = 350, \quad c = 3, \quad \alpha = 6$ daher die gesuchte Stauhöhe

$$H = 0{,}0219 \cdot 3^2 \left(\frac{500^2}{350^2} - 0{,}731\right) = 0{,}257$$
$$= 3{,}08$$

143. §.

Um die nöthige Verengung eines Flusses Bewirkung eines bestimmten Aufstaues anzugeb kömmt es darauf an, die Breite b zu entwick Nun ist

$$H = \frac{c^2}{\alpha^2} \left(\frac{B^2}{b^2} - \frac{\alpha^2}{4g}\right) \text{ oder}$$

$$\frac{\alpha^2 H}{c^2} = \frac{B^2}{b^2} - \frac{\alpha^2}{4g} \text{ oder}$$

$$\frac{\alpha^2 H}{c^2} + \frac{\alpha^2}{4g} = \frac{B^2}{b^2} \text{ daher}$$

$$b^2 = \frac{B^2}{\frac{\alpha^2 H}{c^2} + \frac{\alpha^2}{4g}} \text{ folglich}$$

die Breite zwischen dem Einbaue

$$b = \frac{B}{\alpha \sqrt{\left(\frac{H}{c^2} + \frac{1}{4g}\right)}}$$

Für $\alpha = 7{,}54$ wird

$$b = \frac{0{,}1326 \cdot B}{\sqrt{\left(\frac{H}{c^2} + 0{,}016\right)}}$$

und für $\alpha = 6{,}76$

$$b = \frac{0{,}148\ B}{\sqrt{\left(\frac{H}{c^2} + 0{,}016\right)}}$$

Beispiel. *Um wie viel wird man einen 400 Fuß breiten Fluß einschränken müssen, damit seine Tiefe oberhalb der Verengung einen halben Fuß größer wird, wenn bekannt ist, daß derselbe eine mittlere Geschwindigkeit von 4 Fuß hat.*

$B = 400$, $H = \frac{1}{2}$, $c = 4$, $\alpha = 6{,}76$, daher die zum Durchfließen des Wassers noch übrige Breite

$$b = \frac{0{,}148 \cdot 400}{\sqrt{(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + 0{,}016)}} = 272{,}8 \text{ Fuß}$$

Es wird daher erfordert, daß der Einbau auf eine Länge von

$$400 - 272{,}8 = 127{,}2 \text{ Fuß}$$

in den Fluß hinein gebauet werde.

Anmerk. Man sieht hieraus, daß durch eine beträchtliche Verengung des Stroms nur eine geringe Erhöhung seiner Oberfläche bewirkt wird, welches auch den Erfahrungen gemäß ist. Wenn aber der Endzweck nicht Erhöhung der Oberfläche, sondern Verschaffung mehrerer Tiefe für die Schifffahrt ist, so wird dieser schon mit einem weit kürzern Einbaue dadurch erreicht, daß alsdenn der Strom an der seichten Stelle eine beträchtlich größere Geschwindigkeit erhält, und durch Ausspülung des Grundbettes, eine größere Tiefe bewirkt wird.

Neuntes Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers [illegible] Röhrenleitungen.

144. §.

Sehr lange Zeit nahm man an, daß eine [illegible]renleitung (*Tuyau de conduite*) gleiche W[illegible]menge gebe, die Röhre mogte lang oder kurz [illegible] wenn nur Druckhöhe und Röhrenweite ungeä[illegible] blieben. Herr du Buat hatte das große Verd[illegible] zuerst einen allgemeinen Ausdruck mitgethei[illegible] haben, welcher mit den bekannten Erfahrunge[illegible] übereinstimmt, und der blos den Fehler hat, [illegible] er wegen seiner verwickelten Form, nur mit [illegible] Weitläuftigkeit Anwendung findet. Um die[illegible] vermeiden, und doch den Erfahrungen so na[illegible]kommen, als es für die Ausübung nöthig is[illegible] man weder das Wasser durch Barometerr[illegible] fließen läßt, noch eine so ängstliche Genau[illegible] mit Rücksicht auf die kleinsten Umstände verl[illegible] welche man in Fällen, die weit mehr Einfluß [illegible] die Bewegung des Wassers haben, dennoch [illegible] erreichen kann; unter diesen Umständen wird [illegible] diejenige Theorie über die Bewegung des W[illegible] in Röhrenleitungen vorgetragen werden, wel[illegible] meinen Zusätzen zu Buat's Hydraulik, S. 86[illegible] enthalten ist, und die, wie sich aus den da[illegible] angeführten Vergleichungen mit der Erfahrun[illegible] giebt, für die Ausübung hinlänglich genau [illegible] den Versuchen übereinstimmt.

Wenn wie bisher unter **Druckhöhe**, [illegible] lothrechte Abstand des Wasserspiegels im Behä[illegible]

Mittelpunkte der Ausflußöfnung der Röhren-
ung verstanden wird, so kann man sich vorstel-
daß von der ganzen Druckhöhe ein Theil zur
eugung der Geschwindigkeit des Wassers in der
)renleitung verwandt wird, der übrigbleibende
il aber, als Druck zur Überwältigung der
dernisse der Bewegung oder des Widerstandes
er Röhrenleitung aufgeht. Erstere nenne ich
schwindigkeitshöhe, letztere Wider-
ndshöhe.

Wenn daher für eine Röhrenleitung, h die Druckhöhe und h′ die Widerstandshöhe ist, so er- man die Geschwindigkeitshöhe $= h - h'$. Ist c die mittlere Geschwindigkeit mit welcher sich Wasser in der Röhrenleitung bewegt, so ist deren Hervorbringung eine Höhe $\frac{c^2}{\alpha^2}$ erforder- wo man wegen der Zusammenziehung bei dem tritte in die Röhre, $\alpha = 6{,}42$ (100. §.) setzen . Nun ist

h
h′
c

$$\frac{c^2}{\alpha^2} = h - h'$$

er findet man aus der bekannten Druckhöhe Geschwindigkeit c, die Widerstandshöhe

$$h' = h - \frac{c^2}{\alpha^2}$$

145. §.

Wenn man sich einen Behälter mit einer daran indlichen graden Röhre vorstellt, so muß in die- Röhre der Widerstand welcher von der Adhä- n des Wassers und der Röhrenwände, von der prallung der Wassertheile von diesen Wänden, d von andern Hindernissen herrührt, desto grö- r seyn, je läng… ter übrigens gleichen Um- nden die Rö… einer doppelt so ngen Röhr… dernisse zu über-

wältigen sind, und dazu ein doppelt so gro
Druck oder eine doppelt so große Widerstandsh
erfordert wird; man kann daher schließen, daß
die Widerstandshöhen wie die Längen
Röhren verhalten.

Dasselbe gilt von den *Durchmessern v*
schiedener Röhren, wenn alles übrige gl
gesetzt wird; ist der eine Durchmesser doppelt
groß als der andere, so muß auch die Widerstan
höhe eben so wachsen, weil in demselben Verh
nisse mehr Hindernisse entstehen.

Die Widerstandshöhe muß aber auch noch
den verschiedenen Geschwindigkeiten abhängen,
welcher das Wasser durch einerlei Röhre fli
Denn bei einer doppelt so großen Geschwindigk
müssen sich noch einmal so viel Wassertheile, je
in halb so viel Zeit als bei der einfachen Geschw
digkeit losreißen; daher werden sich unter übrig
gleichen Umständen die *Widerstandshöhen w*
die Quadrate der Geschwindigkeiten v
halten.

Endlich wird die Widerstandshöhe desto klei
seyn können, je größer die Fläche der drücken
Wassersäule oder der Querschnitt der Röhre
weil alsdenn jedes einzelne Wassertheilchen weni
Widerstand in seiner Bewegung leidet; nun v
halten sich die Querschnitte der Röhren, wie
Quadrate ihrer Durchmesser, daher müssen sich
verschiedenen Röhrenweiten, die *Widerstan*
höhen umgekehrt wie die Quadrate
Durchmesser der Röhren verhalten.

Man setze, es wären bei zwei verschiede
Röhrenleitungen

H, h die Druckhöhen,

H', h' die Widerstandshöhen,

L, l die Längen der Röhren,

D, d die Durchmesser derselben, und

C, c die mittleren Geschwindigkeiten mit welchen das Wasser aus den Röhren läuft,

verhält sich nach dem Vorhergehenden, wenn n die einzelnen Verhältnisse zusammen setzt (auf ähnliche Art wie 127. §.)

$$H' : h' = \frac{LDC^2}{D^2} : \frac{ldc^2}{d^2} \text{ also}$$

$$\frac{H'ldc^2}{d^2} = \frac{h'LDC^2}{D^2} \text{ oder}$$

$$c^2 = \frac{LC^2}{DH'} \cdot \frac{dh'}{l} \text{ folglich}$$

$$c = C\sqrt{\left[\frac{L}{DH'}\right]} \cdot \sqrt{\left[\frac{dh'}{l}\right]}$$

Wenn nun die vorhin gemachten Schlüsse mit Natur übereinstimmen, so müssen auch bei verdenen Röhrenleitungen die Zahlen welche dem erthe $C\sqrt{\left[\frac{L}{DH'}\right]}$ entsprechen, aus allen richtig gestellten Versuchen einander gleich seyn, oder igstens nicht sehr von einander abweichen. Benet man nun diese Werthe nach 51 sehr verdenen Versuchen, die Herr du Buat (55. §.) ührt, bei welchen Röhren von einem bis 18 ll Weite, und von 10 bis 700 Fuß Länge voramen, so findet man nach meiner in den Anrkungen (S. 88. a. a. O.) geführten Rechnung, m sich alle Größen auf pariser Zollmaaß beyen

$$C\sqrt{\left[\frac{L}{DH'}\right]} = 152{,}47$$

r wenn dieser Ausdruck auf rheinländisches Fußaß gebracht wird

$$C\sqrt{\left[\frac{L}{DH'}\right]} = 44{,}79.$$

Die Vergleichung dieses Werths mit den V[...] suchen zeigt, daß derselbe am besten für Geschwi[...] digkeiten von 6 bis 24 Zoll mit der Erfahru[...] übereinstimmt.

Setzt man die gefundene Zahl in die für gefundene Gleichung, so wird

$$c = 44{,}79 \sqrt{\left[\frac{dh'}{l}\right]}$$ und weil (144. §.)

$$h' = h - \frac{c^2}{\alpha^2},$$ so erhält man

$$c = 44{,}79 \sqrt{\left[\frac{d\left(h - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)}{l}\right]}$$ oder

$$c^2 l = 44{,}79^2\, d \left(h - \frac{c^2}{\alpha^2} \right)$$ also

$$\frac{c^2 l}{44{,}79^2\, d} + \frac{c^2}{\alpha^2} = h$$ oder

$$c^2 = \frac{h}{\frac{l}{44{,}79^2\, d} + \frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\alpha^2 h}{\frac{\alpha^2}{44{,}79^2}\,\frac{l}{d} + 1}$$

Nun ist $\alpha = 6{,}42$ und $\alpha^2 = 41{,}22$ al[...] $\frac{\alpha^2}{44{,}79^2} = 0{,}0205$ wofür man $0{,}02 = \frac{1}{50}$ anne[...] men kann; es ist daher die mittlere Geschwi[...] digkeit womit das Wasser aus einer Röhrenle[...] tung fließt, wenn sich alle Größen auf rheinlä[...] disches Fußmaaß beziehen

$$c = \sqrt{\left[\frac{41{,}22\, h}{0{,}02\,\frac{l}{d} + 1}\right]}$$

$$c = 6{,}42 \sqrt{\left[\frac{50\, dh}{l + 50\, d}\right]}$$

1. Anmerk. In Fällen wo eine größere Genauigk[...] erfordert wird, kann man sich des Ausdrucks

$$c = \sqrt[35]{\left[\frac{47{,}24\, h}{0{,}02\,\frac{l}{d} + 1}\right]^{18}}$$

bedienen, welcher den Erfahrungen näher kömmt, (Buat Hydr. S. 90.) und sich leicht mit Hülfe der Logarithmen auflösen läßt; am genauesten mit allen bis jetzt bekannt gewordenen Erfahrungen, stimmt die sehr weitläuftige Formel des Herrn du Buat, wo sich alle Größen auf pariser Zolle beziehen, und

$$= \frac{297\,[\frac{1}{2}\sqrt{d} - 0{,}1]}{\sqrt{\left[\frac{l}{h - \frac{c^2}{478}}\right]} - \text{L. nat.} \sqrt{\left[\frac{l}{h - \frac{c^2}{478}} + 1{,}6\right]}} - 0{,}3\,[\tfrac{1}{2}\sqrt{d} - 0{,}1]$$

ist, der Werth von c aber nicht anders als durch Näherung bestimmt werden kann.

Anmerk. Ueber die Abnahme der Geschwindigkeit des Wassers, wenn kurze Röhren bei unveränderter Druckhöhe nach und nach verlängert werden, findet man 98. §. II. Tafel die Resultate aus meinen Versuchen.

146. §.

Wenn in einem besonderen Falle die mittlere [illegible]eschwindigkeit bekannt ist, so erhält man daraus [illegible] Wassermenge

$$M = \tfrac{1}{4}\pi d^2 c$$

$$= 5{,}04\, d^2 \sqrt{\left[\frac{50\,d\,h}{l + 50\,d}\right]}$$

[illegible]a $\frac{1}{4}\pi \,.\, 6{,}42 = 5{,}04$ ist.

[illegible]eispiel. Bei einer graden Röhrenleitung beträgt die Druckhöhe 5 Fuß, die Länge der Röhre 48 Fuß, und ihr Durchmesser 2 Zoll; wie viel Wasser wird bei unveränderter Druckhöhe in jeder Sekunde ausfließen?

$h = 5$, $l = 48$, $d =$ [illegible] [illegible]uß, daher die Wassermenge

$M = 5{,}04 \,.\, \frac{1}{36} \sqrt{\left[\frac{50}{4}\right.}$ [illegible] Kubikfuß

$=$ 207,36 Kubik[illegible]

147. §.

Aus der gefundenen Gleichung

$$c = \sqrt{\left[\frac{41,22\,h}{0,02\,\frac{l}{d} + 1}\right]} \text{ erhält man}$$

$$\frac{41,22\,h\,d}{0,02\,l + d} = c^2 \text{ und hieraus}$$

die Druckhöhe

$$h = \frac{(0,02\,l + d)\,c^2}{41,22\,d}$$

Nun ist ferner

$$(0,02\,l + d)\,c^2 = 41,22\,h\,d$$

$$0,02\,l = \frac{41,22\,h\,d}{c^2} - d \text{ folglich}$$

die Länge der Röhrenleitung

$$l = \left[\frac{41,22\,h}{c^2} - 1\right] 50 \,.\, d$$

Sollte in den vorstehenden Ausdrücken zur Bestimmung der Werthe von h und l die Geschwindigkeit c nicht gegeben seyn, so kann solche allemal mittelst M und d gefunden werden.

148. §.

Wenn es darauf ankömmt, den Durchmesser d aus der Wassermenge M, Druckhöhe h und Länge l zu finden, so hat man nach 146. §.

$$5,04\,d^2 \sqrt{\left[\frac{50\,dh}{l + 50\,d}\right]} = M \text{ oder}$$

$$25,4\,d^4 \,.\, \frac{50\,dh}{l + 50\,d} = M^2 \text{ daher}$$

$$d^5 = \frac{M^2}{25,4 \,.\, 50\,h}\,(l + 50\,d) \text{ folglich}$$

$$d^5 - \left[\frac{M^2}{25,4 \,.\, h}\right] d - \left[\frac{M^2}{25,4 \,.\, h}\right] \frac{l}{50} = 0$$

woraus d mittelst der von mir bei andern Gelegenheiten angewandten, für die Ausübung sehr bequemen Regel zur Auflösung höherer Gleichungen, durch Annäherung gefunden werden kann.

Beispiel. Wie groß wird man den Durchmesser einer graden 100 Fuß langen Röhrenleitung bei einer Druckhöhe von 5 Fuß annehmen müssen, damit solche in jeder Sekunde einen halben Kubikfuß Wasser liefert?

$$M = \tfrac{1}{2},\ h = 5 \text{ und } l = 100 \text{ also}$$

$$\frac{M^2}{25{,}4\,h} = \frac{1}{4 \cdot 25{,}4 \cdot 5} = 0{,}001968 \text{ und}$$

$$\left[\frac{M^2}{25{,}4\,h}\right] \frac{l}{50} = \frac{0{,}001968 \cdot 100}{50} = 0{,}003936 \text{ daher}$$

$$d^5 - 0{,}001968\,d - 0{,}003936 = 0.$$

Für $d = 0{,}34$ findet man einen Rest $= -0{,}000062$

für $d = 0{,}35$ findet man diesen Rest $= +0{,}000628$

wonach man aus den Resten schließen kann, daß d zwischen 0,34 und 0,35 liegen muß, und zwar näher bei 0,34 als bei 0,35, weshalb man nach Verhältniß der Reste 0,341 annehmen und wenn es erfordert wird, die Rechnung noch genauer ausführen könnte. Es ist demnach der gesuchte Durchmesser der Röhre

$$d = 0{,}341 \text{ Fuß} = 4{,}09 \text{ Zoll.}$$

149. §.

Behält eine Röhre ihre unveränderte Weite, so entstehet, wenn Krümmungen (Curvaturae, *Coudes*) in derselben vorkommen, dadurch ein Aufenthalt in der Bewegung des Wassers, und es wird ein Theil der Druckhöhe zur Überwältigung des Widerstandes, der von den Krümmungen herrührt, verwandt werden.

Wenn eine sonst grade Röhre so gebogen daß die ver gerten Axen und BC in zusammen sen, so sagt

D C E A B

die Krümmung bei C ist von einer Anprall (Illisio, *Bricole*). Zieht man alsdenn im Pu C die Tangente DE, so ist DCA = BCE Anprallungs- oder Bricolenwinkel, A aber der Krümmungswinkel. Finden in Krümmung mehrere dergleichen Anprallungen S so sieht man was unter einer Krümmung von z drei und mehreren Anprallungen verstanden wi

Unter übrigens gleichen Umständen verhält nach den Versuchen des Herrn du Buat (H 1. B. 104 §. u. f.) der Widerstand welcher von Krümmungen einer Röhrenleitung herrührt, das Quadrat der Geschwindigkeit des Was multiplizirt mit der Summe der Quadrate den Sinussen aller Anprallungswinkel; voraus setzt, daß diese Winkel ein gewisses Maaß etwa 36 bis 40 Grad nicht überschreiten und k scharfe Ecken in der Röhre sind. Ist nun

- c die mittlere Geschwindigkeit des Was in der Röhre,
- S die Summe von den Quadraten der nusse sämmtlicher Anprallungswin

so findet man den Versuchen gemäß (Buat H 107. §.) daß die Widerstandshöhe um einen wissen Theil

$$k = 0{,}00387\ c^2\ S^2$$

vermehrt werden muß, wenn sich alle Größen rheinländisches Fußmaaß beziehen.

Wäre z. B. eine Röhre so gekrümmt, daß in selben 5 Anprallungen Statt fänden, von wel

bei dreien, der Anprallungswinkel 24 und bei den zwei übrigen 32 Grad beträgt, so ist bei 5 Fuß Geschwindigkeit

$$S = 3\,(\text{Sin}\,24^\circ)^2 + 2\,(\text{Sin}\,32^\circ)^2$$
$$= 0{,}49629 \quad + 0{,}56162$$
$$= 1{,}05791$$

und derjenige Theil der Druckhöhe, welcher auf die Uebermältigung des Widerstandes in den Krümmungen verwandt wird

$$k = 0{,}00387 \,.\, 25 \,.\, 1{,}05791 = 0{,}10235 \text{ Fuß.}$$

150. §.

Noch weit nachtheiliger ist es, wenn anstatt r Krümmungen, die Röhren scharfe Ecken ha- n; denn schon bei der Bewegung fester Körper, elche wenn sonst keine Hindernisse vorhanden sind, re Bewegung in krummen Linien ohne Verlust r Geschwindigkeit fortsetzen (8. §.), entstehet ein trächtlicher Verlust an der Geschwindigkeit, wenn e Körper plötzlich ihre Richtung ändern (7. §.), aher dieses um so mehr bei dem Wasser Statt nden wird, weshalb man bei Röhrenleitungen uf alle Weise verhindern muß, daß keine scharfe Biegungen der Röhren vorkommen. Auch ist s zuträglich die Röhren da, wo sie gebogen sind, twas weiter zu machen.

Anmerk. Um zu übersehen wie groß der Verlust des Wassers oder die Verminderung der Geschwindigkeit der Röhren mit scharfen Biegungen ist, können die Versuche des Herrn Venturi (Recherch. etc. Prop. VII. Exp. 25) dienen. Von drei Röhren deren jede 15 Zoll Länge und 14,5 Linien im Durchmesser hatte, war die erste ganz grade, die zweite in der Form eines Quadranten gebogen, und die dritte hatte in der Mitte eine scharfe Biegung unter einem rechten Winkel. Die Röhren wurden so an den Behälter gebracht, daß

ihre Axen oder centrische Linien in einerlei Horizontalebene lagen, und man fand bei gleicher Druckhöhe, die Wassermenge in jeder Sekunde, bei

der graden Röhre 153,6 K.

nach einem Viertelzirkel gebogenen Röhre 138,2 "

nach einem rechten Winkel gebogenen Röhre 98,7 "

also wurde die Wassermenge bei der um einen rechten Winkel gebogenen Röhre, gegen die grade Röhre um $\frac{5}{14}$ vermindert.

151. §.

Um in dem allgemeinen Ausdrucke für die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in Röhrenleitungen, auch auf den Widerstand in den Krümmungen Rücksicht zu nehmen, so muß 145. §. die Widerstandshöhe h' noch um k vermehret werden, alsdenn ist

$$h' + k = h - \frac{c^2}{\alpha^2} \text{ oder}$$

$$h' = h - \frac{c^2}{\alpha^2} - 0{,}00387\, c^2 S^2$$

daher wenn auf eine ähnliche Art wie 145. §. aus

$$c = 44{,}79 \sqrt{\left[\frac{d\left(h - \frac{c^2}{\alpha^2} - 0{,}00387\, c^2 S^2\right)}{l}\right]}$$

die mittlere Geschwindigkeit entwickelt wird

$$c = \sqrt{\left[\frac{41{,}22\, h}{0{,}02\, \frac{l}{d} + 0{,}16\, S^2 + 1}\right]}$$

Beispiel. Eine gekrümmte Röhrenleitung hat 6 Fuß Druckhöhe und 3 Zoll Röhrenweite; wie viel Wasser wird in jeder Sekunde ausfließen, wenn diese Röhre nach ihren Krümmungen gemessen, 50 Fuß lang ist und drei Biegungen macht, deren Anprallungswinkel bei jeder 24 Grad beträgt?

Hier ist $h = 6$, $l = 50$, $d = \frac{1}{4}$ und
$S^2 = 3\,(\text{Sin}\ 24^\circ)^2 = 0{,}49629$ daher
die mittlere Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\left[\frac{41{,}22\ .\ 6}{0{,}02\ .\ 50\ .\ 4 + 0{,}16\ .\ 0{,}496 + 1}\right]}$$
$$= 6{,}897 \text{ Fuß}$$

und hieraus die gesuchte Wassermenge

$$M = 0{,}785\ .\ \tfrac{1}{16}\ .\ 6{,}897 = 0{,}338 \text{ Kubikfuß.}$$

152. §.

Es ist öfters erforderlich denjenigen Theil der Druckhöhe h zu wissen, welcher als Widerstands-höhe h′ zur Überwältigung der Hindernisse längs einer Röhre von gegebener Länge l und Weite d für eine bestimmte Geschwindigkeit c erfordert wird. Nach 145. §. ist

$$44{,}79 \sqrt{\left[\frac{dh'}{l}\right]} = c \text{ oder}$$

$$44{,}79^2 \left[\frac{dh'}{l}\right] = c^2 \text{ daher}$$

bei einer graden Röhre die Widerstandshöhe

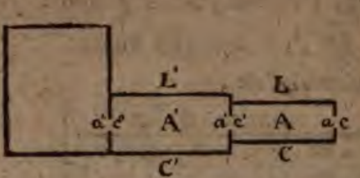
$$h' = \frac{l\,c^2}{44{,}79^2\ d}$$

Für eine gekrümte Röhre erhält man 149. §. die Widerstandshöhe

$$h' = \frac{l\,c^2}{44{,}79^2\ d} + k$$
$$= \frac{l\,c^2}{2006\ .\ d} + 0{,}00387\,S^2\,c^2.$$

153. §.

Wenn mehrere mit e[...] verbundene
Röhren von verschied[...]edem
Ein= und Ausfluß [...]ner



dünnen Platte ve-
hen sind, so bezeich-
bei derjenigen Röh-
aus welcher das W-
ser in die freie L-
strömt

a den Inhalt der Ausflußöfnung,

c die Geschwindigkeit in derselben,

A den Inhalt des Röhrenquerschnitts,

D dessen Durchmesser,

C die Geschwindigkeit in der Röhre, u-

L die Länge derselben.

Ferner haben die Größen a' c' A' D' C' L' für zweite Röhre eben die Bedeutung, und wenn üb- haupt nur zwei Röhren von der Länge L, L' a- gebracht sind, sei

a'' der Inhalt der Öfnung, durch wel- das Wasser mit der Geschwindigk-

c'' aus dem Behälter fließt.

Fände nun das Wasser bei der Bewegung du- die Röhren L', L keinen Widerstand, so wü- nach 121. §. zur Hervorbringung der Geschw- digkeit c und wegen der Contraction in Öfnungen a'' a' a eine Druckhöhe

$$(\text{I.}) \quad = c^2 \left[\frac{\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2}{\alpha^2} - \frac{\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{a}{A'}\right. \ldots}{4g} \right.$$

erfordert.

Nun findet man nach 152. § die Widersta- höhe welche zur Überwältigung der Hindern- bei einer Röhre L nöthig ist

$$= \frac{C^2 L}{44{,}79^2 D}$$

oder weil $C = \frac{ae}{A}$ ist

$$\text{(II.)} \qquad = \left(\frac{ac}{A}\right)^2 \frac{L}{44{,}79^2\, D}$$

Eben so ist wegen der Hindernisse in der Röhre L′, die erforderliche Widerstandshöhe

$$\text{(III.)} \qquad = \left(\frac{ac}{A'}\right)^2 \frac{L'}{44{,}79^2\, D'} \,.$$

Nimmt man diese zur Bewegung des Wassers erforderliche Höhen I. II. III. zusammen, so erhält man die gesammte Druckhöhe

$$h = c^2 \left[\frac{\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2}{\alpha^2} - \frac{\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{a}{A'}\right)^2}{48} + \frac{\left(\frac{a}{A}\right)^2 \frac{L}{D} + \left(\frac{a}{A'}\right)^2 \frac{L'}{D'}}{2006} \right]$$

oder wenn man die drei Glieder in der Parenthese E
durch E, F, G bezeichnet, so ist die gesammte F
Druckhöhe G

$$h = c^2 \, [E - F + G]$$

die mittlere Geschwindigkeit

$$c = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{[E - F + G]}}$$

und wenn die Wassermenge = M gesetzt wird, so ist, weil $M = ac$ oder $\frac{M^2}{a^2} = c^2$, die Druckhöhe

$$h = \frac{M^2}{a^2} \, [E - F + G] \text{ oder}$$

die Wassermenge

$$M = \frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{[E - F + G]}} \,.$$

Beispiel. Am Ende einer 400 Fuß langen und 3 Zoll weiten graden Röhrenleitung, befindet sich in einer dünnen Platte eine 8 Linien weite Oefnu[ng] ... viel Wasser wird in jeder Sekunde ... wenn der Wasserspiegel des Behälters 30 Fuß hoch über der Ausflußmün[dung] ...

Hier ist $h = 30$, $L = 400$, $a = 0{,}785 \cdot \frac{1}{18} \cdot$
$A = 0{,}785 \cdot \frac{1}{16}$ also $\frac{a^2}{A^2} = \frac{16}{6561}$.

Im vorliegenden Falle ist aber $a' = A$ d
wenn, wie erfordert wird, für die Oefnung a
bei einer dünnen Wand der Werth $\frac{1}{\alpha^2} = 0{,}0$
und für a′ wie bei einer Ansatzröhre dieser W
$= 0{,}0243$ gesetzt wird, so ist

$$E = \frac{\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2}{\alpha^2} = 0{,}0417 + 0{,}0243 \cdot \frac{16}{6561} = 0{,}04$$

$$F = \frac{1}{4g}\left(\frac{a}{A}\right)^2 = 0{,}016 \cdot \frac{16}{6561} = 0{,}016039$$

$$G = \frac{\left(\frac{a}{A}\right)^2 \frac{L}{D}}{2006} = \frac{16 \cdot 400}{6561 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2006} = 0{,}00194$$

Dieses giebt $E - F + G = 0{,}02776$
daher findet man die Wassermenge

$$M = \frac{0{,}785 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18} \sqrt{30}}{\sqrt{0{,}02776}} = 0{,}0796 \text{ Kubikfuß.}$$

154. §.

Das Gesetz wonach die Werthe von E, I
bei mehrern Röhren bestimmt werden, ist leich
übersehen. Bei vier Röhren und fünf Öf
gen ist

$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'''}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''''}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'''''}\right.\right.$$

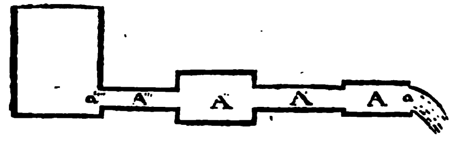
$$F = \frac{1}{4g}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{a}{A'}\right)^2 + \left(\frac{a}{A''}\right)^2 + \left(\frac{a}{A'''}\right)^2 + \left(\frac{a}{A''''}\right)^2\right.$$

wo die übereinander stehende Glieder der Reih
und F, zusammengehörige Werthe heißen könne

Sind einige oder sämmtliche Röhrenenden, u
mit Platten verschlossen in welchen sich Öfnun
befinden, so können Fälle eintreten, daß zusamm

hörige Glieder der vorstehenden Reihen wegfallen. enn da diese Glieder die erforderliche Druckhöhe r Erzeugung der Geschwindigkeiten in den Öf- ngen a, a', a'', a''', a'''', a''''' ausdrücken, so wird, nn die folgende Röhre weiter ist als die vorher- hende, am Ende der engern Röhre keine neue ruckhöhe nothwendig, weil keine Contraction vor- nden ist, und das Wasser ohne Hinzusetzung es neuen Drucks, sich in der folgenden weitern öhre ausbreitet, und die der Weite dieser Röhre tsprechende kleinere Geschwindigkeit annehmen ird. Es fallen daher in den Reihen E und F jenigen zusammengehörigen Glieder weg, welche einer dergleichen Öfnung gehören.

Wenn z. B. vier Röhren vorhanden sind, die sich nach der beistehenden Figur vereng- gen und er- weitern, so wäre allge- mein



$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{a'}\right)^2+\left(\frac{a}{a''}\right)^2+\left(\frac{a}{a'''}\right)^2+\left(\frac{a}{a''''}\right)^2\right]$$

$$F = \frac{1}{4g}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^2+\left(\frac{a}{A'}\right)^2+\left(\frac{a}{A''}\right)^2+\left(\frac{a}{A'''}\right)^2\right]$$

Nun findet bei den Oefnungen a, a', a''' keine Contraction Statt, daher fallen die ersten, zweiten und vierten Glieder in den Parenthesen weg, und man behält

$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{a''}\right)^2+\left(\frac{a}{a''''}\right)^2\right] \text{ und}$$

$$F = \frac{1}{4g}\left[\left(\frac{a}{A''}\right)^2\right]$$

oder weil a = A, a'' = A' und a'''' = A''' ist, so erhält man

$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \left(\frac{A}{A''}\right)^2\right]$$

$$F = \frac{1}{4g}\left(\frac{A}{A''}\right)^2$$

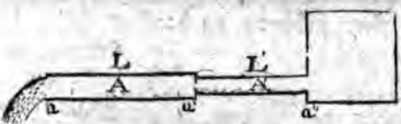
und ohne Abänderung

$$G = \frac{1}{2006}\left[\left(\frac{A}{A}\right)^2\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2\frac{L'}{D'} + \left(\frac{A}{A''}\right)^2\frac{L''}{D''} + \left(\frac{A}{A'''}\right)^2\frac{L'''}{D'''}\right]$$

In Absicht des Werths von α ist zu bemerken, daß derselbe den Umständen gemäß nach 100. §. für jede Oefnung a, a' u. s. w. bestimmt werden muß.

155. §.

Wäre in einem besondern Falle die erste Röhre welche das Wasser aus dem Behälter erhält, zwar enger wie die folgende, aber zwischen beiden eine Platte mit einer Öfnung $a' < A'$, so können alsdann die zusammengehörigen Glieder der Reihen E, F für diese Öfnung nicht wegfallen. Nun erhält man für beide Röhren allgemein



$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2\right] \text{ und}$$

$$F = \frac{1}{4g}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{a}{A'}\right)^2\right]$$

da denn nur für die Öfnung a, die (ersten) Glieder wegfallen. Nun ist $a = A$, $a'' = A'$ daher mit Rücksicht auf die verschiedenen Contractionen

$$E = 0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2 + 0{,}0243\left(\frac{A}{A'}\right)^2$$

$$F = 0{,}016\left(\frac{A}{A'}\right)^2 \text{ also}$$

$$E - F = 0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2 + 0{,}0083\left(\frac{A}{A'}\right)^2$$

wonach man die gesammte erforderliche Druckhöhe zur Erzeugung der Geschwindigkeit c beim Ausflusse finden kann. Diese ist

$$= c^2\left[0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2 + 0{,}0083\left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \frac{L'}{D'}}{2006}\right]$$

Ist die Einmündung bei $a'' = A'$ so beschaffen, daß die Contraction daselbst bei Seite gesetzt werden kann, so fällt das dritte Glied $\left(\frac{a}{a''}\right)^2$ weg, und man erhält

$$= c^2\left[0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2 - 0{,}016\left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \frac{L'}{D'}}{2006}\right]$$

156. §.

Soll die Contraction eben so wie es im Vorhergehenden angegeben ist, in Rechnung gebracht werden, so wird erfordert daß die Öfnungen in den Scheidewänden weit genug von einander abstehen, oder daß die Röhren nicht zu kurz sind, weil sonst bei mehrern kurz auf einander folgenden Öfnungen in dünnen Wänden, die Contraction nur einmal in Rechnung gebracht werden darf, auch wohl wenn die Öfnungen sehr nahe auf einander folgen, der Contractionscoeffizient sich demjenigen bei einer kurzen Ansatzröhre nähert.

Nachstehende mit Zuziehung des Königl. Professors Herrn Hobert von mir angestellten Versuche, können zum Beweise dieser Behauptung dienen. Die ganze Vorrichtung bei den Versuchen, war mit der 97. §. beschriebenen einerlei, sämmtliche 1 Zoll weite Röhren und $\frac{1}{24}$ Zoll dicke Scheidewände waren aus Messing genau gearbeitet und polirt; die Mitten der Öfnungen in den Scheidewänden, paßten genau auf die Mitten der Röhren. Bei jedem Versuche lag die Axe der Röhren

und Öfnungen horizontal, die jedesmalige 3
höhe am Anfange des Versuchs war 3 Fu
nachdem die Öfnung $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ Zoll weit
beobachtete man mit dem 97. §. beschriebene
kundenpendel die Zeit in welcher sich ein
mit 845 oder 1630 Kubikzoll Wasser an
wobei sich der Wasserspiegel im Behälter jed
$3\frac{1}{6}$ + Zoll oder nahe $6\frac{3}{25}$ Zoll senkte.

Hienach ist wie 98. §. die hypothetische Z
Ausflusses so bestimmt worden, als wenn
Contraction noch andere Hindernisse der Bew
Statt fänden; dies giebt die hypothetische Z
845 Kubikzoll Ausfluß = 107,12 Sekunde
für 1630 Kubikzoll Ausfluß = 52,87 Sek
Nur bei den Versuchen in der folgenden s
Tafel wurden 4156 Kubikzoll Wasser abgel

Nachstehende sechs Tafeln enthalten die
tate aus den mehrmals wiederholten Vers
und berechtigen außer den bereits angeführte
gerungen zu noch mehrern andern, über die
weitläuftig ist, hier nähere Untersuchungen
stellen.

Erste Tafel.

rsuche mit einer Scheidewand, in der Einmün- dung der einen Zoll weiten Röhren, bei 3 Fuß anfänglicher Druckhöhe.

l.	Durchmess. der Einmündung. Zoll.	Länge der Röhre. Zoll.	Beobachtete Zeit. Sekunden.	Ausgelassene Wassermenge. Kubikzoll.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
1	$\frac{1}{4}$	0	174	845	0,616
2	$\frac{1}{4}$	12	169	845	0,634
2*	$\frac{1}{4}$	12	174	845	0,616
3	$\frac{1}{4}$	24	167	845	0,641
4	$\frac{1}{4}$	48	165	845	0,649
5	$\frac{1}{2}$	0	85½	1630	0,618
6	$\frac{1}{2}$	12	73	1630	0,724
7	$\frac{1}{2}$	24	73	1630	0,724
8	$\frac{1}{2}$	36	75	1630	0,705
9	$\frac{1}{2}$	48	76	1630	0,695

* Das Wasser folgte nur dem Untertheile der innern Röhrenwand.

Zweite Tafel.

Versuche mit einer Scheidewand, in der Aus- dung der einen Zoll weiten Röhren, bei 3 anfänglicher Druckhöhe.

N.	Länge der Röhren.	Durchmess. der Ausmündung.	Beobachtete Zeit.	Ausgelaufene Wassermenge.	Verhält zur hypotheti Wasserme
	Zoll	Zoll.	Sekunden.	Kubikzoll.	
1	0	¼	174	845	0,616
2	12	¼	173	845	0,619
3	24	¼	173	845	0,619
4	36	¼	173	845	0,619
5	60	¼	175	845	0,612
6	0	½	85½	1630	0,618
7	36	½	84½	1630	0,626
8	60	½	85½	1630	0,618

Dritte Tafel.

suche mit zwei Scheidewänden, in einen Zoll eiten Röhren, bei 3 Fuß anfänglicher Druck- öhe.

Durchmesser der Einmünd.	Länge der Röhren.	Durchmesser der Ausmünd.	Beobachtete Zeit.	Ausgelaufene Wassermenge.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
Zoll.	Zoll.	Zoll.	Sekunden.	Kubikzoll.	
¼	¼	¼	173	845	0,619
¼	1	¼	172	845	0,622
¼	12	¼	230	845	0,465
¼	60	¼	232	845	0,461
½	¼	½	84½	1630	0,626
½	½	½	85	1630	0,622
½	1	½	86	1630	0,614
½	2	½	93	1630	0,5[illegible]8
½	3	½	104	1630	0,509
½	5	½	10[illegible]½	1630	0,4[illegible]
½	12	½	110	1630	0,481
½	24	½	110½	1630	0,478
½	36	½	111	1630	0,476
½	60	½	112	1630	0,472
½	12	¼	176	845	0,[illegible]9
¼	12	½	175	845	0,612

Vierte Tafel.

Versuche mit drei Scheidewänden, in einen weiten Röhren, bei 3 Fuß anfänglicher D…höhe, wenn jedesmal 845 Kubikzoll Wasser liefen.

N.	Durchmesser der Einmündung.	Länge der ersten Zwischenröhre.	Durchmesser der mittlern Öfnung.	Länge der zweiten Zwischenröhre.	Durchmesser der Ausmünd.	Beobachtete Zeit.	[illegible]
	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Sek.	
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	172	0,[illegible]
2	$\frac{1}{4}$	12	$\frac{1}{4}$	12	$\frac{1}{4}$	285	0,[illegible]
3	$\frac{1}{4}$	12	$\frac{1}{4}$	12	$\frac{1}{2}$	236	0,[illegible]
4	$\frac{1}{4}$	12	$\frac{1}{8}$	12	$\frac{1}{4}$	2[illegible]0	0,[illegible]
5	$\frac{1}{4}$	12	$\frac{1}{2}$	12	$\frac{1}{2}$	177	0,[illegible]
6	$\frac{1}{2}$	12	$\frac{1}{4}$	12	$\frac{1}{2}$	175	0,[illegible]

Fünfte Tafel.

[V]ersuche mit vier Scheidewänden, in einen Zoll [w]eiten Röhren, bei 3 Fuß anfänglicher Druck=höhe, wenn jedesmal 845 Kubikzoll Wasser aus=liefen.

[N].	Durchmesser der Einmündung.	Länge der ersten Zwischenröhre.	Durchmesser der zweiten Öfnung	Länge der zweiten Zwischenröhre.	Durchmesser der dritten Öfnung	Länge der dritten Zwischenröhre.	Durchmesser der Ausmündung.	Beobachtete Zeit.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Sek.	
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	172	0,622
2	$\frac{1}{4}$	12	$\frac{1}{4}$	12	$\frac{1}{4}$	12	$\frac{1}{4}$	323	0,331
3	$\frac{1}{4}$	24	$\frac{1}{2}$	12	$\frac{1}{2}$	24	$\frac{1}{4}$	237	0,452
4	$\frac{1}{2}$	24	$\frac{1}{4}$	12	$\frac{1}{4}$	12	$\frac{1}{2}$	238	0,450

Sechste Tafel.

Versuche mit cylindrischen Röhren von ungleich[...] Weite, die Ein- und Ausflußröhre einen, [...] Mittelröhre zwei Zoll weit, bei 3 Fuß anfän[...]licher Druckhöhe, wenn jedesmal 4156 Kub[...]zoll Wasser abliefen.

N.	Länge der Einflußröhre. Zoll.	Länge der Mittelröhre. Zoll.	Länge der Ausflußröhre. Zoll.	Beobachtete Zeit. Sekunden	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge
1	3	12	12	60	0,612
2	24	12	12	$64\frac{3}{4}$	0,567
3	24	12	36	$70\frac{1}{2}$	0,523

157. §.

B Wenn (154. §.) $E - F + G = B$ gesetzt wi[...] so ist ganz allgemein die Druckhöhe h welche [...] Geschwindigkeit c erzeugt, oder

$$h = c^2 B.$$

Diese Druckhöhe kann man sich aus zwei Th[...]len bestehend vorstellen, wovon der eine

h″ h'' die Widerstandshöhe zur Überwältigung [...] Hindernisse längs den Wänden der Rö[...] und beim Durchgange durch die verschie[...]nen Öfnungen; und der andere Theil

$h - h''$ auf die Geschwindigkeitshöhe zur Her[...]bringung und Unterhaltung der Geschw[...]digkeit c so verwendet wird, als wenn ke[...] Contraction noch sonstige Hindernisse v[...]handen wären.

ist daher

$$h - h'' = \frac{c^2}{4g} \text{ oder}$$

$$h'' = h - \frac{c^2}{4g} = c^2 B - \frac{c^2}{4g}$$

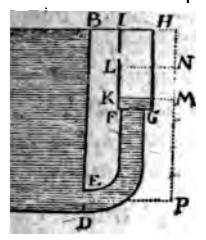
). man findet denjenigen Theil der Druckhöhe cher auf den Widerstand und die Contraction wendet wird, oder die Widerstandshöhe

$$h'' = c^2 \left(B - \frac{1}{4g} \right)$$

$$= c^2 \left(\frac{4gB - 1}{4g} \right)$$

158. §.

Mit einem sehr weiten Gefäße ABCD, welches beständig bis AB mit Wasser angefüllt erhalten wird, sei eine gleichweite Röhre DEFG verbunden, und mit dieser eine zweite vertikale Röhre FGHI. Die Öfnung DE sei durch eine Scheibe verschlossen, und in den Röhren befinde sich Wasser bis



K. Ist nun die lothrechte Höhe des Wassers Gefäße AD über der Öfnung ED = HP = K; K
lothrechte Höhe des Wassers in den Röhren
er dieser Öfnung, oder PM = h; die Länge der h
trischen Linie in den Röhren, vom Mittelpunkte
Öfnung DE bis zur Oberfläche bei K = λ; λ
Querschnitt der Röhre FH, = A und der Röhre
G = A', so wird bei plötzlicher Hinwegnahme
Scheibe bei DE, wenn K > h ist, das Was-
durch die Öfnung DE in die Röhre treten,
d damit es irgend eine lothrechte Höhe MN = b b
eiche, dazu eine gewisse Zeit t erfordert werden. t
Um diese Zeit für den Fall, daß K − h > b
genauer als 118. §. in Rechnung zu bringen,

muß zugleich darauf Rücksicht genommen werden, daß das Wasser in der Röhre seine Bewegung von o anfängt, und wie jeder andere Körper, eine beschleunigte Bewegung erhält. Es ist aber die Druckhöhe welche zur Überwältigung des Widerstandes in den Röhren und zur Erzeugung der Geschwindigkeit verwandt wird, veränderlich; im Anfange der Zeit $t = K - h$; am Ende derselben $= K - h - b$. Ist nun b nicht beträchtlich groß, so kann man die Druckhöhe als beständig ansehen und $= K - h - \frac{1}{2} b$ setzen, da denn

$$K - h - \tfrac{1}{2} b - h''$$

nur noch auf die Hervorbringung der Geschwindigkeit des Wassers verwendet wird. Bei der zunehmenden Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren ist aber h'' veränderlich und hängt von der jedesmaligen Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren ab. Damit nun für h'' ebenfalls ein mittlerer Werth in die Rechnung gebracht werde, so sei c die mittlere Geschwindigkeit welche der Druckhöhe $K - h - \frac{1}{2} b - h''$ entspricht, alsdann ist

$$c^2 = 4g\,(K - h - \tfrac{1}{2} b - h'') \text{ und}$$

$$h'' = c^2 \cdot \frac{4gB - 1}{4g} \text{ (157 §.) daher}$$

$$h'' = 4g\,(K - h - \tfrac{1}{2} b - h'')\,\frac{4gB - 1}{4g} \text{ oder}$$

$$h'' = (K - h - \tfrac{1}{2} b)\,\frac{4gB - 1}{4gB}$$

Hieraus findet man die Höhe der Wassersäule welche so auf die Bewegung des Wassers wirkt, als wenn keine Hindernisse vorhanden wären, oder

$$K - h - \tfrac{1}{2} b - h'' = K - h - \tfrac{1}{2} b - (K - h - \tfrac{1}{2} b)\,\frac{4gB - 1}{4gB}$$

$$= \frac{K - h - \frac{1}{2} b}{4gB}$$

und man kann den Druck derselben, als bewegende Kraft ansehen, die auf das Wasser in der Röhre wirkt.

)ie gesammte Wassermasse in den Röhren e in Bewegung gesetzt werden soll, ist anfäng= $=\lambda A'$, wenn man FK als sehr klein annimmt, am Ende der Zeit $t = \lambda A' + bA$; wird hier alls ein Mittel genommen, so erhält man $+ \frac{1}{2} bA$. Beide Massen bewegen sich aber ›erschiedener Geschwindigkeit; ist daher c für d einen Zeitpunkt die Geschwindigkeit des sers in der Röhre FH, so ist in eben diesem unkte die Geschwindigkeit des Wassers in der :e $DG = \frac{cA}{A'}$ daher (63. §.) die Momente Trägheit beider Massen

$$= \left(\frac{cA}{A'}\right)^2 \lambda A' + c^2 \frac{1}{2} bA.$$

:ine Masse N mit der Geschwindigkeit c zu zen, sei den obenstehenden gleichgültig (61. §.) hält man

$$c^2 N = c^2 \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \lambda A' + c^2 \frac{1}{2} bA$$

es ist die reduzirte Masse

$$N = \frac{A^2}{A'} \lambda + \frac{1}{2} bA$$

aus findet man die Beschleunigung G der sermasse N, wenn man $N\gamma$ als das Gewicht ›ewegten Masse, und $\frac{K-h-\frac{1}{2}b}{4gB} A\gamma$ als die gende Kraft ansieht, die auf die Wassermasse welche auf die Röhre FH reduzirt ist, wirkt, ann ist (34. §.)

$$G = g \frac{(K-h-\frac{1}{2}b) A\gamma}{4gB \, . \, N\gamma}$$

wenn man für N substituirt und gehörig ab-

$$G = \frac{K-h-\frac{1}{2}b}{4B\left(\frac{A}{A'}\lambda + \frac{1}{2}b\right)}$$

Nun ist die Zeit t in welcher vermöge der Beschleunigung G, der Weg b durchlaufen wird (35. §.)

$$t = \sqrt{\frac{b}{G}}$$ daher die gesuchte Zeit

$$t = 2\sqrt{\left[\frac{B\left(\frac{A}{A'}\lambda + \frac{1}{2}b\right)b}{K - h - \frac{1}{2}b}\right]}$$

Für $A' = A$ wird

$$t = 2\sqrt{\left[\frac{B(\lambda + \frac{1}{2}b)b}{K - h - \frac{1}{2}b}\right]}$$

Hat das Wasser in der Röhre FH am Ende der Zeit t die Geschwindigkeit y erlangt, so ist (35. §.)

$$y = 2\sqrt{G}\sqrt{b}$$ oder

$$y = \sqrt{\left[\frac{b(K - h - \frac{1}{2}b)}{B\left(\frac{A}{A'}\lambda + \frac{1}{2}b\right)}\right]}.$$

1. Anmerk. Die vorgesetzten Grenzen und weil hier die Gesetze nach welchen veränderliche Kräfte wirken, nicht als bekannt vorausgesetzt werden können, erlauben keine schärfere Auseinandersetzung der vorstehenden für die Lehre von den Pumpen sehr wichtigen Untersuchung. Um wenigstens zu zeigen auf welche verwickelte und für die Ausübung beinahe unbrauchbare Ausdrücke, eine größere Genauigkeit führt, dient nachstehende Betrachtung.

Wenn eine veränderliche Kraft P, die veränderliche Masse M vom Anfange der Bewegung durch den Weg x führt, und die Masse M am Ende dieses Weges die Geschwindigkeit y erlangt hat, so ist (38. §. 2. Anmerk. III.)

$$2y\,dy = 4g\frac{P}{M}dx$$

Mit Beibehaltung der angenommenen Bezeichnung ist im vorliegenden Falle

$$\frac{P}{M} = \frac{K - h - x - h''}{\frac{A}{A'}\lambda + x}$$

wo h″ die veränderliche Widerstandshöhe $y^2\left(B-\frac{1}{4g}\right)$ ist (157. §.)

Man setze

$$\frac{A}{A'}\lambda = a \text{ und } B-\frac{1}{4g} = b \text{ so wird}$$

$$2y\,dy = 4g\,\frac{K-h-x-by^2}{a+x}\,dx \text{ oder}$$

$$4gby^2dx + (a+x)2y\,dy = 4g(K-h-x)dx$$

Von dieser verwickelten Differenzialgleichung finde ich das Integral, wenn zur bessern Uebersicht vorher $a+x=z$ gesetzt und nachher wieder weggeschafft wird

$$y^2(a+x)^{4gb} = \frac{(K-h+a)(a+x)^{4gb}}{b} - \frac{4g(a+x)^{4gb+1}}{4gb+1} + \text{Const.}$$

Für $x=0$ wird $y=0$; daher das vollständige Integral

$$(a+x)^{4gb} = \frac{(K-h+a)[(a+x)^{4gb}-a^{4gb}]}{b} - \frac{4g[(a+x)^{4gb+1}-a^{4gb+1}]}{4gb+1}$$

und hieraus, wenn $4gb=\beta$ gesetzt wird

$$y^2 = \frac{[(\beta+1)(K-h+a)-\beta(a+x)](a+x)^{\beta} - [(\beta+1)(K-h+a)-\beta a]a^{\beta}}{b(\beta+1)(a+x)^{\beta}}$$

wonach also die Geschwindigkeit y welche das Wasser in der Röhre bei jeder Höhe x erreicht, bekannt ist.

Für $h=0$ ist $\lambda=0$ also $a=0$ und man erhält in dem Falle, wenn im Anfange der Bewegung noch kein Wasser in der Röhre ist, die Geschwindigkeit

I.) $$y^2 = \frac{(4gb+1)K - 4gbx}{b(4gb+1)}$$

Wenn das Wasser seine größte Höhe in der Röhre erreicht hat, so wird $y=0$ also

$$(4gb+1)K = 4gbx$$

und man findet bei einer anfänglich ganz leeren

Röhre, die größte Höhe x' auf welche das Wasse steigt

(III.) $$x' = \frac{(4gb+1)K}{4gb} = \frac{4gBK}{4gB-1}$$

Aus der zuerst gefundenen allgemeinern Gleichun erhält man für diese größte Höhe

$$[(\beta+1)(K-h+a)-\beta(a+x')](a+x')^{\beta}=[(\beta+1)(K-h+a)-\beta a]a$$

also

$$\text{Log}(a+x')=\text{Log}\,a+\frac{1}{\beta}\,\text{Log}\left[\frac{(\beta+1)(K-h+a)-\beta a}{(\beta+1)(K-h+a)-\beta(a+x')}\right.$$

Weil aber x' noch in dem Nenner des letzten Loga rithmen enthalten ist, so kann man dafür zur leich tern Entwickelung einen Werth setzen, welcher sic demselben nähert. Für den Fall daß anfänglich kei Wasser in der Röhre ist, wäre hier

$$x' = \frac{(4gb+1)(K-h)}{4gb} = \frac{(\beta+1)(K-h)}{\beta}$$

dieses giebt

$$\text{Log}(a+x')=\text{Log}\,a+\frac{1}{\beta}\,\text{Log}\left[\frac{(\beta+1)(K-h+a)-\beta a}{a}\right]$$ od

(IV.) $$\text{Log}(a+x')=\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)\text{Log}\,a+\frac{1}{\beta}\text{Log}[(\beta+1)(K-h)+a$$

Wollte man nun ferner die Zeit t bestimmen i welcher das Wasser auf irgend eine Höhe x steig so kommt es darauf an, die Gleichung (58. §. 2 Anmerkung)

$$dt = \frac{dx}{y}$$

zu integriren, welches in dem Falle, daß anfängli kein Wasser in der Röhre ist, leicht seyn wird, ab bei Anwendung des allgemeinen Ausdrucks für y in sehr weitläuftige Rechnungen verwickelt.

Man vergleiche mit dem Vorhergehenden, Her Langsdorf Maschinenlehre, 1ter Bd. 73. und 74ster S. 205, wo ungeachtet die Masse M unveränderli angenommen ist, dennoch sehr weitläuftige Ausdr cke entstehen.

2. Anmerk. Es schien mir nicht undienlich zu seyn, über das Steigen des Wassers in vertikalen Röhren einige Versuche anzustellen. Zu diesem Ende bediente ich mich eines 4 Fuß hohen und 1½ Fuß weiten mit Wasser angefüllten Gefäßes, und einer gläsernen 5 Fuß langen und etwa ½ Zoll weiten Röhre, die an beiden Enden offen und daselbst genau abgeschliffen war. Mittelst einer ledernen an einem Stabe befestigten Scheibe konnte man das unterste Ende der Röhre wasserdicht verschließen, und wenn die so verschlossene Röhre mitten im Gefäße vertikal befestiget war, konnte man die Scheibe plötzlich wegziehen, damit das Wassers des Gefäßes frei in die Röhre stieg. Weil die Röhre nicht durchgängig gleiche Weite hatte, so erlauben zwar diese Versuche keine genaue Vergleichung mit der Theorie, mit geringen Abweichungen dienen sie aber die Uebereinstimmung der vorhin gefundenen Formeln mit der Erfahrung zu zeigen.

In der nachstehenden Tafel bestimmen die vertikalen Spalten

I. die Entfernung des Wasserspiegels im Behälter von der Einmündung der vertikalen Röhre (K);

II. die Höhe des in der Röhre befindlichen Wassers über der Einmündung (h);

III. die beobachtete größte Höhe auf welche das Wasser in der Röhre über die Oberfläche des Wassers im Behälter gelangte;

IV. die Differenz zwischen der Wasserhöhe über der Einmündung und der Wasserhöhe in der Röhre, oder die anfängliche Druckhöhe (K—h);

V. die größte Höhe auf welche das Wasser in der Röhre, über den anfänglichen Wasserspiegel in der Röhre stieg (x').

N. der Versuche.	I. K Zoll.	II. h Zoll.	III. $h+x'-K$ Zoll.	IV. $K-h$ Zoll.	V. x' Zoll.
1	12	0	$8\frac{3}{4}$	12	$20\frac{3}{4}$
2	24	0	14	24	38
3	24	12	$9\frac{1}{2}$	12	$21\frac{1}{2}$
4	35	0	21	35	56
5	36	0	$21\frac{3}{4}$	36	$57\frac{3}{4}$
6	36	12	$17\frac{3}{4}$	24	$41\frac{3}{4}$
7	36	24	$10\frac{3}{4}$	12	$22\frac{3}{4}$
8	36	30	$6\frac{1}{4}$	6	$11\frac{1}{4}$
9	39	36	$2\frac{1}{2}$	3	$5\frac{1}{2}$

159. §.

Bei der Anordnung einer Röhrenleitung ist vorzüglich darauf Rücksicht zu nehmen, daß da wo sich die Röhren wenden oder eine andere Richtung erhalten, die Biegung keine scharfe Ecke erhält, sondern bogenförmig gemacht wird, wobei es zuträglich ist, den Halbmesser der Biegung so groß als möglich anzunehmen, auch die Röhre so weit die Biegung geht, allmählich zu erweitern. Wenn mehrere Röhren zusammenstoßen, so müssen alle plötzliche Verengungen vermieden werden, weil dadurch eine Contraction entstehet, wodurch die Wassermenge vermindert wird. Dagegen kann bei dem Eintritte des Wassers in die Röhren, die nöthige Erweiterung nach der Gestalt des zusammengezogenen Strahls (95. §.), und in gewissen Fällen die (96. §.) beschriebene Erweiterung der Ausmündung angebracht werden, wodurch eine Vermehrung der Wassermenge bewirkt wird.

Wenn eine Röhrenleitung in die Höhe steigt und denn wieder abfällt, so sammlet sich leicht in den höchsten Stellen Luft an, welche den Durchfluß des Wassers verhindert, daher man an den

hsten Stellen derselben, kleine vertikale Luftröh- oder Windstöcke (Columnaria*e*, *Ventou*-) anbringt, durch welche die Luft entweichen n, ohne daß etwas Wasser verloren geht. In tiefsten Stellen der Röhren, pflegen sich hinge leicht Schlamm und andere Unreinigkeiten an- tzen, daher man daselbst oder wenn die Röh- leitung lang ist, etwa alle 25 Ruthen, vier- gte Kasten oder Wechselhänschens (*Re- rds*) anbringt, damit sich die Unreinigkeit in selben absetzen kann.

Zur Fortleitung des Wassers bedient man sich bleiernen, eisernen, hölzernen oder gebrannten nernen Röhren, worunter die bleiernen den Vor- verdienen aber auch sehr kostbar sind.

ber die Anlage der Röhrenleitungen sehe man:

R. Vitruvius Pollio, Baukunst. Aus der römischen Urschrift übersetzt von A. Rode. II. Bd. Leipzig 1796. VIII. Buch, 7. Kap. S. 171 u. f.

I. *Leupold* Theatrum Machinarum Hydrotechnicarum, Leipzig 1724. XI. XII. und XIII. Kapitel. von hölzernen, thönernen und bleiernen Röhren.

Belidor, Architectura Hydraulica, 1. Th. 4. Buch, 4. Kap. 1367. §. u. f.

Gesammlete Nachrichten, den Röhrenbau sowohl mit hölzernen als töpfernen Röhren betreffend. Leipziger Intelligenzblatt v. J. 1764. S. 559 u. f.

Bossut angef. Hydrodynamik, 2ter Bd. 10tes Kapit. 658. §. u. f.

Langsdorf angef. Hydraulik, 10. Kap. 137. §. u. f.

Zehntes Kapitel.

Von den springenden Strahlen.

160. §.

Stellt man sich einen beständig gleich voll erhaltenen Behälter vor, an welchem sich eine Röhre befindet, in deren Wand eine Sprungöfnung oder Mündung (*Ajutage*) angebracht ist, durch welche das Wasser ausströmt, so giebt dies eine Darstellung von der Art wie ein Springwerk, welches hier vorausgesetzt ist, bewerkstelliget werden kann. Die Röhre in welcher das Wasser zur Sprungöfnung fließt, heißt die Leitröhre, und wenn sie vom Behälter vertikal abgeht, wird sie auch Fallröhre (*Tuyau de descente*) genannt, da denn zuweilen noch eine besondere engere Leitröhre angebracht ist.

Außer dieser Einrichtung, kann auch noch dadurch ein springender Strahl (*Jet*) von sehr beträchtlicher Höhe hervorgebracht werden, wenn wie bei Spritzen, statt der Druckhöhe des Wassers, eine andere Kraft zur Bewirkung eines Drucks angebracht wird.

Bei der Beurtheilung der Strahlhöhe die hier immer, wenn nichts besonders dabei erinnert ist, vertikal angenommen wird, kommt es vorzüglich darauf an, welches die größte Geschwindigkeit ist die das Wasser erhält, wenn es die Mündung verlassen hat, weil der Strahl mit dieser Geschwindigkeit zu steigen anfängt. Nun findet bei einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre keine Zusammenziehung des Strahls Statt, weil derselbe in

er ganzen Weite der Röhre fortströmt, daher
steigt auch in diesem Falle der Strahl mit einer
Geschwindigkeit, die der mittleren Geschwindigkeit
es Wassers in der Ansatzröhre gleich ist. Bei
ner Öfnung in einer dünnen Platte hingegen,
eht sich der Wasserstrahl nach dem Ausflusse zu-
mmen und erhält einen kleineren Querschnitt,
so eine größere Geschwindigkeit mit welcher er
ufwärts steigt, die $\frac{25}{16}$ von der Geschwindigkeit
der Öfnung ist (92. §.).

Wenn ein Wasserstrahl in die Höhe steigt, so
at er den Widerstand der Luft zu überwältigen,
e er verdrängen muß; so bald er aber seine
ößte Höhe erreicht hat und sich nicht mehr in
bsicht der Ausdehnung verändert, so ist von Sei-
n der Luft kein fernerer Widerstand zu erwarten,
der Druck der Luft gegen alle Theile des Strahls,
nd gegen das Wasser im Behälter, sehr nahe der-
be ist. Weil es nun überdies in der Ausübung
ten auf eine sehr große Genauigkeit bei Bestim-
ung der Strahlhöhen ankommt, so ist man be-
chtiget, wenn die übrigen nicht sehr beträchtlichen
inderniſſe bei Seite gesetzt werden, anzunehmen,
aß ein Wasserstrahl diejenige Höhe erreicht, welche
n fester Körper erlangen würde, der mit der
rößten Geschwindigkeit des Strahls womit das
Wasser aufwärts steigt, in die Höhe geht, da als-
nn auf den Widerstand der Luft bei der anfäng-
chen Bewegung nicht Rücksicht genommen wird.
Ist daher

z die vertikale Strahlhöhe,

u die größte Geschwindigkeit welche das Wasser erhält wenn es die Mündung verlassen hat, so wird (20. §.)

161. §.

Wenn c die mittlere Geschwindigkeit des Wa
sers in der Mündung ist, so erhält man für e
Sprungöfnung in einer dünnen Platte

$u = \frac{25}{16} c$ und $u^2 = 2,4414\ c^2$ daher

die Strahlhöhe (*Hauteur du jet*)

$$z = \frac{2,4414}{48} c^2 = 0,03906\ c^2.$$

Der Werth von c^2 läßt sich leicht nach d
vorigen Kapitel finden, denn man bezeichne du

- h die gesammte Druckhöhe,
- L die Länge der Leitröhre,
- D den Durchmesser derselben,
- A den Inhalt ihres Querschnitts, und dur
- a den Inhalt der Sprungöfnung;

so ist nach 153. §. für rheinländisches Fußma

$$c^2 = \frac{h}{0,0417 + \left(0,0083 + \frac{L}{2006 . D}\right) \frac{a^2}{A^2}}$$

daher die Strahlhöhe

$$z = \frac{h}{1,067 + \left(0,21 + 0,0127 \frac{L}{D}\right) \frac{a^2}{A^2}}$$

Ist die Leitröhre sehr kurz, so wird L =
also

$$z = \frac{h}{1,067 + 0,21 \frac{a^2}{A^2}}$$

und wenn die Leitröhre sehr weit ist, so d
man $\frac{a^2}{A^2} = 0$ setzen kann

$$z = 0,936\ h.$$

162. §.

Bestehet die Sprungöfnung aus einer kur- en cylindrischen Ansatzröhre, so findet au- erhalb der Mündung keine Zusammenziehung des Strahls Statt, daher ist u = c; also die Strahl- öhe

$$z = 0{,}016\ c^2$$

Nun ist 153. §.

$$c^2 = \frac{h}{0{,}0243 + \left(0{,}0083 + \frac{L}{2006\,.\,D}\right)\frac{a^2}{A^2}}$$

her die Strahlhöhe

$$z = \frac{h}{1{,}518 + \left(0{,}5125 + 0{,}03116\,\frac{L}{D}\right)\frac{a^2}{A^2}}$$

ür L = o wird

$$z = \frac{h}{1{,}518 + 0{,}5125\,\frac{a^2}{A^2}}$$

nd für $\frac{a^2}{A^2} = o$

$$z = 0{,}66\,.\,h.$$

Zur Vergleichung der vorstehenden Ausdrücke mit der Erfahrung können die von Herrn Bossut (Hy- drod. 2ter Bd. 581 und 582. §.) und die von Hrn. Mariotte *) angestellte Versuche dienen, weil aber

---

*) Oeuvres de M. *Mariotte*, T. II. à Leyde. 1717. raité du mouvement [illegible]s eaux etc. IV. Part. 1. Disc. . 436. -

Man hat von dieser Abhandlung [illegible] Ueber- tzung unter dem Titel:

es weyland vortrefflichen [illegible] ren der Hydrostatik und [illegible] C. Meinig. Leipzig [illegible]

beide Verfasser die Länge ihrer Leitröhre nicht genau angegeben haben, so mußte solche nach einer ungefähren Schätzung hier angenommen werden. Die Abmessungen beziehen sich sämmtlich auf pariser Maaß, und es durfte zur Berechnung der Strahlhöhen keine Veränderung mit den vorstehenden Ausdrücken vorgenommen werden, weil man sich leicht überzeugen kann, daß sie außer dem rheinländischen Fußmaaße auch für jedes andere Fußmaaß gelten.

Noch ist nachstehender Tafel die letzte Colonne beigefügt worden, um daraus zu übersehen wie die von Mariotte gegebene Regel, nach welcher

$$z = 10\,[\sqrt{(3h + 225)} - 15]$$ seyn soll,

mit der Erfahrung übereinstimmt, wenn mit ihm vorausgesetzt wird, daß eine Druckhöhe von $5\frac{1}{12}$ Fuß einen 5 Fuß hohen Strahl hervorbringt. Hiebei ist aber von Mariotte weder auf Leitröhre noch Sprungöfnung Rücksicht genommen worden. Auch wird man sich bei einigen Versuchen von Mariotte, die wenige Uebereinstimmung der Rechnung mit den Erfahrungen leicht daraus erklären können, daß es mit großen Schwierigkeiten verbunden ist, sehr hohe Strahlen genau auszumessen. Die sehr genauen Bossut'schen Versuche, sowohl in der folgenden Tafel, als auch die im 164. §. angeführten, stimmen weit besser mit der Rechnung.

Versuche mit Sprungöfnungen in einer dünnen Platte.

N.	Versuche von	Länge der Leitröhre.	Durchmess. der		Druckhöhe.	Strahlhöhe nach der		
			Leitröhre.	Mündung.		Erfahrung.	obiger Formel.	Regel von Mariotte.
		Fuß.	Zoll.	Linien.	Fuß.	Fuß.	Fuß.	Fuß.
1	Mar.	—	s. weit	3	5,5	5,389	5,15	5,40
2	Mar.	—	s. weit	4	5,5	5,396	5,15	5,40
3	Mar.	—	s. weit	6	5,5	5,396	5,15	5,40
4	Bossut	5	0,792	2	11	9,917	10,28	10,62
5	Bossut	4	0,792	4	11	9,653	10,02	10,62
6	Bossut	2	0,792	8	11	7,833	8,05	10,62
7	Bossut	5,5	3⅔	2	11	10,012	10,29	10,62
8	Bossut	4,5	3⅔	4	11	10,486	10,29	10,62
9	Bossut	3,66	3⅔	6	11	10,542	10,29	10,62
10	Mar.	12	3	6	12,333	12,000	11,54	11,81
11	Mar.	24	3	2	24,417	22,167	22,85	23,27
12	Mar.	24	3	4	24,417	22,833	22,85	23,27
13	Mar.	24	3	6	24,417	22,833	22,85	23,27
14	Mar.	26	3	3	26,083	22,000	24,41	24,14
15	Mar.	26	3	6	26,083	24,208	24,41	24,14
16	Mar.	26	3	10	26,083	23,750	24,24	24,14
17	Mar.	35	3	3	34,958	28,000	32,72	31,62
18	Mar.	35	3	4	34,958	30,000	32,72	31,6[illegible]
19	Mar.	35	3	6	34,958	31,708	32,71	31,62
20	Mar.	35	3	15	34,958	27,000	31,03	31,62

Versuch mit einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre.

21	Bossut	1,33	3⅔	4	11	7,125	7,26	10,62

mit der Erfahrung stimmt die von
zu Buat (286. §.) gegebene An-

weisung zur Berechnung der Strahlhöhe. Sie ist aber zu weitläuftig als daß hier davon Anwendung gemacht werden könnte, da sich selten ein Fall in der Ausübung ereignet, der eine solche Genauigkeit erforderte.

163. §.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, daß unter übrigens gleichen Umständen die Strahlen durch Öfnungen in einer dünnen Platte höher gehen, als wenn die Sprungöfnungen mit einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre versehen sind. Bei einer konischen Sprungöfnung von 5 Zoll 10 Linien Länge, die oben 4 und unten 9 Linien weit war, fand Herr Bossut unter einer Druckhöhe von 11 Fuß die Strahlhöhe 9 Fuß $6\frac{1}{3}$ Zoll, dahingegen war diese Höhe bei einer 4 Linien weiten Öfnung in einer dünnen Platte, 10 Fuß $5\frac{5}{8}$ Zoll, und bei einer 4 Linien weiten und 5 Zoll 10 Linien hohen Röhre nur 7 Fuß $3\frac{1}{2}$ Zoll, so daß der Strahl seine größte Höhe bei einer Öfnung in einer dünnen Platte, seine geringste aber bei einer cylindrischen Röhre erreichte, welches auch mit Mariotte's Beobachtungen übereinstimmt.

Bei den Versuchen über die Höhe der vertikal aufwärts steigenden Strahlen, neigte Hr. Bossut die Richtung des Strahls ein wenig schief, und fand daß der Strahl dadurch noch eine etwas größere Höhe erreichte.

164 §.

Außer der vertikalen Höhe welche ein Strahl erreicht, kann auch noch die Frage entstehen, wie weit er bei einer gegebenen Lage der Sprungöfnung spritzt, oder wie groß die Sprungweite ist. Setzt man zuerst den einfachsten Fall, daß die Axe der Gußmündung eines Springwerks horizontal liegt, und bezeichnet durch

u die

u die mittlere Geschwindigkeit des ausspringenden Strahls im Punkte der größten Zusammenziehung,

H die Erhöhung der Mündung über einer Horizontalebene,

W die Sprungweite des Strahls auf dieser Ebene,

(29. §.)

$$W^2 = \frac{u^2}{g} H \text{ oder}$$

$$W = u\sqrt{\frac{H}{g}} = 0{,}253\, u \sqrt{H}.$$

Hieraus erhält man, weil u = $\frac{2}{1}\frac{5}{6}$ c ist (92. §.), eine Öfnung in einer dünnen Platte

$$W = 0{,}395\, c \sqrt{H}$$

162. §. für eine kurze Ansatzröhre

$$W = 0{,}253 \cdot c \sqrt{H}.$$

Befindet sich an dem Behälter keine Leitröhre, aß die Sprungöfnung unmittelbar an Wand des Behälters angebracht ist, so wenn h die Druckhöhe bezeichnet, $c = \alpha \sqrt{h}$ bei der Öfnung in einer dünnen nd

$$W = 0{,}395 \cdot 4{,}89 \cdot \sqrt{h} \sqrt{H}$$
$$= 1{,}9316 \sqrt{(hH)}$$

bei einer kurzen Ansatzröhre

$$W = 0{,}253 \cdot 6{,}42 \sqrt{h} \sqrt{H}$$
$$= 1{,}624 \cdot \sqrt{(hH)}$$

ie beiden letzten Ausdrücke für jedes Fuß oder naaß gelten.

piel. In der vertikalen dünnen Wand eines Behälters befindet sich bei 9 Fuß Druckhöhe eine

weisung zur Berechnuug der Strahlhöhe. Sie ist aber zu weitläuftig als daß hier davon Anwendung gemacht werden könnte, da sich selten ein Fall in der Ausübung ereignet, der eine solche Genauigkeit erforderte.

163. §.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, daß unter übrigens gleichen Umständen die Strahlen durch Öfnungen in einer dünnen Platte höher gehen, als wenn die Sprungöfnungen mit einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre versehen sind. Bei einer konischen Sprungöfnung von 5 Zoll 10 Linien Länge, die oben 4 und unten 9 Linien weit war, fand Herr Bossut unter einer Druckhöhe von 11 Fuß die Strahlhöhe 9 Fuß $6\frac{1}{3}$ Zoll, dahingegen war diese Höhe bei einer 4 Linien weiten Öfnung in einer dünnen Platte, 10 Fuß $5\frac{5}{6}$ Zoll, und bei einer 4 Linien weiten und 5 Zoll 10 Linien hohen Röhre nur 7 Fuß $3\frac{1}{2}$ Zoll, so daß der Strahl seine größte Höhe bei einer Öfnung in einer dünnen Platte, seine geringste aber bei einer cylindrischen Röhre erreichte, welches auch mit Mariotte's Beobachtungen übereinstimmt.

Bei den Versuchen über die Höhe der vertikal aufwärts steigenden Strahlen, neigte Hr. Bossut die Richtung des Strahls ein wenig schief, und fand daß der Strahl dadurch noch eine etwas größere Höhe erreichte.

164 §.

Außer der vertikalen Höhe welche ein Strahl erreicht, kann auch noch die Frage entstehen, wie weit er bei einer gegebenen Lage der Sprungöfnung spritzt, oder wie groß die Sprungweite ist. Setzt man zuerst den einfachsten Fall, daß die Axe der Gußmündung eines Springwerks horizontal liegt, und bezeichnet durch

u die

u die mittlere Geschwindigkeit des ausspringenden Strahls im Punkte der größten Zusammenziehung,

H die Erhöhung der Mündung über einer Horizontalebene,

W die Sprungweite des Strahls auf dieser Ebene,

t (29. §.)

$$W^2 = \frac{u^2}{g} H \text{ oder}$$

$$W = u\sqrt{\frac{H}{g}} = 0{,}253\, u \sqrt{H}.$$

Hieraus erhält man, weil $u = \frac{24}{15}c$ ist (92. §.), eine Öfnung in einer dünnen Platte

$$W = 0{,}395\, c \sqrt{H}$$

162. §. für eine kurze Ansatzröhre

$$W = 0{,}253 \cdot c \sqrt{H}.$$

Befindet sich an dem Behälter keine Leitröhre, daß die Sprungöfnung unmittelbar an Wand des Behälters angebracht ist, so wenn h die Druckhöhe bezeichnet, $c = \alpha \sqrt{h}$ r bei der Öfnung in einer dünnen and

$$W = 0{,}395 \cdot 4{,}89 \cdot \sqrt{h} \sqrt{H}$$
$$= 1{,}9316 \sqrt{(hH)}$$

bei einer kurzen Ansatzröhre

$$W = 0{,}253 \cdot 6{,}42 \sqrt{h} \sqrt{H}$$
$$= 1{,}624 \cdot \sqrt{(hH)}$$

ie beiden letzten Ausdrücke für jedes Fuß oder naaß gelten.

piel. In der vertikalen dünnen Wand eines Behälters befindet sich bei 9 Fuß Druckhöhe eine

Oefnung, 4,2986 Fuß über einer horizontalen Ebene. Wie weit wird der Strahl auf derselben springen?

$$h = 9,\ H = 4{,}2986 \text{ daher}$$

die Sprungweite

$$W = 1{,}9316 \sqrt{(9 \cdot 4{,}2986)} = 12{,}014.$$

In nachstehender Tafel sind die beiden ersten Versuche von Herrn Bossut (Hyd. 2. Bd. 583. §.), und der dritte von Herrn Venturi (Rech. p. 74) bei Oefnungen in dünnen Wänden angestellt.

N.	Durchmesser der Öfnung. Linien.	Druckhöhe. Fuß.	Höhe H. Fuß.	Sprungweite nach der Erfahrung. Fuß.	Sprungweite nach der Berechnung. Fuß.
1	6	9	4,2986	12,270	12,014
2	6	4	4,2986	8,222	8,010
3	18	2,708	4,5	6,792	6,743

165. §.

In einem Gefäße dessen Boden mit der Horizontalebene, worauf der Strahl fällt, gleich hoch liegt, befinde sich in einer vertikalen Wand desselben eine Öfnung, so erhält man allgemein (29. §.)

$$W^2 = \frac{u^2}{g} H. \text{ Aber (100. §. VIII.)}$$

$$u^2 = \alpha^2 h \text{ daher die Sprungweite}$$

$$W = \frac{\alpha}{\sqrt{g}} \sqrt{[h . H]}$$

Nun sind α, g bestimmte Größen, daher hängt die Sprungweite vom Produkte der Höhen h . H ab. Aber H + h ist die ganze Höhe des Wassers über der Ebene worauf die Sprungweite genommen wird, und es ist daher das Produkt H .

m größten, wenn $h = H$ ist; folglich sprißt er Strahl auf einer mit dem Boden des Jefäßes gleichliegenden Horizontalebene m weitesten, wenn sich die Ausflußöf-ung auf der halben Höhe des Wassers ; Gefäße befindet.

Auch läßt sich einsehen, daß bei Öfnungen gleicher Entfernung über oder unter r Mitte der Wasserhöhe, die Sprung-:iten gleich groß sind.

166. §.

Wenn die Are der Sprungöfnung un-r einem schiefen Winkel β gegen den Ho-ont aufwärts gerichtet ist, so erhält man (26. §.) gemein die Sprungweite auf derjenigen Ho-ontalebene welche durch die Mitte der Öfnung ht,

$$W = \frac{u^2}{2g} \text{Sin}\, 2\beta = 0{,}032\, u^2\, \text{Sin}\, 2\beta$$

aher für eine Öfnung in einer dünnen Platte (161. §.)

$$W = 0{,}078125\, c^2\, \text{Sin}\, 2\beta$$

nd für eine kurze Ansaßröhre (162. §.)

$$W = 0{,}032\, c^2\, \text{Sin}\, 2\beta.$$

Wenn sich die Sprungöfnung unmittelbar in er Wand eines Behälters befindet, so daß ie Leitröhre wegfällt, so erhält man, wenn h die Druckhöhe bezeichnet, $c^2 = \alpha^2 h$, daher für Öf-nungen in einer dünnen Wand

$$W = 0{,}078125 \cdot 23{,}98\, h\, \text{Sin}\, 2\beta$$
$$= 1{,}872\, h\, \text{Sin}\, 2\beta$$

Oefnung, 4,2986 Fuß über einer horizontalen Ebene. Wie weit wird der Strahl auf derselben springen?

$$h = 9,\ H = 4{,}2986 \text{ daher}$$

die Sprungweite

$$W = 1{,}9316\ \sqrt{(9 \cdot 4{,}2986)} = 12{,}014.$$

In nachstehender Tafel sind die beiden ersten Versuche von Herrn Bossut (Hyd. 2. Bd. 583. §.), und der dritte von Herrn Venturi (Rech. p. 74) bei Oefnungen in dünnen Wänden angestellt.

N.	Durchmesser der Öfnung. Linien.	Druckhöhe. Fuß.	Höhe H. Fuß.	Sprungweite nach der Erfahrung. Fuß.	Sprungweite nach der Berechnung. Fuß.
1	6	9	4,2986	12,270	12,014
2	6	4	4,2986	8,222	8,010
3	18	2,708	4,5	6,792	6,741

165. §.

In einem Gefäße dessen Boden mit der Horizontalebene, worauf der Strahl fällt, gleich hoch liegt, befinde sich in einer vertikalen Wand desselben eine Öfnung, so erhält man allgemein (29. §.)

$$W^2 = \frac{u^2}{g} H. \text{ Aber (100. §. VIII.)}$$

$$u^2 = \alpha^2 h \text{ daher die Sprungweite}$$

$$W = \frac{\alpha}{\sqrt{g}} \sqrt{[h \cdot H]}$$

Nun sind α, g bestimmte Größen, daher hängt die Sprungweite vom Produkte der Höhen h . H ab. Aber H + h ist die ganze Höhe des Wassers über der Ebene worauf die Sprungweite genommen wird, und es ist daher das Produkt H .

m größten, wenn $h = H$ ist; folglich spritzt er Strahl auf einer mit dem Boden des Gefäßes gleichliegenden Horizontalebene m weitesten, wenn sich die Ausflußöfnung auf der halben Höhe des Wassers m Gefäße befindet.

Auch läßt sich einsehen, daß bei Öfnungen n gleicher Entfernung über oder unter er Mitte der Wasserhöhe, die Sprungweiten gleich groß sind.

166. §.

Wenn die Axe der Sprungöfnung unter einem schiefen Winkel β gegen den Horizont aufwärts gerichtet ist, so erhält man (26. §.) allgemein die Sprungweite auf derjenigen Horizontalebene welche durch die Mitte der Öfnung geht,

$$W = \frac{u^2}{2g} \operatorname{Sin} 2\beta = 0{,}032\, u^2 \operatorname{Sin} 2\beta$$

daher für eine Öfnung in einer dünnen Platte (161. §.)

$$W = 0{,}078125\, c^2 \operatorname{Sin} 2\beta$$

und für eine kurze Ansatzröhre (162. §.)

$$W = 0{,}032\, c^2 \operatorname{Sin} 2\beta.$$

Wenn sich die Sprungöfnung unmittelbar in der Wand eines Behälters befindet, so daß die Leitröhre wegfällt, so erhält man, wenn h die Druckhöhe bezeichnet, $c^2 = a^2 h$, daher für Öfnungen in einer dünnen Wand

$$W = 0{,}078125 \cdot 23{,}98\, h \operatorname{Sin} 2\beta$$
$$= 1{,}872\, h \operatorname{Sin} 2\beta$$

und für eine kurze Ansatzröhre

$$W = 0{,}032 \,.\, 41{,}23\, h \;\mathrm{Sin}\, 2\beta$$
$$= 1{,}319\, h \;\mathrm{Sin}\, \alpha.$$

Noch ergiebt sich aus 27. §.

daß die Sprungweiten unter übrigens gleichen Umständen einander gleich sind, wenn sich die Neigungswinkel der Axen der Sprungöfnungen gegen den Horizont zu 90 Grad ergänzen.

Auch folgt aus 28. §.

daß die größte Sprungweite, unter übrigens gleichen Umständen, einem Neigungswinkel von 45 Grad entspricht;

ferner:

daß die größte Sprungweite doppelt so groß ist als die vertikale Strahlhöhe, wenn der Strahl grade aufwärts gerichtet ist,

und endlich:

daß die größte Sprungweite viermal so groß ist, als die lothrechte Höhe vom Scheitel des Strahls, bis zum Horizont.

1. Beispiel. In der Wand eines Behälters ist eine kurze Ansatzröhre unter einem Winkel von 40 Grad gegen den Horizont geneigt; wie groß wird die Sprungweite auf dem Horizonte der Oefnung seyn, wenn über derselben 36 Fuß Druckwasser stehet?

$h = 36$, $\mathrm{Sin}\, 2\beta = \mathrm{Sin}\, 80° = 0{,}9848$ daher die gesuchte Sprungweite

$$W = 1{,}319 \,.\, 36 \,.\, 0{,}9848 = 46{,}76 \text{ Fuß}.$$

2. Beispiel. Bei dem Gußrohr einer Feuerspritze, beträgt die Geschwindigkeit des Wassers in der Mündung 60 Fuß; welche Höhe wird der vertikal aufwärtssteigende Strahl erreichen, und wie viel wird die größte Sprungweite betragen?

$$c = 60, \text{ daher}$$

wenn die Gußröhre als eine kurze Ansatzröhre angesehen werden kann, die Strahlhöhe (162. §.)

$$z = 0{,}016 \,.\, 60^2 = 57{,}6 \text{ Fuß}$$

und weil für die größte Sprungweite $W = 2z$ ist, so findet man

$$W = 115{,}2 \text{ Fuß}.$$

und für eine kurze Ansatzröhre

$$W = 0{,}032 \cdot 41{,}23\, h \, \mathrm{Sin}\, 2\beta$$
$$= 1{,}319\, h \, \mathrm{Sin}\, \alpha.$$

Noch ergiebt sich aus 27. §.

daß die Sprungweiten unter übrigens gleichen Umständen einander gleich sind, wenn sich die Neigungswinkel der Axen der Sprungöfnungen gegen den Horizont zu 90 Grad ergänzen.

Auch folgt aus 28. §.

daß die größte Sprungweite, unter übrigens gleichen Umständen, einem Neigungswinkel von 45 Grad entspricht;

ferner:

daß die größte Sprungweite doppelt so groß ist als die vertikale Strahlhöhe, wenn der Strahl grade aufwärts gerichtet ist,

und endlich:

daß die größte Sprungweite viermal so groß ist, als die lothrechte Höhe vom Scheitel des Strahls, bis zum Horizont.

1. Beispiel. In der Wand eines Behälters ist eine kurze Ansatzröhre unter einem Winkel von 40 Grad gegen den Horizont geneigt; wie groß wird die Sprungweite auf dem Horizonte der Oefnung seyn, wenn über derselben 36 Fuß Druckwasser stehet?

$h = 36$, $\mathrm{Sin}\, 2\beta = \mathrm{Sin}\, 80° = 0{,}9848$ daher die gesuchte Sprungweite

$$W = 1{,}319 \cdot 36 \cdot 0{,}9848 = 46{,}76 \text{ Fuß}.$$

2. Beispiel. Bei dem Gußrohr einer Feuerspritze, beträgt die Geschwindigkeit des Wassers in der Mündung 60 Fuß; welche Höhe wird der vertikal aufwärtssteigende Strahl erreichen, und wie viel wird die größte Sprungweite betragen?

$$c = 60, \text{ daher}$$

wenn die Gußröhre als eine kurze Ansatzröhre angesehen werden kann, die Strahlhöhe (162. §.)

$$z = 0{,}016 \cdot 60^2 = 57{,}6 \text{ Fuß}$$

und weil für die größte Sprungweite $W = 2z$ ist, so findet man

$$W = 115{,}2 \text{ Fuß}.$$

und für eine kurze Ansatzröhre

$$W = 0{,}032 \,.\, 41{,}23\, h \,\text{Sin}\, 2\beta$$
$$= 1{,}319\, h \,\text{Sin}\, \alpha.$$

Noch ergiebt sich aus 27. §.

daß die Sprungweiten unter übrigens gleichen Umständen einander gleich sind, wenn sich die Neigungswinkel der Axen der Sprungöfnungen gegen den Horizont zu 90 Grad ergänzen.

Auch folgt aus 28. §.

daß die größte Sprungweite, unter übrigens gleichen Umständen, einem Neigungswinkel von 45 Grad entspricht;

ferner:

daß die größte Sprungweite doppelt so groß ist als die vertikale Strahlhöhe, wenn der Strahl grade aufwärts gerichtet ist,

und endlich:

daß die größte Sprungweite viermal so groß ist, als die lothrechte Höhe vom Scheitel des Strahls, bis zum Horizont.

1. Beispiel. In der Wand eines Behälters ist eine kurze Ansatzröhre unter einem Winkel von 40 Grad gegen den Horizont geneigt; wie groß wird die Sprungweite auf dem Horizonte der Oefnung seyn, wenn über derselben 36 Fuß Druckwasser stehet?

$h = 36$, $\text{Sin}\, 2\beta = \text{Sin}\, 80° = 0{,}9848$ daher die gesuchte Sprungweite

$$W = 1{,}319 \,.\, 36 \,.\, 0{,}9848 = 46{,}76 \text{ Fuß.}$$

2. Beispiel. Bei dem Gußrohr einer Feuerspritze, beträgt die Geschwindigkeit des Wassers in der Mündung 60 Fuß; welche Höhe wird der vertikal aufwärtssteigende Strahl erreichen, und wie viel wird die größte Sprungweite betragen?

$$c = 60, \text{ daher}$$

wenn die Gußröhre als eine kurze Ansatzröhre angesehen werden kann, die Strahlhöhe (162. §.)

$$z = 0{,}016 \cdot 60^2 = 57{,}6 \text{ Fuß}$$

und weil für die größte Sprungweite $W = 2z$ ist, so findet man

$$W = 115{,}2 \text{ Fuß.}$$

Eilftes Kapitel.

Vom Stoße oder hydraulischen Druck de[s] Wassers.

167. §.

Wird eine Fläche von einem fließenden Wa[sser] gestoßen, so läßt sich allemal ein Gewicht ang[eben,] welches mittelst eines Fadens über einer Rolle, [die] Fläche nach entgegengesetzter Richtung des ström[en-]den Wassers ziehen kann, und solche in Ruhe er[-]hält oder mit dem fortwährenden Stoße des Wa[s-]sers, welcher hier als hydraulischer Druck angeseh[en] werden kann, im Gleichgewichte ist. Wenn die[ses] Gewicht in Pfunden ausgedrückt wird, so sa[gt] man der Wasserstoß betrage eben so viele Pfund[e.]

In Absicht des Körpers welcher vom Wass[er] gestoßen wird, kann man den graden oder senk[-]rechten und den schiefen Stoß gegen eine Ebene, außerdem aber noch den Stoß gegen Körper von verschiedentlich geformten Oberfläche[n] unterscheiden, wobei in Beziehung auf das an[flie-]ßende Wasser folgende Fälle zu bemerken sind:

I. Der Stoß isolirter Strahlen,

wenn der Wasserstrahl von allen Seiten mit freier Luft umgeben ist, indem er ge[-]gen die Fläche stößt.

II. Der Stoß im unbegrenzten Wasser,

wobei das Wasser zwar in einem Bett[e] eingeschlossen ist, die gestoßene Fläche abe[r] in Bezug auf den Querschnitt des Wasser[s] nur sehr klein angenommen wird.

Der Stoß im begrenzten Wasser oder in Gerinnen,

wenn sich zwischen der gestoßenen Fläche und den Wänden des Kanals oder Gerinnes, worin sich das Wasser bewegt, nur ein geringer Zwischenraum befindet.

So einfach und leicht die Lehre vom Stoße Körper ist, so vielen kaum übersteiglichen wierigkeiten ist die Theorie vom Stoße flüssi- Massen unterworfen, und wenn schon bei der :gung des Wassers keine ganz zureichende Re- te erhalten wurden, so läßt sich dies um so zer bei dem Stoße des Wassers erwarten. folgenden Untersuchungen müssen daher auch als Annäherungen betrachtet werden, welche nicht zu weit von der Erfahrung entfernen.

168. §.

)ie bewegende Kraft P theile der Masse Q :r Zeit t die Geschwindigkeit c mit, so ist §. IX.) die Kraft

$$P = \frac{c}{2gt} Q \qquad I$$

den Druck bezeichnet, welchen die Masse Q einen unbeweglichen Widerstand ausübt, Q in der Zeit t die Geschwindigkeit c er- hat.

Bewegt sich Wasser mit einer Geschwindigkeit c krecht gegen eine unbewegliche Ebene, welche als Widerstand ansehen kann, und die in Sekunde gegen die Ebene strömende Wasser- e ist = M, das Gewicht von einem Kubik- Wasser = γ *), so ist das Gewicht dieser M γ

*) Nach meinen angestellten Versuchen wiegt der rhein- che oder brandenburgische Kubikfuß destillirtes W

Eilftes Kapitel.

Vom Stoße oder hydraulischen Druck des Wassers.

167. §.

Wird eine Fläche von einem fließenden Wasser gestoßen, so läßt sich allemal ein Gewicht angeben, welches mittelst eines Fadens über einer Rolle, die Fläche nach entgegengesetzter Richtung des strömenden Wassers ziehen kann, und solche in Ruhe erhält oder mit dem fortwährenden Stoße des Wassers, welcher hier als hydraulischer Druck angesehen werden kann, im Gleichgewichte ist. Wenn dieses Gewicht in Pfunden ausgedrückt wird, so sagt man der Wasserstoß betrage eben so viele Pfunde.

In Absicht des Körpers welcher vom Wasser gestoßen wird, kann man den graden oder senkrechten und den schiefen Stoß gegen eine Ebene, außerdem aber noch den Stoß gegen Körper von verschiedentlich geformten Oberflächen unterscheiden, wobei in Beziehung auf das anstoßende Wasser folgende Fälle zu bemerken sind:

I. Der Stoß isolirter Strahlen,

wenn der Wasserstrahl von allen Seiten mit freier Luft umgeben ist, indem er gegen die Fläche stößt.

II. Der Stoß im unbegrenzten Wasser,

wobei das Wasser zwar in einem Bett eingeschlossen ist, die gestoßene Fläche aber in Bezug auf den Querschnitt des Wassers nur sehr klein angenommen wird.

Der Stoß im begrenzten Wasser oder in Gerinnen,

wenn sich zwischen der gestoßenen Fläche und den Wänden des Kanals oder Gerinnes, worin sich das Wasser bewegt, nur ein geringer Zwischenraum befindet.

So einfach und leicht die Lehre vom Stoße
er Körper ist, so vielen kaum übersteiglichen
chwierigkeiten ist die Theorie vom Stoße flüssi-
Massen unterworfen, und wenn schon bei der
wegung des Wassers keine ganz zureichende Re-
tate erhalten wurden, so läßt sich dies um so
niger bei dem Stoße des Wassers erwarten.
ie folgenden Untersuchungen müssen daher auch
r als Annäherungen betrachtet werden, welche
nicht zu weit von der Erfahrung entfernen.

168. §.

Die bewegende Kraft P theile der Masse Q
der Zeit t die Geschwindigkeit c mit, so ist
5. §. IX.) die Kraft

$$P = \frac{c}{2gt} Q$$

P den Druck bezeichnet, welchen die Masse Q
gen einen unbeweglichen Widerstand ausübt,
nn Q in der Zeit t die Geschwindigkeit c er-
igt hat.

Bewegt sich Wasser mit einer Geschwindigkeit
senkrecht gegen eine unbewegliche Ebene, welche
in als Widerstand ansehen kann, und die in
er Sekunde gegen die Ebene strömende Wasser-
nge ist = M, das Gewicht von einem Kubik-
Wasser = γ *), so ist das Gewicht dieser

*) Nach meinen angestellten Versuchen wiegt der rheinländische oder brandenburgische Kubikfuß destillirtes Wasser

Wassermenge $= M\gamma$. Nun kann man sich vorstellen, daß die stoßende Wassermasse in irgend einem Zeittheilchen t' ihre Geschwindigkeit c erhalten habe, alsdenn ist das Gewicht der Wassermenge die in jedem Zeittheilchen t' zum Stoße gelangt $= t'M\gamma$. Bezeichnet daher P den hydrau-
P lischen Druck, welchen die Masse $t'M\gamma = Q$ gegen einen ruhenden Widerstand ausübt, so ist $t' = t$ also $P = \frac{c}{2gt'} t'M\gamma$, und man findet den hydraulischen Druck oder Stoß des Wassers gegen eine unbewegliche Fläche

$$P = \frac{c}{2g} M\gamma$$

vorausgesetzt, daß sämmtliche Wassertheile die Fläche treffen.

Hienach hängt der Stoß des Wassers ab:

I. von der Wassermenge welche in jeder Sekunde gegen die Fläche stößt, und

II. von der Geschwindigkeit mit welcher das Wasser die Fläche trift.

f Bezeichnet man ferner durch f den Flächeninhalt vom Querschnitte des anschlagenden Wassers,
h bei ungeschwächter Geschwindigkeit c, und durch h die Fallhöhe welche der Geschwindigkeit c zugehört, so ist $M = fc$ und $c^2 = 4gh$ (16. §.) daher der Stoß gegen eine unbewegliche Fläche oder

$$P = \frac{c^2}{2g} f\gamma \text{ oder auch}$$
$$= 2hf\gamma.$$

---

bei einer Temperatur von 14° Reaumur 66,0656 Pfund cöllnisches Markgewicht oder 65,9368 Pfund berliner Handelsgewicht, wofür man in der Ausübung 66 Pfund annehmen kann.

M. s. meine angeführte Vergleichung der in den Kgl. Preuß. Staaten eingeführten Maaße und Gewichte. S. 27.

Hieraus folgt, daß sich bei gleichen Querschnitten er anstoßenden Wasserstrahlen, die senkrechten Stöße des Wassers, wie die Quadrate er Geschwindigkeiten, oder wie die, den Geschwindigkeiten zugehörige Höhen ver-alten.

169. §.

Der senkrechte Stoß des Wassers gegen eine ewegte Ebene, oder der relative Stoß ird sich auf eine ähnliche Art bestimmen lassen, eil es darauf ankommt, wie viel Wasser in je-r Sekunde anschlägt, und mit welcher Geschwin-gkeit das Wasser die Fläche trift. Bewegt sich as Wasser mit der Geschwindigkeit c und die läche, deren Inhalt dem Querschnitte f des an-oßenden Wassers gleich ist, mit der Geschwindig-it v nach eben derselben Richtung, und es ist $> v$, so kann nicht die gesammte Wassermenge $= c.f$ zum Stoße gelangen, weil indem die läche in einer Sekunde um den Weg v weiter ht, das mit der Geschwindigkeit c nachfolgende Wasser c.f um den Weg v zurückbleibt, also ur die Wassermenge $(c-v) f$ zum Stoße ge-ngt. Jedes Wassertheilchen welches die Ebene reicht, wirkt mit der Geschwindigkeit $c - v$ in ieselbe, es ist daher der relative Stoß

$$\text{I.} \quad P = \frac{c-v}{2g}(c-v) f\gamma$$

$$= \frac{(c-v)^2}{2g} f\gamma$$

Könnte man annehmen, daß sämmtliche Was-rtheile des Zuflusses M zum Stoße gelangen, elches der Fall wäre, wenn die Fläche f jeden ugenblick durch eine andere ersetzt würde, so daß in Wassertheilchen ohne zu stoßen fort-ießen könnte, wie dieses nahe genug bei engge-

Wassermenge $= M\gamma$. Nun kann man sich v
stellen, daß die stoßende Wassermasse in irgend
nem Zeittheilchen t' ihre Geschwindigkeit c erl
ten habe, alsdenn ist das Gewicht der Wa
menge die in jedem Zeittheilchen t' zum Stoße
P langt $= t'M\gamma$. Bezeichnet daher P den hyd
lischen Druck, welchen die Masse $t'M\gamma = Q$
gen einen ruhenden Widerstand ausübt, so
$t' = t$ also $P = \frac{c}{2gt'} t'M\gamma$, und man findet
**hydraulischen Druck oder Stoß des W
sers gegen eine unbewegliche Fläche**

$$P = \frac{c}{2g} M\gamma$$

vorausgesetzt, daß sämmtliche Wassertheile die F
che treffen.

Hienach hängt der Stoß des Wassers ab

I. von der **Wassermenge** welche in jeder
kunde gegen die Fläche stößt, und

II. von der **Geschwindigkeit** mit welcher
Wasser die Fläche trift.

f Bezeichnet man ferner durch f den Fläche
halt vom Querschnitte des anschlagenden Was
h bei ungeschwächter Geschwindigkeit c, und dur
die Fallhöhe welche der Geschwindigkeit c z
hört, so ist $M = fc$ und $c^2 = 4gh$ (16.
daher der **Stoß gegen eine unbewegl
Fläche** oder

$$P = \frac{c^2}{2g} f\gamma \text{ oder auch}$$
$$= 2hf\gamma.$$

---

bei einer Temperatur von 14° Reaumur 66,0656 P
cöllnisches Markgewicht oder 65,9368 Pfund ber
Handelsgewicht, wofür man in der Ausübung 66 P
annehmen kann.

M. s. meine angeführte Vergleichung der in den
Preuß. Staaten eingeführten Maaße und Gewichte. S

aus folgt, daß sich bei gleichen Querschnitten anstoßenden Wasserstrahlen, die senkrechten ße des Wassers, wie die Quadrate Geschwindigkeiten, oder wie die, den chwindigkeiten zugehörige Höhen ver- t.

169. §.

)er senkrechte Stoß des Wassers gegen eine :gte Ebene, oder der relative Stoß sich auf eine ähnliche Art bestimmen lassen, es darauf ankommt, wie viel Wasser in je- 5ekunde anschlägt, und mit welcher Geschwin- t das Wasser die Fläche trift. Bewegt sich Wasser mit der Geschwindigkeit c und die e, deren Inhalt dem Querschnitte f des an- den Wassers gleich ist, mit der Geschwindig- r nach eben derselben Richtung, und es ist v r, so kann nicht die gesammte Wassermenge c.f zum Stoße gelangen, weil indem die e in einer Sekunde um den Weg v weiter das mit der Geschwindigkeit c nachfolgende ser c.f um den Weg v zurückbleibt, also die Wassermenge $(c-v)f$ zum Stoße ge- . Jedes Wassertheilchen welches die Ebene ?t, wirkt mit der Geschwindigkeit $c-v$ in)e, es ist daher der relative Stoß

$$\text{I.} \quad P = \frac{c-v}{2g}(c-v)f\gamma$$

$$= \frac{(c-v)^2}{2g} f\gamma$$

:önnte man annehmen, daß sämmtliche Was- ile des Zuflusses M zum Stoße gelangen, :s der Fall wäre, wenn die Fläche f jeden nblick durch eine andere ersetzt würde, so daß Wassertheilchen ohne zu stoßen fort- t könnte, wie dieses nahe genug bei engge-

schaufelten unterschlächtigen Rädern der Fall ist, so wäre die in jeder Sekunde anschlagende Wassermenge = M = cf. Die Geschwindigkeit mit welcher jedes Wassertheilchen in die Fläche wirkt, bleibt = c − v, daher ist unter der obigen Voraussetzung, der relative Stoß

$$\text{II.} \quad P = \frac{c-v}{2g} cf\gamma$$

$$= \frac{c-v}{2g} M\gamma.$$

Anmerk. Der Ausdruck I. kommt mit der von Parent gegebenen Theorie vom Stoße des Wassers überein. Man s. dessen Abhandlung:

Sur la plus grande perfection possible des machines, par M. *Parent*. Mémoires de l'academie de Paris, année 1704. Ed. Bat. p. 433.

Aehnliche Resultate wie die im zuletzt gefundenen Ausdruck für den relativen Stoß, findet man in nachstehenden Schriften:

Sur les roues hydrauliques, par M. le Chevalier de *Borda*. Mémoires de l'acad. de Paris, année 1767. Paris 1770.

Theorie des Wasserstoßes in Schußgerinnen, mit Rücksicht auf Erfahrung und Anwendung, von Professor Gerstner. Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 2ter Bd. Prag 1795 S. 179 u. f.

Mathematical and Philosophical Dictionary, by Ch. *Hutton*. London 1795. Art. Mill. p. 110.

Langsdorf, angeführte Maschinenlehre. 1ter Band 12. Kap. S. 119 u. f.

170. §.

Stößt ein isolirter Strahl gegen eine unbewegliche Ebene senkrecht, und das Wasser kann sich auf derselben hinlänglich ausbreiten, dann

kein Wassertheilchen ohne zu stoßen abfließen kann, so werden alle Bedingungen welche dem allgemeinen Ausdrucke (168. §.) zum Grunde liegen erfüllt, daher läßt sich auch für den Stoß isolirter Strahlen, der hydraulische Druck

$$P = \frac{c}{2g} M\gamma = 2hf\gamma$$

annehmen.

Die sorgfältigen Versuche der Herren Bossut Hydrod. 2. Bd. 830. §.) und Langsdorf (Lehrbuch der Hyd. 204. §.) geben eben dieses Resultat, wobei vorausgesetzt ist, daß der Durchmesser der gestoßenen Fläche wenigstens viermal so groß als der Durchmesser des isolirten Strahls ist.

Ist hingegen die gestoßene Fläche kleiner, so daß nicht sämmtliches Wasser zum Stoße gelangt, so kann auch die Formel (168. §.) keine Anwendung finden. Aus Hrn. Langsdorf's Versuchen folgt, daß wenn die gestoßene Fläche dem Querschnitte des Strahls vor seiner Ausbreitung gleich ist, so wird der Stoß nur halb so groß, wie bei einer hinlänglich großen Fläche, also

$$P = fh\gamma.$$

171. §.

Setzt man bei dem senkrechten Stoße des unbegrenzten Wassers gegen eine Ebene, den Inhalt derselben = f, so ist ebenfalls der Querschnitt des auf die Ebene zuströmenden Wassers = f. Weil aber von diesem Wasser nicht alle Theile desselben zum Stoße gelangen, da sich in einer gewissen Entfernung vor der Fläche, die Wasserfäden von ihrer vorigen Richtung ablenken. so
der Stoß geringer als nach dem
rucke (168. §.) gefunden wer
och, daß wegen der Wirk
er Fläche, ein besonderer

schaufelten unterschlächtigen Rädern der Fall ist, so wäre die in jeder Sekunde anschlagende Wassermenge $= M = cf$. Die Geschwindigkeit mit welcher jedes Wassertheilchen in die Fläche wirkt, bleibt $= c - v$, daher ist unter der obigen Voraussetzung, der relative Stoß

$$\text{II.} \quad P = \frac{c-v}{2g} cf\gamma$$

$$= \frac{c-v}{2g} M\gamma.$$

Anmerk. Der Ausdruck I. kommt mit der von Parent gegebenen Theorie vom Stoße des Wassers überein. Man s. dessen Abhandlung:

Sur la plus grande perfection possible des machines, par M. *Parent*. Mémoires de l'academie de Paris, année 1704. Ed. Bat. p. 433.

Aehnliche Resultate wie die im zuletzt gefundenen Ausdruck für den relativen Stoß, findet man in nachstehenden Schriften:

Sur les roues hydrauliques, par M. le Chevalier de *Borda*. Mémoires de l'acad. de Paris, année 1767. Paris 1770.

Theorie des Wasserstoßes in Schußgerinnen, mit Rücksicht auf Erfahrung und Anwendung, von Professor Gerstner. Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 2ter Bd. Prag 1795. S. 179 u. f.

Mathematical and Philosophical Dictionary, by Ch. *Hutton*. London 1795. Art. Mill. p. 110.

Langsdorf, angeführte Maschinenlehre. 1ter Band. 12. Kap. S. 119 u. f.

170. §.

Stößt ein isolirter Strahl gegen eine unbewegliche Ebene senkrecht, und das Wasser kann sich auf derselben hinlänglich ausbreiten, damit

in Wassertheilchen ohne zu stoßen abfließen kann, s werden alle Bedingungen welche dem allgemei- nen Ausdrucke (168. §.) zum Grunde liegen erfüllt, aher läßt sich auch für den Stoß isolirter Strah- n, der hydraulische Druck

$$P = \frac{c}{2g} M\gamma = 2hf\gamma$$

nehmen.

Die sorgfältigen Versuche der Herren Bossut ydrod. 2. Bd. 830. §.) und Langsdorf (Lehr- ch der Hyd. 204. §.) geben eben dieses Resul- , wobei vorausgesetzt ist, daß der Durchmesser gestoßenen Fläche wenigstens viermal so groß der Durchmesser des isolirten Strahls ist.

Ist hingegen die gestoßene Fläche kleiner, so daß ht sämmtliches Wasser zum Stoße gelangt, so un auch die Formel (168. §.) keine Anwendung den. Aus Hrn. Langsdorf's Versuchen folgt, ß wenn die gestoßene Fläche dem Querschnitte Strahls vor seiner Ausbreitung gleich ist, so rd der Stoß nur halb so groß, wie bei einer länglich großen Fläche, also

$$P = fh\gamma.$$

171. §.

Setzt man bei dem senkrechten Stoße des un- grenzten Wassers gegen eine Ebene, den In- lt derselben $= f$, so ist ebenfalls der Querschnitt auf die Ebene zuströmenden Wassers $= f$. Weil aber von diesem Wasser nicht alle Theile selben zum Stoße gelangen, da sich in einer ge- ssen Entfernung vor der Fläche, die Wasserfä- n von ihrer vorigen Richtung ablenken, so muß Stoß geringer als nach dem allgemeinen Aus- ucke (168. §.) gefunden werden. Hiezu kommt ch, daß wegen der Wirkung auf das Hintertheil Fläche, ein besonderer Effekt entstehet der nicht

in Rechnung gebracht ist; es bleibt daher nich
übrig als diejenigen Resultate anzunehmen, welch
aus den besten hieher gehörigen Versuchen gezogen
sind.

Die Herren Bossut, d'Alembert und Con
dorcet haben über den Stoß im unbegrenzte
Wasser sehr vielfältige Versuche *) angestellt, un
ziehen daraus die Regel (Chap. V. p. 173) da
der senkrechte Stoß, sehr nahe dem Gewichte ein
Wassersäule gleich sei, welche die gestoßene Fläch
zur Grundfläche, und die der Geschwindigkeit zu
gehörige Höhe, zur Höhe habe; man findet dah
den senkrechten Stoß gegen eine unbeweg
liche Fläche im unbegrenzten Wasser oder

$$P = hf\gamma = \frac{c^2}{4g} f\gamma = \frac{c}{4g} M\gamma.$$

welches halb so viel ist, als nach dem 168. §.

Zur Bestimmung des relativen Stoßes im
unbegrenzten Wasser, lassen sich die allgemeinen
Ausdrücke im 169. §. mit den erforderlichen Ab
änderungen anwenden.

172. §.

Bei dem Stoße im begrenzten Wasser
oder in Gerinnen, wo sich zwischen der gestoße
nen Fläche und den Wänden des Gerinnes, so wei
es mit Wasser angefüllt ist, nur ein geringer Zwi
schenraum befindet, muß nothwendig die Stoßfläch
eine gewisse Geschwindigkeit haben, und nebst de

---

*) Nouvelles expériences sur la Résistance des flui
des. Par M.M. d'*Alembert*, le Marquis de *Condor
cet* et l'Abbé *Bossut*. (M. Bossut, Rapporteur.)
Paris 1777.

Von diesen Versuchen befindet sich ein Auszug i
zweiten Bande der Bossut'schen Hydrodynamik.

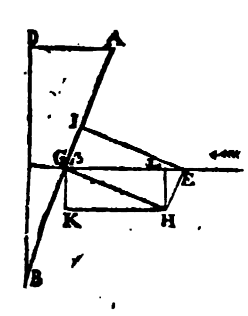
Seitenwänden des Gerinnes höher als der Querschnitt des zuströmenden Wassers seyn, wenn alle vor der Stoßfläche anlangende Wassertheile, zum Stoße gelangen sollen.

Herr Bossut folgert aus den im vorigen §. angeführten Versuchen, so weit solche in einem engen Kanal angestellt sind (Hydrodyn. 2. Band 52. §.), daß der senkrechte Stoß gegen die Schaufeln eines unterschlächtigen Wasserrades in einem Schußgerinne, beinahe doppelt so groß als die Gewalt ist, welche die Schaufelfläche eben so tief unter Wasser gesetzt, in einem unbegrenzten Strome leiden würde.

Hienach wird es leicht seyn, den Umständen gemäß, von den allgemeinen Ausdrücken im 169. §. Gebrauch zu machen.

173. §.

Eine Fläche AB sei gegen die Richtung eines einzelnen anstoßenden Wasserfadens EG unter dem Einfallswinkel EGA = β geneigt; ist nun P die Kraft mit welcher das Wasser eine Ebene BD, welche senkrecht auf der Richtung EG desselben stehet, stoßen würde, so kann daraus der Normalstoß Q senkrecht auf die schiefe Ebene AB bestimmt werden.



Man nehme GE = P, zeichne das Rechteck GHEI, so ist nach dem Parallelogramm der Kräfte wenn EG in die Seitenkräfte EH und EI = GH zerlegt wird, GH = Q. Aber

$$GH = GE \operatorname{Sin} \beta$$

daher der Normalstoß

$$Q = P \operatorname{Sin} \beta.$$

in Rechnung gebracht ist; es bleibt daher nichts übrig als diejenigen Resultate anzunehmen, welche aus den besten hieher gehörigen Versuchen gezogen sind.

Die Herren Bossut, d'Alembert und Condorcet haben über den Stoß im unbegrenzten Wasser sehr vielfältige Versuche *) angestellt, und ziehen daraus die Regel (Chap. V. p. 173) daß der senkrechte Stoß, sehr nahe dem Gewichte einer Wassersäule gleich sei, welche die gestoßene Fläche zur Grundfläche, und die der Geschwindigkeit zugehörige Höhe, zur Höhe habe; man findet daher den senkrechten Stoß gegen eine unbewegliche Fläche im unbegrenzten Wasser oder

$$P = hf\gamma = \frac{c^2}{4g}f\gamma = \frac{c}{4g}M\gamma.$$

welches halb so viel ist, als nach dem 168. §.

Zur Bestimmung des relativen Stoßes im unbegrenzten Wasser, lassen sich die allgemeinen Ausdrücke im 169. §. mit den erforderlichen Abänderungen anwenden.

172. §.

Bei dem Stoße im begrenzten Wasser oder in Gerinnen, wo sich zwischen der gestoßenen Fläche und den Wänden des Gerinnes, so weit es mit Wasser angefüllt ist, nur ein geringer Zwischenraum befindet, muß nothwendig die Stoßfläche eine gewisse Geschwindigkeit haben, und nebst den

---

*) Nouvelles expériences sur la Résistance des fluides. Par M.M. d'*Alembert*, le Marquis de *Condorcet* et l'Abbé *Bossut*. (M. Bossut, Rapporteur.) à Paris 1777.

Von diesen Versuchen befindet sich ein Auszug im zweiten Bande der Bossut'schen Hydrodynamik.

wänden des Gerinnes höher als der Quer- des zuströmenden Wassers seyn, wenn alle Stoßfläche anlangende Wassertheile, zum gelangen sollen.

r Bossut folgert aus den im vorigen §. rten Versuchen, so weit solche in einem Kanal angestellt sind (Hydrodyn. 2. Band), daß der senkrechte Stoß gegen die Schau- ies unterschlächtigen Wasserrades in einem jerinne, beinahe doppelt so groß als die ist, welche die Schaufelfläche eben so tief Wasser gesetzt, in einem unbegrenzten Strome würde.

nach wird es leicht seyn, den Umständen ge- on den allgemeinen Ausdrücken im 169. §. ich zu machen.

173. §.

e Fläche AB sei gegen die Richtung eines einzelnen anstoßenden Wasserfadens EG unter dem Einfallswinkel EGA = β geneigt; ist nun P die Kraft mit welcher das Wasser eine Ebene BD, welche senkrecht auf der Richtung EG desselben stehet, stoßen würde, so kann daraus der Normalstoß Q senkrecht auf die schiefe Ebene AB bestimmt werden.

n nehme GE = P, zeichne das Rechteck so ist nach dem Parallelogramm der Kräfte G in die Seitenkräfte EH und EI = GH wird, GH = Q. Aber

$$GH = GE \operatorname{Sin} \beta$$

er Normalstoß

$$Q = P \operatorname{Sin} \beta.$$

Die Kraft EH = P Cos β, parallel mit Ebene, kann in Absicht des Stoßes nichts wi und geht verloren.

Aus der Kraft welche von dem anstoße Wasser, als Stoß gegen die Ebene AB verw wird, läßt sich durch Zerlegung in die Seitenkr sowohl der Seitenstoß Q′ nach der Rich KG, senkrecht auf EG, als auch der Para stoß Q″ nach der Richtung EG des anstoße Wassers finden, wenn das Rechteck HLGK zeichnet wird. Hienach wird Q′ durch KG, Q″ durch LG vorgestellt, und es ist

$$KG = GH \text{ Cos } \beta \text{ daher}$$

der Seitenstoß

$$Q' = P \text{ Sin } \beta \text{ Cos } \beta$$

Ferner ist

$$LG = GH \text{ Sin } \beta \text{ daher}$$

der Parallelstoß

$$Q'' = P \text{ Sin } \beta^2.$$

Setzt man daß die Fläche BD, die Projek der ganzen schiefen Fläche AB ist und nimmt daß der Querschnitt des anstoßenden Wassers Projektion BD gleich sei, so gelten noch die gen Schlüsse und man findet hienach den S gegen eine schiefe Ebene nach der Richt des anstoßenden Wassers oder den Parallels wenn der senkrechte Stoß auf ihre Pro tion, mit dem Quadrate vom Sinus Einfallswinkel multiplizirt wird.

Auch folgt hieraus ferner, daß sich die rallelstöße gegen verschiedene schiefe E nen von einerlei Projektion, wie die Q drate der Sinusse ihrer Einfallswin verhalten.

174. §.

Wie weit die vorhergehenden allgemeinen Sätze
nit der Erfahrung übereinstimmen, kann nur nach
chtigen Versuchen genau ausgemittelt werden. So
el läßt sich einsehen, daß weil beim unbegrenzten
Jasserstoß nicht alle Wassertheile zum Stoße ge-
igen, und schon in einer Entfernung von der
iefen Ebene nach mancherlei Richtungen abflie-
t, ohne die Ebene unter einem bestimmten Nei-
ngswinkel zu treffen, auch hier keine Überein-
mmung zu erwarten ist. Dahingegen stimmt bei
n Stoße isolirter Strahlen die Erfah-
ng sehr genau mit den Resultaten des vorigen §.
erein, wie man sich aus den vortrefflichen Ver-
hen des Herrn Langsdorf überzeugen kann.

Anmerkung. Diese Versuche, wovon 79 in Absicht des senkrechten Stoßes, und 66 zur Ausmittelung des schiefen Stoßes isolirter Strahlen angestellt sind, findet man im vierzehnten Kapitel von Hrn. Langsdorf Lehrbuch der Hydraulik beschrieben. Um die schöne Uebereinstimmung der Theorie mit diesen Erfahrungen zu übersehen, sind ohne Auswahl nachstehende sieben Versuche die mit 2 Zoll weiten Ausflußöfnungen unter beinahe gleichen Druckhöhen angestellt sind, hier angeführt und mit der Theorie verglichen.

N. der Versuche.	Wasserhöhe in pariser		Größe des Einfallswinkels.		Beobachteter Wasserstoß in nürnberger Pfund.	Verhältniß des beobachteten Wasserstoßes.	Verhältniß des Wasserstoßes nach der Theorie.
	Zoll.	Lin.	Grad	Min.			
1	39	1	90		6,3250	1,000	1,000
2	39	1	70	16	5,6700	0,896	0,885
3	39	2	60	16	4,5583	0,721	0,753
4	39	5	50	46	3,3933	0,536	0,599
5	39	5	39	46	2,5450	0,402	0,408
6	39	1	30	16	1,8685	0,295	0,254
7	39	1	26	16	1,1500	0,182	0,195

175. §.

Es ist schon angeführt, weshalb bei dem schiefen Stoße des unbegrenzten Wassers keine Übereinstimmung zwischen 173. §. und der Erfahrung zu erwarten ist, und es fehlt bis jetzt noch an einer vollständigen Theorie hierüber. Die zu diesem Ende von den Herren Bossut, d'Alembert und Condorcet angestellten Versuche beweisen hinlänglich, daß ein ganz anderes Verhältniß als das vom Quadrate des Sinus des Einfallswinkels Statt findet, wie man sich aus der von Herrn Bossut (Hydrod. 2. B. 991. §.) nach den Versuchen berechneten Tafel, welche die Verhältnisse des Widerstandes für verschiedene Einfallswinkel angiebt, überzeugen kann. Eine bessere Übereinstimmung mit diesen Versuchen, giebt die Voraussetzung, daß sich die Parallelstöße, wie die simplen Sinusse der Einfallswinkel verhalten, obgleich bei kleinen Winkeln, beträchtliche Abweichungen entstehen.

Bis Theorie und Erfahrung hierüber mehr Aufklärung geben, kann man zu Folge der angeführten Versuche den Parallelstoß

Q" =

$$Q'' = [\mathrm{Sin}\,\beta^2 + (1 - \mathrm{Sin}\,\beta)\; 0{,}4]\; P$$

annehmen, ohne sich auf weitläuftige Formeln ein= zulassen, die sich doch auch nur auf ein Tatonne= ment gründen.

Anmerk. Nachstehende Tafel enthält in der zweiten Spalte, die von Herrn Bossut aus den Versuchen gezogenen Verhältnisse, für den schiefen Stoß bei einerlei Projektion und Geschwindigkeit, wenn der senkrechte Stoß auf die Projektion = 10000 gesetzt wird. In der dritten Spalte sind die Parallelstöße unter der Voraussetzung berechnet, daß sich dieselben wie die Quadrate von den Sinussen der Einfallswinkel verhalten, und in der letzten ist die obige Formel zum Grunde gelegt.

Einfallswinkel. Grade.	Verhältniß des Parallelstoßes nach der Erfahrung.	Verhältniß nach den □□ der Sinus der Einfallswinkel.	Verhältniß nach obiger Formel.
90	10000	10000	10000
84	9893	9890	9912
78	9578	9568	9655
72	9084	9045	9241
66	8446	8346	8710
60	7710	7500	8036
54	6925	6545	7309
48	6148	5523	6550
42	5431	4478	5801
36	4800	3455	5104
30	4404	2500	4500
24	4240	1654	4027
18	4142	955	3719
12	4063	432	3600
6	3999	109	3691

N. der Versuche.	Wasserhöhe in pariser		Größe des Einfallswinkels.		Beobachteter Wasserstoß in nürnberger Pfund.	Verhältniß des beobachteten Wasserstoßes.	Verhältniß des Wasserstoßes nach der Theorie.
	Zoll.	Lin.	Grad	Min.			
1	39	1	90		6,3250	1,000	1,000
2	39	1	70	16	5,6700	0,896	0,885
3	39	2	60	16	4,5583	0,721	0,753
4	39	6	50	46	3,3933	0,536	0,599
5	39	5	39	46	2,5450	0,402	0,408
6	39	1	30	16	1,8685	0,295	0,254
7	39	1	26	16	1,1500	0,182	0,195

175. §.

Es ist schon angeführt, weshalb bei dem schiefen Stoße des unbegrenzten Wassers keine Übereinstimmung zwischen 173. §. und der Erfahrung zu erwarten ist, und es fehlt bis jetzt noch an einer vollständigen Theorie hierüber. Die zu diesem Ende von den Herren Bossut, d'Alembert und Condorcet angestellten Versuche beweisen hinlänglich, daß ein ganz anderes Verhältniß als das vom Quadrate des Sinus des Einfallswinkels Statt findet, wie man sich aus der von Herrn Bossut (Hydrod. 2. B. 991. §.) nach den Versuchen berechneten Tafel, welche die Verhältnisse des Widerstandes für verschiedene Einfallswinkel angiebt, überzeugen kann. Eine bessere Übereinstimmung mit diesen Versuchen, giebt die Voraussetzung, daß sich die Parallelstöße, wie die simplen Sinusse der Einfallswinkel verhalten, obgleich bei kleinen Winkeln, beträchtliche Abweichungen entstehen.

Bis Theorie und Erfahrung hierüber mehr Aufklärung geben, kann man zu Folge der angeführten Versuche den Parallelstoß

$Q'' =$

$$Q'' = [\sin \beta^2 + (1 - \sin \beta)\, 0{,}4]\, P$$

annehmen, ohne sich auf weitläuftige Formeln ein-zulassen, die sich doch auch nur auf ein Tatonne-ment gründen.

Anmerk. Nachstehende Tafel enthält in der zweiten Spalte, die von Herrn Bossut aus den Versuchen gezogenen Verhältnisse, für den schiefen Stoß bei einerlei Projektion und Geschwindigkeit, wenn der senkrechte Stoß auf die Projektion = 10000 gesetzt wird. In der dritten Spalte sind die Parallelstöße unter der Voraussetzung berechnet, daß sich dieselben wie die Quadrate von den Sinussen der Einfallswinkel verhalten, und in der letzten ist die obige Formel zum Grunde gelegt.

Einfallswinkel. Grade.	Verhältniß des Parallelstoßes nach der Erfahrung.	Verhältniß nach den □□ der Sinus der Einfallswinkel.	Verhältniß nach obiger Formel.
90	10000	10000	10000
84	9893	9890	9912
78	9578	9568	9655
72	9084	9045	9241
66	8446	8346	8710
60	7710	7500	8036
54	6925	6545	7309
48	6148	5523	6550
42	5433	4478	5801
36	4800	3455	5104
30	4404	2500	4500
24	4240	1654	4027
18	4142	955	3719
12	4063	432	3600
6	3999	109	3691

In der letzten Spalte fangen zwar die Zahlen zu wachsen an, wenn $\beta = 11^\circ\ 33'$ wird, so daß man für $\beta = 0$ endlich 0,4 erhält, daher dieser Ausdruck auch nicht wohl auf Winkel zwischen 6 und 0 Grad angewandt werden kann. Im zweiten Theil der Nouv. Archit. Hydraulique par Prony in den Eclariss. p. 20, findet man einen weitläuftigen und schwer aufzulösenden Ausdruck für den schiefen Stoß, welcher aber ebenfalls zuletzt für kleinere Winkel größere Werthe giebt.

In Absicht der Theorie vom Stoße des Wassers ist überhaupt zu merken, daß solche noch sehr mangelhaft, und darin noch vieles zu leisten übrig ist. Im Vorhergehenden hat man sich dem Zwecke gemäß, an die einfachsten Darstellungen halten müssen, deren Resultate sich nicht zu weit von der Erfahrung entfernen, und welche keinen zu verwickelten Calcul mit sich führen. Genauere Untersuchungen erfordern aber, daß man sehr wohl unterscheide, ob sich die gestoßene Fläche gegen das Wasser, oder dieses gegen die ruhende Fläche bewegt, so wie auch die Form des hinteren Theiles vom gestoßenen Körper nicht gleichgültig ist. Nach einem größeren Umfange findet man die Theorie des Wasserstoßes in nachstehenden Schriften bearbeitet:

Examen maritime théorique et pratique, ou Traité de méchanique appliqué à la construction et à la manoeuvre des Vaissaux et autres Bâtiments. Par Don George *Juan*. Traduit de l'espagnol avec des additions, par M. Levêque. Tome I. à Nantes 1783. (Liv. II. Chap. 1—9).

Du *Buat* Principes d'Hydrauliques. Nouvelle édition, T. II. Paris 1786. III. Partie p. 131 etc.

Prony, angef. N. Archit. Hydraul. 1. Th. 1. Bd. im vierten Abschnitt. 867—955 §.

Langsdorf, Lehrbuch der Hydraulik, im vierzehnten Kapitel.

Herr Viceadmiral Chappmann hat zwar in den neuen Abhandlungen der Königl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften, 1795, 2tes Quartal, eine

Formel für den schiefen Stoß des unbegrenzten Wassers mitgetheilt, welche sich auf die von ihm angestellten Versuche gründet, ohne daß dabei auf die sehr wichtigen Bossut'schen Versuche Rücksicht genommen wäre. Der Formel selbst liegt keine Theorie zum Grunde. Auch führt Herr Chappmann an, daß der Widerstand nicht dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sei, und es wäre zu wünschen, daß im Falle die Abweichung sehr beträchtlich seyn sollte, (welches aber die bis jetzt bekannten Versuche nicht bestätigen,) Herr Chappmann die hiehergehörigen Versuche mittheilen möchte.

176. §.

Weil schon der Stoß des Wassers gegen schiefe benen so vielen Schwierigkeiten ausgesetzt und ch nicht hinlänglich berichtiget ist, so lassen sich ch keine befriedigende Resultate erwarten, wenn ese Theorie auf den Stoß runder Körper ıgewendet wird.

Anmerk. Will man als ein Beispiel den parallelen Stoß gegen die Oberfläche einer Kugel ausmitteln, so kommt es auf die dabei anzunehmende Voraussetzung an:

I. Wenn sich die Parallelstöße wie die Quadrate der Sinus der Einfallswinkel verhalten, so sei

Q der Parallelstoß auf die Halbkugel ABD in beistehender Figur,

P der senkrechte Stoß auf die Projektion ACB,

q der Parallelstoß auf das unbestimmte Stück MDN,

p der senkrechte Stoß auf dessen Projektion MLN,

$r = AC = CD$ der Halbmesser der Kugel, gegen welche das Wasser nach der Richtung DC strömt.

$x = DL$ und $y = ML$.

Nun verhält sich

Kr. Fläche MN : Kr. Fläche AB $= p : P$ oder

$\pi(2rx - x^2) : \pi r^2 = p : P$ daher ist

$$p = \frac{P}{r^2}(2rx - x^2)$$ und das Differential

$$dp = \frac{2P}{r^2}(r - x)\,dx$$

Wächst DL $= x$ um den unendlich kleinen Theil Ll $= dx$ und man zieht mn durch l mit MN parallel und Mr, No, auf mn senkrecht, so wächst ML $= y$ um mr $= dy$. Der Stoß q gegen die krumme Oberfläche MDN wächst alsdann um dq und der Stoß p gegen die Kreisfläche MLN um dp. Nur dq wirkt gegen die krumme Oberfläche MmnN und dp gegen die Fläche mron; es verhält sich daher

$$\begin{aligned} dq : dp &= (\text{Sin } mMr)^2 : r^2 \\ &= mr^2 : Mm^2 \\ &= CL^2 : CM^2 \\ &= (r - x)^2 : r^2 \end{aligned}$$ daher ist

$$dq = \frac{(r-x)^2}{r^2}\,dp$$

Aber $dp = \frac{2P}{r^2}(r - x)\,dx$ daher

$$dq = \frac{(r-x)^2}{r^2} \cdot \frac{2P}{r^2}(r - x)\,dx = \frac{2P}{r^4}(r - x)^3\,dx$$

Integrirt man diesen Ausdruck, so wird

$$q = \frac{2P}{r^4}\int (r - x)^3\,dx$$

$$q = \frac{2P}{r^4}\left[r^3 x - \tfrac{3}{2}r^2 x^2 + r x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right] + \text{Const.}$$

wo Const $= 0$ ist, weil für $x = 0$ auch $q = 0$ wird.

Für $x = r$ ist $q = Q$ daher

$$Q = \frac{2P}{r^4}\left[r^4 - \tfrac{3}{2}r^4 + r^4 - \tfrac{1}{4}r^4\right]$$ oder

$$Q = \tfrac{1}{2}P.$$

II. Setzt man, daß sich die Parallelstöße wie die Sinus der Einfallswinkel verhalten, so wird

$$dq = \frac{r-x}{r}\,dp \text{ oder}$$

$$dq = \frac{r-x}{r} \cdot \frac{2P}{r^2}(r-x)\,dx$$

$$= \frac{2P}{r^3}(r-x)^2\,dx$$

Integrirt man, so ist

$$q = \frac{2P}{r^3}\int(r-x)^2\,dx$$

$$= \frac{2P}{r^3}\left[r^2x - rx^2 + \tfrac{1}{3}x^3\right]$$

daher wie oben

$$Q = \frac{2P}{r^3}\left[r^3 - r^3 + \tfrac{1}{3}r^3\right] \text{ oder}$$

$$Q = \tfrac{2}{3}P.$$

III. Wollte man den im vorigen §. für den Parallelstoß angegebenen Ausdruck

$$dq = \left[\sin\beta^2 + 0{,}4 - 0{,}4\sin\beta\right]dp$$

annehmen, so ist hier

$$\sin\beta = \frac{r-x}{r} \text{ daher}$$

$$dq = \left[\frac{(r-x)^2}{r^2} + 0{,}4 - 0{,}4\,\frac{r-x}{r}\right]dp$$

$$= \left[r^2 - 1{,}6\,rx + x^2\right]\frac{dp}{r^2} \text{ oder}$$

$$= \left[r^2 - 1{,}6\,rx + x^2\right]\frac{2P}{r^4}(r-x)\,dx$$

$$= \frac{2P}{r^4}\left[r^3 - 2{,}6r^2x + 2{,}6rx^2 - x^3\right]dx$$

davon das Integral, giebt

$$q = \frac{2P}{r^4}\left[r^3x - 1{,}3r^2x^2 + \frac{2{,}6}{3}rx^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right]$$

und hieraus wie vorher

$$Q = \tfrac{12}{30}P.$$

Von diesen drei verschiedenen Resultaten, stimmt keines mit meinen an einem andern Orte bekannt gemachten sorgfältigen Versuchen *) über den Stoß des Wassers in einem Fluße gegen eine Kugel. Diese gaben

$$Q = 0{,}7886 \,.\, P$$

anstatt daß die vorhergehenden Ausdrücke den Stoß des Wassers gegen die Kugeloberfläche kleiner finden lassen. Es scheint überhaupt, daß so wenig wie man bis jetzt von dem senkrechten Stoße unmittelbar auf die Größe des schiefen Stoßes schließen kann, sich eben so wenig ein richtiger Schluß, von dem Stoße des Wassers gegen eine schiefe Ebene, auf den Stoß gegen eine krumme Oberfläche machen läßt. Aus dem von mir gefundenen Stoße in Vergleichung mit den Bossut'schen Versuchen geht etwa so viel hervor, daß bei gleicher Projektion, der Stoß gegen eine Halbkugel beinahe so groß sei, als der Parallelstoß gegen eine schiefe Ebene welche mit der Richtung des Wassers einen Winkel von 62 bis 63 Grad einschließt.

---

*) Versuche mit dem Stromquadranten, in Beziehung auf die Bestimmung der Geschwindigkeit der Flüsse. In der Sammlung nützlicher Aufsätze und Nachrichten, die Baukunst betreffend. Jahrgang 1799. 1. Band. Seite 53 u. f.

Zwölftes Kapitel.

Von den oberschlächtigen Wasserrädern.

177. §.

Wenn bei einem Gefälle von wenigstens 7 bis 8 Fuß, eine Maschine mittelst eines Wasserrades in Bewegung gesetzt werden soll, so bedient man sich dazu gewöhnlich eines oberschlächtigen Rades (Rota directa, *Roue à pots*), bei welchem das Wasser am Scheitel des Rades einfällt und von den am Umfange desselben befindlichen Zellen aufgefangen wird, wodurch eine Bewegung des Rades entstehet.

Die vortheilhafteste Anordnung dieser Räder zu bestimmten Zwecken, gehört in die Maschinenlehre und wird daselbst abgehandelt werden. Hier kommt es lediglich darauf an, in gegebenen Fällen die Kraft zu bestimmen, welche von dem Wasser an einem dergleichen Rade ausgeübt werden kann, weshalb auch nur so viel von der Construction dieser Räder angeführt wird, wie zur Beurtheilung ihres Effekts nöthig ist.

178. §.

An einem Rade dessen vertikaler Durchmesser AB (Fig. 1.) ist, befinde sich auf der einen Seite des Umfangs ein Theil eines Wasserringes oder ein wasserhaltender Bogen, dessen centrische Linie DFE ist, und bei welchem alle Querschnitte nach der Richtung des Mittelpunktes C einander gleich sind. Man sucht das statische Moment, oder die Taf. I. Fig. 1.

Von diesen drei verschiedenen Resultaten, stimmt keines mit meinen an einem andern Orte bekannt gemachten sorgfältigen Versuchen *) über den Stoß des Wassers in einem Fluße gegen eine Kugel. Diese gaben

$$Q = 0{,}7886 . P$$

anstatt daß die vorhergehenden Ausdrücke den Stoß des Wassers gegen die Kugeloberfläche kleiner finden lassen. Es scheint überhaupt, daß so wenig wie man bis jetzt von dem senkrechten Stoße unmittelbar auf die Größe des schiefen Stoßes schließen kann, sich eben so wenig ein richtiger Schluß, von dem Stoße des Wassers gegen eine schiefe Ebene, auf den Stoß gegen eine krumme Oberfläche machen läßt. Aus dem von mir gefundenen Stoße in Vergleichung mit den Bossut'schen Versuchen geht etwa so viel hervor, daß bei gleicher Projektion, der Stoß gegen eine Halbkugel beinahe so groß sei, als der Parallelstoß gegen eine schiefe Ebene welche mit der Richtung des Wassers einen Winkel von 62 bis 63 Grad einschließt.

---

*) Versuche mit dem Stromquadranten, in Beziehung auf die Bestimmung der Geschwindigkeit der Flüsse. In der Sammlung nützlicher Aufsätze und Nachrichten, die Baukunst betreffend. Jahrgang 1799. 1. Band. Seite 53 u. f.

Zwölftes Kapitel.

Von den oberschlächtigen Wasserrädern.

177. §.

Wenn bei einem Gefälle von wenigstens 7 bis 8 Fuß, eine Maschine mittelst eines Wasserrades in Bewegung gesetzt werden soll, so bedient man sich dazu gewöhnlich eines oberschlächtigen Rades (Rota directa, *Roue à pots*), bei welchem das Wasser am Scheitel des Rades einfällt und von den am Umfange desselben befindlichen Zellen aufgefangen wird, wodurch eine Bewegung des Rades entstehet.

Die vortheilhafteste Anordnung dieser Räder zu bestimmten Zwecken, gehört in die Maschinenlehre und wird daselbst abgehandelt werden. Hier kommt es lediglich darauf an, in gegebenen Fällen die Kraft zu bestimmen, welche von dem Wasser an einem dergleichen Rade ausgeübt werden kann, weshalb auch nur so viel von der Construction dieser Räder angeführt wird, wie zur Beurtheilung ihres Effekts nöthig ist.

178. §.

An einem Rade dessen vertikaler Durchmesser AB (Fig. 1.) ist, befinde sich auf der einen Seite Taf. I. Fig. 1. des Umfangs ein Theil eines Wasserringes oder ein wasserhaltender Bogen, dessen centrische Linie DFE ist, und bei welchem alle Querschnitte nach der Richtung des Mittelpunktes C einander gleich sind. Man sucht das statische Moment, oder die

Taf. I. Fig. 1. Kraft mit welcher dieser wasserhaltende Bogen das Rad umzudrehen pflegt.

Denkt man sich über und unter dem horizontalen Querschnitte IH ein vertikales Wasserprisma KL, welches mit dem Bogen DFE einerlei vertikale Höhe MN hat, so läßt sich beweisen, daß dieses Prisma eben so auf die Umdrehung des Rades, wie der wasserhaltende Bogen DFE wirkt. Man nehme in der centrischen Linie des Bogens einen äußerst kleinen Theil mn an, und ziehe durch m,n die Querschnitte $m'm''$ und $n'n''$ nach dem Mittelpunkte C, so wird durch diese Querschnitte eine Wasserschicht $m'n'n''m''$ begrenzt. Durch m und n ziehe man ferner die Horizontallinien mp, nq, so wird dadurch in dem Prisma KL eine horizontale Wasserschicht pqq' abgeschnitten, welche man mit der des wasserhaltenden Bogens als zusammengehörig betrachten kann, und man sieht leicht ein, daß sich der ganze Bogen und das ganze Prisma, in solche zusammengehörige Wasserschichten eintheilen läßt. Man ziehe mG senkrecht auf CH und verlängere qn bis o, so ist das $\triangle$ mon $\sim$ CGm, weil beide rechtwinklicht und $\angle$ nmo = mCG; es verhält sich daher

$$mn : mo = mC : CG \text{ also}$$

$$CG \cdot mn = mC \cdot mo \text{ oder}$$

$$CG \cdot mn = CF \cdot pq.$$

Nun findet man das statische Moment der sehr dünnen Wasserschicht $m'n'n''m''$

$$= CG \cdot mn \cdot m'm'' \cdot \gamma$$

$$= CG \cdot mn \cdot IH \cdot \gamma$$

und das statische Moment der zugehörigen Schicht pqq'

$$= CF \cdot pq \cdot qq' \cdot \gamma$$

$$= CF \cdot pq \cdot IH \cdot \gamma.$$

:s ist aber CG . mn = CF . pq; daher sind
ie statischen Momente der zusammengehörigen
Schichten m'n'n''m''. und pqq' einander gleich,
nd weil dieses von sämmtlichen zusammengehöri-
en Schichten auf eben die Art bewiesen wird, so
lgt daraus, daß das Gewicht des wasser-
altenden Bogens, das Rad eben so zu
rehen strebt, als wenn am Ende des
halbmessers CF, ein vertikales Wasser-
risma KL angebracht wäre, dessen Quer-
chnitt dem Querschnitte IH des Bogens
nd dessen Höhe der vertikalen Höhe des
vasserhaltenden Bogens gleich ist.

Ist H die vertikale Höhe des wasserhaltenden Bogens,

F der Inhalt des durch den Mittelpunkt gehenden Querschnitts desselben, und

r der Halbmesser für die centrische Linie des Wasserbogens,

so erhält man das statische Moment

$$= r . FH . \gamma.$$

179. §.

Um die oberschlächtigen Räder zur Aufnahme des Wassers einzurichten, werden Zellen (Cellulae, *Celules*) an ihrem Umfange durch dünne Bretter oder Schaufeln (Palmulae, *Cloisons*) gebildet, welche in die Felgen oder Kränze des Rades eingeschoben werden. Von der guten Schaufelung oder Dockung hängt die Fähigkeit des Rades ab, das einfallende Wasser leicht aufzunehmen und solches nicht zu bald zu verschütten. Man hat mancherlei Regeln die Schaufelung zu verrichten, die man in mehrern Schrif[illegible] [illegible]rben findet. Die nachstehende Anweisu[illegible] [illegible] Ausübung zureichend.

Taf.I. Fig.2. Wenn AB (Fig. 2.) die Höhe oder der vertikale Durchmesser des Wasserrades ist, so nimmt man gewöhnlich die Breite der Kränze AD, BE zwölf Zoll groß an, theilt AD in drei gleiche Theile, nimmt von D bis F ein Drittel und schlägt aus dem Mittelpunkte C einen Kreis durch F, welcher der Theilriß genannt wird. Den Theilriß theilt man in so viel gleiche Theile als das Rad Schaufeln erhalten soll, gewöhnlich dreimal so viel als der Durchmesser des Rades Füße hat, bei wenig Wasser einige mehr, bei viel Wasser weniger. Hier ist der Durchmesser 8 Fuß angenommen, also ist FG der vier und zwanzigste Theil vom ganzen Theilrisse. Die Schaufeln werden aus zwei Stücken zusammengesetzt, wovon das äußere HI, LM die Wasser-, Setz- oder Stoßschaufel (Palmula una) und das innere IK, MN die Riegel- oder Kropfschaufel (Palmula altera) genannt wird.

Je kleiner der Raum IO zwischen zwei Stoßschaufeln ist, um so länger werden die Zellen das Wasser behalten, ehe sie ausgießen; diese Verengung hat aber deshalb ihre Grenzen, weil hinlänglicher Raum vorhanden seyn muß, damit der einstürzende Wasserstrahl, beim Durchgange zwischen den Stoßschaufeln, nicht gehindert wird; denn ob man gleich das Rad auf jeder Seite 4 bis 6 Zoll breiter macht als die Breite dieses Strahls, so findet man doch bei mehrern zu eng geschaufelten oberschlächtigen Wasserrädern, daß das einstürzende Wasser wieder zurückprallt und zum Theil verspritzt wird. Um dieses zu vermeiden nehme man die Dicke des einfallenden Wasserstrahls in den Zirkel, und schlage aus einem Punkte I des Theilrisses mit dieser Weite einen Bogen oOo. Zu diesem Bogen ziehe man, aus dem nächsten Punkte M des Theilrisses, die Tangente ML, so giebt diese die Lage der Stoßschaufel, und wenn

ıan von L ab, den äußersten Umfang des Rades Taf. I.
ı so viel Theile theilt, als Schaufeln sind, so Fig. 2.
nd dadurch sämmtliche Stoßschaufeln bestimmt.

Die Lage der Kropfschaufeln läßt sich auf zweier:
i Art bestimmen. Entweder zieht man vom Ende I
r Stoßschaufel, eine grade Linie IK nach dem
Mittelpunkte des Rades, so wird IK die Kropf:
haufel; oder man errichte am Ende der Stoß:
haufel PQ in Q eine senkrechte Linie QR auf
'Q, so ist QR die auf der Stoßschaufel senkrechte
kropfschaufel. Letzterer Art bedienen sich die Mül:
r häufig deswegen, weil sich zwei Bretter leichter
nter einem rechten Winkel wasserdicht verbinden
assen.

Um die Zellen nach der Mitte des Rades zu
erschliessen, werden am innern Umfange der Kränze
IDKN Bretter befestiget, welche man den Bo:
en nennt.

180. §.

Die Art wie den oberschlächtigen Rädern das
Wasser gewöhnlich zugeführt wird, findet man
Figur 3 abgebildet. Oberhalb ist in dem Boden Taf. I.
es Gerinnes das Schlundloch (*Abée*) wodurch Fig 3.
as Wasser einfällt und welches mit einem klei:
en Schützbrette verschlossen werden kann. Ist der
ine Theil von den Zellen des Rades mit Wasser
ngefüllt, so entstehet dadurch ein Übergewicht wel:
hes die Umdrehung des Rades bewirkt, weil das
Wasser in den untern Zellen wieder abfließt. Ge:
chiehet dieses Abfließen zu früh, ehe die Zellen ih:
en tiefsten Stand erreicht haben, so wird dadurch
ffenbar die Kraft des Rades vermindert, und weil
as Wasser von der entgegengesetzten Seite wo es
erkommt, wieder abfließen muß, die Umdrehung
es Rades aber nach einer dem abfließenden Was:
ser entgegengesetzten Richtung geschiehet, so muß das
Rad wenigstens 8 bis 12 Zoll vom Wasserspiegel

Taf. I. Fig. 3. des Unterwassers abstehen, welches das Freihängen des Rades genannt wird, damit das abfließende Wasser die Umdrehung des Rades nicht verhindert und das Rad im Wasser badet.

Diesen Unvollkommenheiten der oberschlächtigen Räder zu begegnen, durch das zu zeitige Ausleeren der Zellen etwas von dem Gewichte des Wassers, und wegen des Freihängen des Rades, etwas von der Höhe des Rades oder von dem Gefälle zu verlieren, kann man den Untertheil des Rades mit einer Einfassung oder einem Mantel umgeben, Taf. I. Fig. 4. und das Wasser so wie es in der vierten Figur bemerkt ist, einfallen lassen. Bei dieser Anordnung fließt das Wasser nach eben der Richtung ab, wie sich das Rad umdreht, man darf daher kein Gefälle für das Freihängen des Rades verwenden, vielmehr kann das Rad noch einige Zoll in das Unterwasser eingreifen. Die Höhe bis zu welcher der Mantel das Rad umgiebt, richtet sich nach der Höhe in welcher die Schaufeln Wasser verlieren und man sieht leicht, daß niedrige Räder verhältnißmäßig höhere Mäntel erhalten als große Räder. In Absicht dieser Mäntel lassen sich noch vortheilhaftere Einrichtungen angeben; denn wenn gleich der Spielraum zwischen dem Rade und Mantel noch so geringe ist, so geht doch noch eine ansehnliche Wassermenge verloren, weil dem abfließenden Wasser eine der Höhe des Mantels entsprechende Geschwindigkeit zugehört. Setzt man hingegen den Mantel noch weiter von dem Rade ab, und bringt in demselben kleine Schaufeln an, welche gegen die Zellen gekehrt sind, so daß das auf sie spritzende Wasser gleich wieder gegen das Rad in die Zellen fließt, so wird der Wasserverlust welcher wegen des Spielraums entstehet, beträchtlich vermindert.

181. §.

Die Kraft an einem oberschlächtigen Rade

ängt von dem Gewichte des Wassers ab, welches m Umfange desselben vertheilt ist, und von dem Stoße mit welchem das einstürzende Wasser die Schaufeln trift.

Bei Rädern die keine Mäntel haben, geht von em Wasser, welches als Gewicht wirkt, um so nehr verloren, je kleiner diese Räder sind. Im Durchschnitte rechnet man, daß die Höhe der drükenden Wassersäule, $\frac{3}{8}$ von dem Durchmesser des Theilrisses betrage, indem man diese als ein Gewicht ansieht, welches an dem Theilrisse nach der Richtung der Tangente desselben, das Rad umreht. Bei Rädern mit Mänteln, kann man den Durchmesser des Theilrisses als Höhe der Wassersäule annehmen.

Die Gerinne werden gewöhnlich so angeordnet, aß das einstürzende Wasser in die zweite Zelle on oben fällt (Figur 3, 4), und man rechnet die Taf. I. Fig. 3. 4. Geschwindigkeitshöhe des einfallenden Wassers, bis n die zweite Zelle an den Theilriß.

Man setze, daß

- d den Durchmesser des Theilrisses,
- λd denjenigen Theil des Theilrisses, welcher als Höhe der drückenden Wassersäule in Rechnung kommt,
- k den Querschnitt dieser Wassersäule,
- c die Geschwindigkeit des einstürzenden Wassers,
- v die Geschwindigkeit des Theilrisses,
- M die Wassermenge, und
- P die gesammte Kraft am Halbmesser des Theilrisses

ezeichne, so ist der Querschnitt

$$k = \frac{M}{v}$$

Bau erfordern, sondern auch mehr Friktion verursachen, und da überdies der Stoß durch das einstürzende Wasser selten sehr beträchtlich ist, so pflegt man gewöhnlich den oberschlächtigen Rädern dieselbe Geschwindigkeit zu geben welche das einstürzende Wasser hat, also $v = c$ zu nehmen, weshalb es bei diesen Rädern nur darauf ankommt, daß die Geschwindigkeit derselben nie größer als die Geschwindigkeit des einstürzenden Wassers werde. Daß sie nicht kleiner als $\frac{1}{2}c$ werden soll, darf kaum erinnert werden, weil dieser Fall nicht leicht eintreffen wird.

Dreizehntes Kapitel.

Von den unterschlächtigen Wasserrädern.

183. §.

Wird ein vertikal hängendes Wasserrad an seinem Umfange mit Brettern oder Schaufeln (Pinnae, *Aubes*) versehen, damit solche den Stoß eines dagegen strömenden Wassers auffangen, und dieses Wasser fließt unterhalb des Rades gegen die Schaufeln, so heißt solches ein unterschlächtiges Wasserrad (Rota retrograda, *Roue à aubes*).

Sind die Schaufeln auf den beiden vertikalen Seiten des Rades mit Kränzen oder Felgen eingefaßt, so heißt es ein Staberrad; wenn aber die Schaufeln nur in der Stirne eines Kranzes befestiget sind und keine Einfassung von beiden Seiten haben, ein Strauberrad, welches in dem Falle zur Anwendung findet, wenn die Schaufeln nicht groß werden. Eine dritte Gattung von Rädern sind an den Schiffmühlen, wo die langen Schaufeln an die Speichen oder Arme des Rades befestiget werden.

Man unterscheidet freihängende Wasserräder, bei welchen das Wasser von allen Seiten abfließen kann, wie bei Schiffmühlen, von den eingeschlossenen Wasserrädern, welche von den Wänden eines Gerinnes umgeben sind.

Außer dem Wüsten- oder Freigerinne, welches zur Abführung des überflüssigen Wassers und des Eises dient, kommt noch das Mahl- oder Mühlengerinne (*Coursier*) als ein sehr

Taf. I. Fig. 3. 4. also das Gewicht der drückenden Wassersäule

$$\lambda dk\gamma = \frac{\lambda d}{v} M\gamma.$$

Den relativen Stoß der Wassermenge M, welche mit der Geschwindigkeit c—v an die Schaufeln schlägt, findet man (169. §. II.), weil hier sämmtliche Wassertheile zum Stoße gelangen

$$= \frac{c-v}{2g} M\gamma$$

folglich die gesammte Kraft

$$P = \left[\frac{\lambda d}{v} + \frac{c-v}{2g}\right] M\gamma.$$

Für $c = v$ wird $c - v = 0$, also in diesem Falle, die Kraft

$$P = \frac{\lambda d}{v} M\gamma.$$

182. §.

Die Untersuchung über die vortheilhafteste Geschwindigkeit, welche man den Wasserrädern geben muß um den größten nutzbaren Effekt hervorzubringen, gehört eigentlich in die Maschinenlehre; werden indessen hier die Friktion der Maschine und andere Hindernisse der Bewegung bei Seite gesetzt, so läßt sich vorläufig einsehen, daß unter gleichen Umständen die Wirkung oder der Totaleffekt einer Maschine unter übrigens gleichen Umständen desto größer wird, je größer das Produkt aus der Kraft in die Geschwindigkeit des von der Kraft angegriffenen Punkts ist, welches Produkt das Maaß der Bewegung oder das mechanische Moment genannt wird. In der Maschinenlehre wird dies näher auseinander gesetzt, hier kommt es also unter der obigen Voraussetzung darauf an, daß Pv so groß wie möglich werde.

Der vorhin gefundene allgemeine Ausdruck für die Kraft am oberschlächtigen Wasserrade giebt das mechanische Moment

$$Pv = \left[\lambda d + \frac{cv - v^2}{2g}\right] M\gamma$$

Wird nun die Wassermenge M, die Geschwindigkeit c, und die Höhe λd als gegeben vorausgesetzt, so bleibt, weil g und γ ebenfalls unveränderliche Größen sind, nichts mehr willkürlich, als die Geschwindigkeit des angegriffenen Punkts oder v, und es kommt darauf an, daß $cv - v^2$ ein Maximum werde.

Nimmt man für c einen bestimmten Werth an, z. B. $c = 12$, so wird auch in allen übrigen Fällen $cv - v^2$ am größten, wenn $v = \frac{1}{2} c$ *) also hier $v = 6$ angenommen wird. Denn für

$$v = 5 \text{ ist } cv - v^2 = 35$$
$$v = 6 \text{ ist } cv - v^2 = 36$$
$$v = 7 \text{ ist } cv - v^2 = 35$$

Hienach wäre die Wirkung des oberschlächtigen Rades am größten, wenn die Schaufeln mit einer Geschwindigkeit (v) ausweichen, welche halb so groß ist, als die Geschwindigkeit (c) des einstürzenden Wassers.

In der Ausübung pflegt man aber selten diese Regel bei oberschlächtigen Rädern zu befolgen, weil je langsamer das Rad umläuft, desto breiter muß dasselbe seyn, um alles Wasser aufzunehmen, und weil die größern Räder nicht nur einen stärkern

---

*) $d(cv - v^2) = cdv - 2vdv = 0$ oder $c = 2v$ daher $v = \frac{1}{2}c$.

Bau erfordern, sondern auch mehr Friktion verursachen, und da überdies der Stoß durch das einstürzende Wasser selten sehr beträchtlich ist, so pflegt man gewöhnlich den oberschlächtigen Rädern dieselbe Geschwindigkeit zu geben welche das einstürzende Wasser hat, also $v = c$ zu nehmen, weshalb es bei diesen Rädern nur darauf ankommt, daß die Geschwindigkeit derselben nie größer als die Geschwindigkeit des einstürzenden Wassers werde. Daß sie nicht kleiner als $\frac{1}{2}c$ werden soll, darf kaum erinnert werden, weil dieser Fall nicht leicht eintreffen wird.

Drei-

Dreizehntes Kapitel.

Von den unterschlächtigen Wasserrädern.

183. §.

Wird ein vertikal hängendes Wasserrad an sei- [n]em Umfange mit Brettern oder Schaufeln [(P]innae, *Aubes*) versehen, damit solche den Stoß [ei]nes dagegen strömenden Wassers auffangen, und [d]ieses Wasser fließt unterhalb des Rades gegen [d]ie Schaufeln, so heißt solches ein unterschläch- [t]iges Wasserrad (Rota retrograda, *Roue à* [a]*ubes*).

Sind die Schaufeln auf den beiden vertikalen Seiten des Rades mit Kränzen oder Felgen einge- [f]aßt, so heißt es ein Staberrad; wenn aber die Schaufeln nur in der Stirne eines Kranzes befe- stiget sind und keine Einfassung von beiden Seiten [h]aben, ein Strauberrad, welches in dem Falle [n]ur Anwendung findet, wenn die Schaufeln nicht [g]roß werden. Eine dritte Gattung von Rädern [s]ind an den Schiffmühlen, wo die langen Schau- [f]eln an die Speichen oder Ärme des Rades befe- stiget werden.

Man unterscheidet freihängende Wasser- [r]äder, bei welchen das Wasser von allen Seiten [a]bfließen kann, wie bei Schiffmühlen, von den [e]ingeschlossenen Wasserrädern, welche von [d]en Wänden eines Gerinnes umgeben sind.

Außer dem Wüsten- oder Freigerinne, welches zur Abführung des überflüssigen Wassers und des Eises dient, kommt noch das Mahl- oder Mühlengerinne (*Coursier*) als ein sehr

Bau erfordern, sondern auch mehr Friktion verursachen, und da überdies der Stoß durch das einstürzende Wasser selten sehr beträchtlich ist, so pflegt man gewöhnlich den oberschlächtigen Rädern dieselbe Geschwindigkeit zu geben welche das einstürzende Wasser hat, also $v = c$ zu nehmen, weshalb es bei diesen Rädern nur darauf ankommt, daß die Geschwindigkeit derselben nie größer als die Geschwindigkeit des einstürzenden Wassers werde. Daß sie nicht kleiner als $\frac{1}{2}c$ werden soll, darf kaum erinnert werden, weil dieser Fall nicht leicht eintreffen wird.

Drei-

Dreizehntes Kapitel.

Von den unterschlächtigen Wasserrädern.

183. §.

Wird ein vertikal hängendes Wasserrad an sei- nem Umfange mit Brettern oder Schaufeln (Pinnae, *Aubes*) versehen, damit solche den Stoß nes dagegen strömenden Wassers auffangen, und ieses Wasser fließt unterhalb des Rades gegen e Schaufeln, so heißt solches ein unterschläch- ges Wasserrad (Rota retrograda, *Roue à ubes*).

Sind die Schaufeln auf den beiden vertikalen Seiten des Rades mit Kränzen oder Felgen einge- ißt, so heißt es ein Staberrad; wenn aber die Schaufeln nur in der Stirne eines Kranzes befe- iget sind und keine Einfassung von beiden Seiten aben, ein Strauberrad, welches in dem Falle ur Anwendung findet, wenn die Schaufeln nicht roß werden. Eine dritte Gattung von Rädern nd an den Schiffmühlen, wo die langen Schau- ln an die Speichen oder Arme des Rades befe- iget werden.

Man unterscheidet freihängende Wasser- äder, bei welchen das Wasser von allen Seiten bfließen kann, wie bei Schiffmühlen, von den ingeschlossenen Wasserrädern, welche von en Wänden eines Gerinnes umgeben sind.

Außer dem Wüsten- oder Freigerinne, velches zur Abführung des überflüssigen Wassers ind des Eises dient, kommt noch das Mahl- der Mühlengerinne (*Coursier*) als ein sehr

wesentlicher Theil vor, weil dessen Konstruktion einen vorzüglichen Einfluß auf die Wirkung des Wassers gegen die Schaufeln hat.

Geht der Abschußboden (*Radier*) in einer Taf. I. Fig. 5. graden Linie unter dem Rade fort (Figur 5. BB''), so heißt das Gerinne ein grades Gerinne, auch Schuß- oder Schnurgerinne; wenn aber der Taf. I. Fig. 6. Abschußboden unter dem Rade gekrümmt ist (Fig. 6. BLB'') ein Kropfgerinne. Ist der Kropf so groß, daß er beinahe die Höhe vom Halbmesser des Wasserrades hat, so heißt das Wasserrad, ein halboberschlächtiges.

Wenn das Wasser welches ein unterschlächtiges Rad treibt, zuweilen wächst oder höher wird, besonders wenn der Rückstau von unten her, die Wirkung des anstoßenden Wassers schwächt, so giebt man dem Rade eine solche Einrichtung, damit dasselbe nach den Umständen höher gebracht werden kann, welches man ein Pansterzeug, und das Rad, ein Pansterrad nennt. Wird das Zapfenlager oder Angewelle (*Coussinet*) mittelst eines Hebebaums erhöhet, und an den beiden Enden desselben durch Bolzen, die man in höhere Löcher der ausgepfalzten Pansterfäulen steckt, gehalten, so heißt es ein Stockpanster; wenn aber die Zapfenlager mittelst einer Kette, welche über eine Welle geht, aufgezogen werden, ein Ziehpanster.

Um zu verhindern, daß beim aufgezogenen Rade, kein Wasser ungenutzt unten wegfließe, bringt man unter dem Rade ein Schwimmgerinne an, welches eben so viel in die Höhe gebracht wird, wie man das Rad aufzieht. Zur Vermeidung des Zwischenraums an beiden Seiten des Rades, dienen die Wasserbänke (*Coffres*), welches zwei Seitenbretter sind die von der Schützöfnung bis an die Kränze des Rades und bogenförmig unter diese Kränze gehen, damit das Wasser zwischen

den Wasserbänken in einer solchen Breite gegen das Rad fließe, welche der Länge der Schaufeln im lichten gleich ist. Taf. I. Fig. 6.

184. §.

Damit das anstoßende Wasser die Schaufeln mit einer größern Geschwindigkeit treffe, und nach Gefallen mehr oder weniger Wasser abgelassen werden könne, bringt man oberhalb der Räder im Gerinne ein Schützbrett (Tabula, *Vanne*) AD an (Figur 5 und 6), welches so nahe wie möglich an das Rad kommen muß. In der siebenten Figur bewegt sich das Schützbrett vertikal in den Nuthen der Griessäulen. Um aber die Schützöfnung (*Pertuis*) noch näher an das Rad zu bringen, kann man dem Schützbrette eine Neigung gegen den Horizont geben, und dasselbe zwischen zwei Wangenbretter, die auf beiden Seiten des Gerinnes nach der Richtung des Schützbrettes befestiget sind, sich bewegen lassen, welches aus der achten Figur nebst der übrigen Einrichtung zu ersehen ist *). Auch ist daselbst am Ende des Kropfes, dem Gerinne eine größere Tiefe gegeben, damit sich das Wasser, wenn es das Rad verläßt, leichter ausbreiten kann, und die Umdrehung des Rades nicht hindert. Taf. I. F. 5.6. T. II. Fig. 7. T. II. Fig. 8.

Die vertikale Höhe der Schützöfnung muß jedesmal kleiner seyn als die Höhe der Schaufeln,

T 2

*) Ueber diese Einrichtung sehe man:

J. C. Eiselen, über die Anwendung des Wassers auf unterschlächtige, insonderheit aber auf solche Wasserräder, die in einem Gerinne gehen, und einiges Gefälle, mithin sogenannte Kröpfe haben. In den Sammlungen die Baukunst betreffend, Jahrg. 1798. 2ter Theil. Berlin. S. 35 u. f.

wesentlicher Theil vor, weil dessen Konstruktion einen vorzüglichen Einfluß auf die Wirkung des Wassers gegen die Schaufeln hat.

Geht der Abschußboden (*Radier*) in einer graden Linie unter dem Rade fort (Figur 5. BB'),
Taf. I. Fig. 5. so heißt das Gerinne ein grades Gerinne, auch Schuß- oder Schnurgerinne; wenn aber der
Taf. I. Fig. 6. Abschußboden unter dem Rade gekrümmt ist (Fig. 6. BLB'') ein Kropfgerinne. Ist der Kropf so groß, daß er beinahe die Höhe vom Halbmesser des Wasserrades hat, so heißt das Wasserrad, ein halboberschlächtiges.

Wenn das Wasser welches ein unterschlächtiges Rad treibt, zuweilen wächst oder höher wird, besonders wenn der Rückstau von unten her, die Wirkung des anstoßenden Wassers schwächt, so giebt man dem Rade eine solche Einrichtung, damit dasselbe nach den Umständen höher gebracht werden kann, welches man ein Pansterzeug, und das Rad, ein Pansterrad nennt. Wird das Zapfenlager oder Angewelle (*Coussinet*) mittelst eines Hebebaums erhöhet, und an den beiden Enden desselben durch Bolzen, die man in höhere Löcher der ausgepfalzten Pansterfäulen steckt, gehalten, so heißt es ein Stockpanster; wenn aber die Zapfenlager mittelst einer Kette, welche über eine Welle geht, aufgezogen werden, ein Ziehpanster.

Um zu verhindern, daß beim aufgezogenen Rade, kein Wasser ungenutzt unten wegfließe, bringt man unter dem Rade ein Schwimmgerinne an, welches eben so viel in die Höhe gebracht wird, wie man das Rad aufzieht. Zur Vermeidung des Zwischenraums an beiden Seiten des Rades, dienen die Wasserbänke (*Coffres*), welches zwei Seitenbretter sind die von der Schützöfnung bis an die Kränze des Rades und bogenförmig unter diese Kränze gehen, damit das Wasser zwischen

en Wasserbänken in einer solchen Breite gegen Taf. I. Fig. 6.
as Rad fließe, welche der Länge der Schaufeln
n lichten gleich ist.

184. §.

Damit das anstoßende Wasser die Schaufeln
it einer größern Geschwindigkeit treffe, und nach
iefallen mehr oder weniger Wasser abgelassen
erden könne, bringt man oberhalb der Räder im
Gerinne ein Schützbrett (Tabula, *Vanne*) AD Taf. I.
a (Figur 5 und 6), welches so nahe wie möglich F. 5. 6.
a das Rad kommen muß. In der siebenten Fi- T. II.
ur bewegt sich das Schützbrett vertikal in den Fig. 7.
Nuthen der Griessäulen. Um aber die Schütz-
fnung (*Pertuis*) noch näher an das Rad zu
ringen, kann man dem Schützbrette eine Neigung
egen den Horizont geben, und dasselbe zwischen
wei Wangenbretter, die auf beiden Seiten des
Gerinnes nach der Richtung des Schützbrettes be-
estiget sind, sich bewegen lassen, welches aus der
chten Figur nebst der übrigen Einrichtung zu er- T. II.
hen ist *). Auch ist daselbst am Ende des Kro- Fig. 8.
fes, dem Gerinne eine größere Tiefe gegeben, da-
mit sich das Wasser, wenn es das Rad verläßt,
eichter ausbreiten kann, und die Umdrehung des
Rades nicht hindert.

Die vertikale Höhe der Schützöfnung muß je-
desmal kleiner seyn als die Höhe der Schaufeln,

*) Ueber diese Einrichtung sehe man:

J. C. Eiselen, über die Anwendung des Wassers auf unterschlächtige, insonderheit aber auf solche Wasserräder, die in einem Gerinne gehen, und einiges Gefälle, mithin sogenannte Kröpfe haben. In den Sammlungen die Baukunst betreffend, Jahrg. 1798. 2ter Theil. Berlin. S. 35 u. f.

T. II. Fig. 8. weil sonst das Wasser über die Schaufeln schlagen würde; so wie auch die horizontale Weite, oder Breite der Schützöfnung, nie größer seyn sollte, als die gesammte Breite des Rades, gewöhnlich aber nur der Länge der Schaufeln oder der innern Weite zwischen den Kränzen des Rades gleich seyn darf.

In Absicht der verschiedenen Benennungen, welche Bezug auf das Wasser bei dem unterschlächtigen Gerinne haben, hat man nachstehendes zu merken:

Taf. I. Fig. 5. 6.

AA′ (Figur 5 und 6) ist der Wasserspiegel des Oberwassers,

EE′ der Wasserspiegel des Unterwassers,

FE der vertikale Abstand des Oberwasserspiegels vom Unterwasser, das ganze Gefälle,

AD die Höhe des Oberwassers vor dem Schützbrette, das Druckwasser,

DB die Höhe der Schützöfnung,

AB Druckwasser und Schützöfnung zusammengenommen, der Wasserstand.

Bei den Gerinnen mit graden Abschußböden (Fig. 5) ist noch besonders zu bemerken, daß wenn aus dem Mittelpunkte des Rades C die Linie CK senkrecht auf den Abschußboden BB″ gezogen wird, und man nimmt die Mitte G von der eingetauchten Schaufel,

FH oder die vertikale Entfernung des Oberwasserspiegels von der Mitte der eingetauchten Schaufel, die Geschwindigkeitshöhe des anschlagenden Wassers genannt wird. Das Gefälle oder den Abhang des Abschußbodens, nennt man das lebendige Gefälle.

Wird bei Kropfgerinnen (Figur 6) von der Mitte G der am Anfange des Kropfs bei K stehenden Schaufel die Horizontallinie KH gezogen, so nennt man hier Taf. I. Fig. 6.

FH oder die vertikale Entfernung des Oberwasserspiegels, vom Mittel der am Anfange des Kropfs befindlichen Schaufel, die Geschwindigkeitshöhe des anschlagenden Wassers.

Zieht man vom Mittelpunkte des Rades C bis an das Ende des Kropfs bei L die Linie CL, und nimmt auf dieser Linie die Mitte von dem abschießenden Wasser in M, zieht hierauf die Vertikallinie MN bis an die Horizontallinie GH, so heißt

MN oder der vertikale Abstand von der Mitte beider eingetauchten Theile, der am Anfange und Ende des Kropfs befindlichen Schaufeln, die Höhe des wasserhaltenden Bogens.

185. §.

Damit das Wasser die Schaufeln gehörig treffe, so ist die Richtung derselben nicht gleichgültig. Bei einem graden Gerinne setzt man gewöhnlich die Schaufeln nach der Richtung des Halbmessers, obgleich aus Bossuts Versuchen (Hydrod. 2. Bd. 1019. §.) folgt, daß eine geringe Neigung von 15 bis 30 Grad gegen den Halbmesser vortheilhaft ist. Die Gründe hievon lassen sich leicht einsehen, weil alsdann die aus dem Wasser tretende Schaufeln sich der vertikalen Lage nähern, nicht so viel Widerstand beim Austritte finden, und nicht so viel Wasser wieder mit in die Höhe nehmen können, welches bei schnell bewegten Rädern beträchtlich ist und als ein Gegengewicht die Umdrehung des Rades hindert. [illegible] sich daher

annehmen, daß es vortheilhaft sei, wenn die aus dem Wasser tretende Schaufeln sich der Vertikallinie nähern.

Ebenfalls ist es vortheilhaft wenn man diejenige Ecke der Schaufeln welche gegen das Unterwasser gekehrt ist, etwas abflächt, theils weil hierdurch der Austritt aus dem Wasser erleichtert wird, theils weil alsdenn auch die nächstfolgende Schaufel einen vortheilhaftern Stoß von dem Wasser erhält.

Wie weit die Schaufeln am Umfange des Rades auseinander stehen müssen, darüber fehlt es noch an allgemeinen Regeln. Belidor hat zwar dergleichen gegeben *), sie sind aber nicht anwendbar, und selbst die Bemühung von Bossut (Hydrod. 1. B. 2. Absch. 15. K.), die vortheilhafteste Anzahl der Schaufeln aus der Theorie des Wasserstoßes zu finden, ist nicht zureichend. Für die meisten Fälle der Ausübung kann man annehmen, daß bei einem 8 bis 12 Fuß hohen Wasserrade sich drei, bei einem größern Wasserrade aber 4 bis 5 Schaufeln zugleich eintauchen müssen.



Die Höhe der Schaufeln AB muß wenigstens um die Hälfte größer seyn als die Höhe des eingetauchten Theils AD, damit das anstoßende Wasser nicht überschlagen kann und dessen Wirkung auf die Schaufeln verloren geht. In der Folge wird man bei den Berechnungen unter Höhe der Schaufel, nur die Höhe ihres eingetauchten Theils verstehen.

186. §.

Die Anordnung der Schaufeln bei einem Kropfgerinne mit beträchtlichem Gefälle erfor-

*) Belidor angef. Architekt. Hydraul. 1. Th. 2. B. 1. K. 674 §.

dert andere Regeln. Ihre Anzahl kann man in den meisten Fällen wie bei den oberschlächtigen Rädern (179. §.) festsetzen; bei einer hohen Kröpfung sieht man aber leicht ein, daß wenn die Richtung der Schaufeln nach dem Mittelpunkte des Rades genommen wird, alsdenn das einstürzende Wasser leicht über die Schaufeln wegströmen würde, weshalb die Schaufeln gebrochen werden oder eine **Kröpfung** erhalten. Dergleichen Räder heißen **Sackräder** und müssen nicht mit oberschlächtigen verwechselt werden.

Um die Lage der Schaufeln eines Sackrades zu finden, und damit die Schaufeln in dem Verhältnisse schiefer liegen, oder zur Aufnahme des Wassers geschickter werden, je größer der Kropf des Gerinnes ist, kann man auf nachstehende Art verfahren, die aber nur bei einem hohen Kropfgefälle anzuwenden ist, weil bei wenig Gefälle und einer geringen Geschwindigkeit des Rades, die Schaufeln keiner Kröpfung bedürfen.

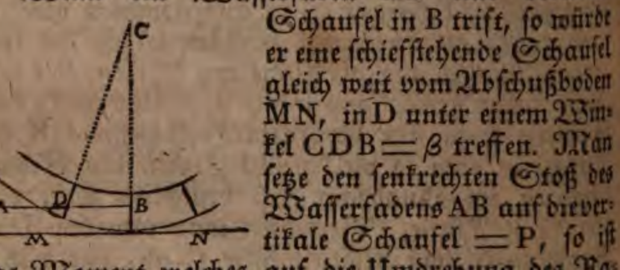
Wenn zuvor die Entfernung der Schaufeln am Umfange des Rades bestimmt ist, und ein Theilungspunkt D (Figur 9) so angenommen worden, T. II. Fig. 9.
daß er sich an derjenigen höchsten Stelle des Gerinnes befindet, wo die Rundung desselben mit dem Rade einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt C hat, so theile man den vertikalen Halbmesser CB des Rades, in eben so viel gleiche Theile, als Schaufelweiten im Quadrant AB befindlich sind, also hier in 8 Theile. Bezeichnet man nun die Theilungspunkte vom Mittelpunkte C ab, mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, und eben so die Punkte am Umfange des Rades von B nach A, so giebt die Linie 4 . 4 welche von D nach dem gleichnamigen Punkte des Halbmessers gezogen ist, die La[illegible] Wasser- oder **Stoßschaufel** D[illegible] [illegible]urch den in der Mitte der Krä[illegible] EG bestimmt wird.

T. II. Fig. 9. Die Kropf- oder Riegelschaufel wird dadurch gefunden, daß man die Weite DE aus E nach dem innern Umfange des Rades bis F trägt, so daß DE = EF wird; oder man setzt solche auch öfters der leichtern Bearbeitung wegen, senkrecht auf ED, alsdenn muß aber $HG = \frac{1}{3} HB$ seyn. Bei schmalen Kränzen oder bei einer starken Kröpfung ist es nützlich, die Riegelschaufeln so breit zu machen, daß sie noch etwas über den innern Rand der Kränze vorspringen, damit das einstürzende Wasser nicht überschlägt.

187. §.

Bei dem Stoße des Wassers gegen die Schaufeln eines unterschlächtigen Wasserrades, erhalten zwar einige Schaufeln einen schiefen Stoß, die Wirkung auf die Umdrehung des Rades bleibt aber immer dieselbe, die Schaufeln mögen grade oder schief gestoßen werden, wenn sie nur nicht so weit auseinander stehen, daß Wasser ungenutzt vorbei fließen kann.

Wenn ein Wasserfaden AB eine vertikale Schaufel in B trift, so würde er eine schiefstehende Schaufel gleich weit vom Abschußboden MN, in D unter einem Winkel CDB = β treffen. Man setze den senkrechten Stoß des Wasserfadens AB auf die vertikale Schaufel = P, so ist das Moment welches auf die Umdrehung des Rades wirkt



$$= CB . P.$$

In gleicher Entfernung vom Abschußboden MN erhielte von diesem Wasserfaden, die schiefe Schaufel in D, einen auf die Schaufel senkrechten oder Normalstoß (173. §.)

$$= P \sin \beta$$

:ssen Moment zur Umdrehung des Rades

$= CD . P \sin\beta$ ist.

[ber $CD \sin\beta = CB$, daher

$$CD . P \sin\beta = CB . P$$

. h. in gleicher Entfernung vom Abschußboden at der Stoß des Wassers auf die Umdrehung es Rades eben den Erfolg, die Schaufeln mögen rade oder in schiefer Richtung getroffen werden.

Es wäre nun noch in Betrachtung zu ziehen, ı wie fern sämmtliches Wasser die bewegten Schaufeln trift, welchen Einfluß der durch die Verminderung der Geschwindigkeit des Wassers erursachte Aufstau auf die Bewegung des Rades at, und noch viele andere Umstände, die bei einer :hr genauen Theorie in Erwägung zu ziehen sind; iieses würde aber die vorgesetzten Grenzen weit iberschreiten, daher am Ende dieses Kapitels, über)iese aus Mangel an zulänglichen Versuchen noch nicht ganz aufs Reine gebrachte Materie, die angeführten Schriften nachgelesen und verglichen werden können.

188. §.

Um die Kraft P zu finden, mit welcher das Wasser die Schaufeln des Rades nach der Richtung der Tangente fortbewegt, wenn man den Mittelpunkt des Stoßes, wie es hier wohl erlaubt ist, im Schwerpunkte der eingetauchten Schaufel annimmt, so bezeichne

M die in jeder Sekunde gegen die Schaufeln anschlagende Wassermenge, die wegen des Spielraums zwischen Rad- und Gerinne allemal geringer ist, als die Wassermenge, welche durch die Schützöfnung zufließt,

f den Flächeninhalt von dem senkrecht auf

T. II. Fig. 9. Die Kropf- oder Riegelschaufel wird dadurch gefunden, daß man die Weite DE aus E nach dem innern Umfange des Rades bis F trägt, so daß DE = EF wird; oder man setzt solche auch öfters der leichtern Bearbeitung wegen, senkrecht auf ED, alsdenn muß aber HG = $\frac{1}{3}$ HB seyn. Bei schmalen Kränzen oder bei einer starken Kröpfung ist es nützlich, die Riegelschaufeln so breit zu machen, daß sie noch etwas über den innern Rand der Kränze vorspringen, damit das einstürzende Wasser nicht überschlägt.

187. §.

Bei dem Stoße des Wassers gegen die Schaufeln eines unterschlächtigen Wasserrades, erhalten zwar einige Schaufeln einen schiefen Stoß, die Wirkung auf die Umdrehung des Rades bleibt aber immer dieselbe, die Schaufeln mögen grade oder schief gestoßen werden, wenn sie nur nicht so weit auseinander stehen, daß Wasser ungenutzt vorbei fließen kann.

Wenn ein Wasserfaden AB eine vertikale Schaufel in B trift, so würde er eine schiefstehende Schaufel gleich weit vom Abschußboden MN, in D unter einem Winkel CDB = β treffen. Man setze den senkrechten Stoß des Wasserfadens AB auf die vertikale Schaufel = P, so ist das Moment welches auf die Umdrehung des Rades wirkt



$$= CB \cdot P.$$

In gleicher Entfernung vom Abschußboden MN erhielte von diesem Wasserfaden, die schiefe Schaufel in D, einen auf die Schaufel senkrechten oder Normalstoß (173. §.)

$$= P \operatorname{Sin} \beta$$

ssen Moment zur Umdrehung des Rades

$= CD \cdot P \sin\beta$ ist.

ber $CD \sin\beta = CB$, daher

$$CD \cdot P \sin\beta = CB \cdot P$$

h. in gleicher Entfernung vom Abschußboden at der Stoß des Wassers auf die Umdrehung s Rades eben den Erfolg, die Schaufeln mögen rade oder in schiefer Richtung getroffen werden.

Es wäre nun noch in Betrachtung zu ziehen, wie fern sämmtliches Wasser die bewegten Schaufeln trift, welchen Einfluß der durch die Verminderung der Geschwindigkeit des Wassers verursachte Aufstau auf die Bewegung des Rades at, und noch viele andere Umstände, die bei einer hr genauen Theorie in Erwägung zu ziehen sind; ieses würde aber die vorgesetzten Grenzen weit berschreiten, daher am Ende dieses Kapitels, über iese aus Mangel an zulänglichen Versuchen noch richt ganz aufs Reine gebrachte Materie, die angeführten Schriften nachgelesen und verglichen werden können.

188. §.

Um die Kraft P zu finden, mit welcher das Wasser die Schaufeln des Rades nach der Richtung der Tangente fortbewegt, wenn man den Mittelpunkt des Stoßes, wie es hier wohl erlaubt ist, im Schwerpunkte der eingetauchten Schaufel annimmt, so bezeichne

M die in jeder Sekunde gegen die Schaufeln anschlagende Wassermenge, die wegen des Spielraums zwischen Rad- und Gerinne allemal geringer ist, als die Wassermenge, welche durch die Schützöfnung zufließt,

f den Flächeninhalt von dem senkrecht auf

die Richtung des Wassers eingetauchten Theile der Schaufel,

c die mittlere Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers, und

v die Geschwindigkeit des Schwerpunkts der eingetauchten Schaufel,

so ist anzunehmen, daß bei denjenigen unterschlächtigen Wasserrädern, wo die Schaufeln hinlänglich hoch sind und nicht zu weit von einander abstehen, sämmtliches Wasser zum Stoße gelange, weil nur ein unbeträchtlicher Theil davon, der die äußersten Enden der tiefsten Schaufeln nicht trifft, ohne zu stoßen abfließen wird. In diesem Falle kann daher die Wassermenge $M = cf$ so angesehen werden, als wenn sie mit der Geschwindigkeit $c - v$ gegen die Schaufeln anschlägt, weshalb der relative Stoß nach 169. §. II. in Rechnung kommt. Hienach ist für unterschlächtige Wasserräder im geschlossenen Gerinne ohne Kröpfung

$$\text{I.} \qquad P = \frac{c-v}{2g} M\gamma$$

$$= \frac{(c-v)c}{2g} f\gamma$$

Setzt man daß

h und h′ die den Geschwindigkeiten c und v zugehörigen Höhen sind, so ist

$$c = 2\sqrt{gh} \text{ und } v = 2\sqrt{gh'}$$

daher auch

$$P = 2[h - \sqrt{(hh')}] f\gamma$$

Für Schiffmühlenräder im offenen Strome, ist 171. §.

$$\text{II.} \qquad P = \frac{c-v}{4g} M\gamma$$

$$= \frac{(c-v)c}{4g} f\gamma$$

$$= [h - \sqrt{(hh')}] f\gamma$$

Hat das Gerinne einen Kropf, und es ist

d die vertikale Höhe des wasserhaltenden Bogens (184. §.)

o kommt mit Beibehaltung der angenommenen Bezeichnung, außer dem Stoße gegen die Schau-eln am Anfange des Kropfs,

$$= \frac{c-v}{2g} M\gamma$$

och der Druck des Wassers hinzu, welches sich n wasserhaltenden Bogen befindet. Nun weichen e Schaufeln mit der Geschwindigkeit v aus, wel-es zugleich die Geschwindigkeit des abfließenden Wassers ist; es wird daher das im Kropfe befind-che Wasser, wie ein schwerer Körper auf die mdrehung des Rades wirken. Den Querschnitt ieser drückenden Wassersäule findet man $= \frac{M}{v}$ aher das Gewicht derselben

$$= d \frac{M}{v} \gamma$$

orausgesetzt, daß unter M diejenige Wassermenge erstanden wird, welche auf die Schaufeln trift, nd daß das Wasser, welches durch den Spiel-aum zwischen Rad und Gerinne verloren geht, bgezogen worden. Hienach ist die Kraft am ropfrade

$$\text{III.} \quad P = \left[\frac{c-v}{2g} + \frac{d}{v}\right] M\gamma$$

$$= 2\left[h - \sqrt{(hh')} - \frac{d}{2}\sqrt{\frac{h}{h'}}\right] f\gamma.$$

189. §.

Für Räder im graden Gerinne erhält man as mechanische Moment

$$Pv = \frac{cv - v^2}{2g}$$

die Richtung des Wassers eingetauchten Theile der Schaufel,

c die mittlere Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers, und

v die Geschwindigkeit des Schwerpunkts der eingetauchten Schaufel,

so ist anzunehmen, daß bei denjenigen unterschlächtigen Wasserrädern, wo die Schaufeln hinlänglich hoch sind und nicht zu weit von einander abstehen, sämmtliches Wasser zum Stoße gelange, weil nur ein unbeträchtlicher Theil davon, der die äußersten Enden der tiefsten Schaufeln nicht trifft, ohne zu stoßen abfließen wird. In diesem Falle kann daher die Wassermenge $M = cf$ so angesehen werden, als wenn sie mit der Geschwindigkeit $c - v$ gegen die Schaufeln anschlägt, weshalb der relative Stoß nach 169. §. II. in Rechnung kommt. Hienach ist für unterschlächtige Wasserräder im geschlossenen Gerinne ohne Kröpfung

I. $$P = \frac{c-v}{2g} M\gamma$$
$$= \frac{(c-v)c}{2g} f\gamma$$

Setzt man daß

h und h′ die den Geschwindigkeiten c und v zugehörigen Höhen sind, so ist

$$c = 2\sqrt{gh} \text{ und } v = 2\sqrt{gh'}$$

daher auch

$$P = 2[h - \sqrt{(hh')}] f\gamma$$

Für Schiffmühlenräder im offenen Strome, ist 171. §.

II. $$P = \frac{c-v}{4g} M\gamma$$
$$= \frac{(c-v)c}{4g} f\gamma$$
$$= [h - \sqrt{(hh')}] f\gamma$$

Hat das Gerinne einen Kropf, und es ist

d die vertikale Höhe des wasserhaltenden Bogens (184. §.)

kommt mit Beibehaltung der angenommenen ezeichnung, außer dem Stoße gegen die Schau-
ln am Anfange des Kropfs,

$$= \frac{c-v}{2g} M\gamma$$

ch der Druck des Wassers hinzu, welches sich
t wasserhaltenden Bogen befindet. Nun weichen
: Schaufeln mit der Geschwindigkeit v aus, wel-
es zugleich die Geschwindigkeit des abfliessenden
Jassers ist; es wird daher das im Kropfe befind-
he Wasser, wie ein schwerer Körper auf die
mdrehung des Rades wirken. Den Querschnitt
eser drückenden Wassersäule findet man $= \frac{M}{v}$
her das Gewicht derselben

$$= d \frac{M}{v} \gamma$$

rausgesetzt, daß unter M diejenige Wassermenge
rstanden wird, welche auf die Schaufeln trift,
nd daß das Wasser, welches durch den Spiel-
um zwischen Rad und Gerinne verloren geht,
gezogen worden. Hienach ist die Kraft am
ropfrade

$$\text{III.} \quad P = \left[\frac{c-v}{2g} + \frac{d}{v}\right] M\gamma$$

$$= 2\left[h - \sqrt{(hh')} - \frac{d}{2}\sqrt{\frac{h}{h'}}\right] f\gamma.$$

189. §.

Für Räder im graden Gerinne erhält man
as mechanische Moment

$$Pv = \frac{cv - v^2}{2g} M\gamma$$

dieses wird am größten, wenn wie 182. §. $v = \frac{1}{2} c$ ist, d. h. die Geschwindigkeit der Schaufeln muß halb so groß als die Geschwindigkeit des Wassers seyn, wenn das mechanische Moment am größten werden soll.

Nun ist $c = 2\sqrt{g}\sqrt{h}$ also $v = \sqrt{g}\sqrt{h}$ daher wenn die Geschwindigkeit der Schaufeln halb so groß als die des Rades ist, so findet man das mechanische Moment

$$Pv = \frac{1}{2} h\, M\gamma.$$

Für Räder in Kropfgerinnen ist

$$Pv = \left[\frac{cv - v^2}{2g} + d\right] M\gamma$$

in so fern nun die Höhe des wasserhaltenden Bogens im Kropfe, oder d unveränderlich ist, wird das mechanische Moment ebenfalls ein Maximum, wenn $v = \frac{1}{2} c$ ist; dies giebt

$$Pv = [\tfrac{1}{2} h + d]\, M\gamma.$$

190. §.

Um die Effekte dieser beiden Räder mit einander zu vergleichen, so setze man daß beide einerlei ganzes Gefälle H und Wassermenge M hätten, so ist $H = h + d$ daher $\frac{1}{2} h + d = \frac{1}{2} H + \frac{1}{2} d$ und man erhält das mechanische Moment beim Rade im graden Gerinne

$$Pv = \tfrac{1}{2} H \,.\, M\gamma$$

und beim Rade im Kropfgerinne

$$Pv = [\tfrac{1}{2} H + \tfrac{1}{2} d]\, M\gamma.$$

Offenbar ist unter übrigens gleichen Umständen der letzte Effekt größer als der erste und es folgt daraus, daß Räder im Kropfgerinne (wenn sonst das Gefälle zureicht), unter übrigens gleichen Umständen, weit vortheilhafter, als in graden Gerinnen sind.

Hieraus erklärt sich auch, weshalb die Müller wo es irgend nur thunlich ist, bei ihren Gerinnen einen Kropf anbringen, weil sie hiedurch offenbar einen größern Effekt erhalten, da sie sonst wegen des schwierigern Baues, den Kropf sehr gern weglassen würden.

Zu mehrerer Ueberzeugung, daß bei eben derselben Wassermenge und gleichem Gefälle, die Kropfräder einen größern Effekt geben, als Räder in graden Gerinnen, können die Banks'schen Versuche *) dienen. Unter übrigens gleichen Umständen und bei unverändertem Stande des Oberwassers, strömte in allen Versuchen eine gleiche Wassermenge gegen die Schaufeln des Wasserrades.

1. Versuch. Das Wasser strömt gegen die unterste Stelle der Schaufeln und wirkt wie bei einem Rade im graden Gerinne. Die Zahl der Umläufe des Wasserrades in einer Minute, war 8,2.

2. Versuch. Das Wasser fiel nahe am Ende des wagerechten Durchmessers auf die Schaufeln und drehte es in einer Minute 15,19 mal um.

3. Versuch. Dieselbe Wassermenge floß 45 Grad vom Scheitel des Rades auf die Schaufeln und bewirkte in einer Minute 17,26 Umläufe.

4. Versuch. Das Wasser wurde wie bei einem oberschlächtigen Rade auf dessen Scheitel geleitet. Das Wasserrad machte 18,46 Umläufe in einer Minute

Vergleicht man die gefundene Anzahl der Umläufe des Wasserrades, welche in den vorstehenden Versuchen bewirkt wurde, mit einander, so verhält sich

8,2 : 15,19 : 17,26 : 18,46 wie
100 : 185 : 210 : 255.

---

*) J. Banks Abhandlung über die Mühlenwerke. Aus dem Englischen übers. von C. G. Zimmermann. Berlin 1799. S. 172 u. f.

dieses wird am größten, wenn wie 182. §. $v = \frac{1}{2} c$ ist, d. h. die Geschwindigkeit der Schaufeln muß halb so groß als die Geschwindigkeit des Wassers seyn, wenn das mechanische Moment am größten werden soll.

Nun ist $c = 2\sqrt{g}\sqrt{h}$ also $v = \sqrt{g}\sqrt{h}$ daher wenn die Geschwindigkeit der Schaufeln halb so groß als die des Rades ist, so findet man das mechanische Moment

$$Pv = \tfrac{1}{2} h\ M\gamma.$$

Für Räder in Kropfgerinnen ist

$$Pv = \left[\frac{cv - v^2}{2g} + d\right] M\gamma$$

in so fern nun die Höhe des wasserhaltenden Bogens im Kropfe, oder d unveränderlich ist, wird das mechanische Moment ebenfalls ein Maximum, wenn $v = \frac{1}{2} c$ ist; dies giebt

$$Pv = [\tfrac{1}{2} h + d]\ M\gamma.$$

190. §.

Um die Effekte dieser beiden Räder mit einander zu vergleichen, so setze man daß beide einerlei ganzes Gefälle H und Wassermenge M hätten, so ist $H = h + d$ daher $\frac{1}{2} h + d = \frac{1}{2} H + \frac{1}{2} d$ und man erhält das mechanische Moment beim Rade im graden Gerinne

$$Pv = \tfrac{1}{2} H\ .\ M\gamma$$

und beim Rade im Kropfgerinne

$$Pv = [\tfrac{1}{2} H + \tfrac{1}{2} d]\ M\gamma.$$

Offenbar ist unter übrigens gleichen Umständen der letzte Effekt größer als der erste und es folgt daraus, daß Räder im Kropfgerinne (wenn sonst das Gefälle zureicht), unter übrigens gleichen Umständen, weit vortheilhafter, als in graden Gerinnen sind.

Hieraus erklärt sich auch, weshalb die Müller o es irgend nur thunlich ist, bei ihren Gerinnen en Kropf anbringen, weil sie hiedurch offenbar en größern Effekt erhalten, da sie sonst wegen s schwierigern Baues, den Kropf sehr gern wegssen würden.

Zu mehrerer Ueberzeugung, daß bei eben derselben Wassermenge und gleichem Gefälle, die Kropfräder einen größern Effekt geben, als Räder in graden Gerinnen, können die Banks'schen Versuche *) dienen. Unter übrigens gleichen Umständen und bei unverändertem Stande des Oberwassers, strömte in allen Versuchen eine gleiche Wassermenge gegen die Schaufeln des Wasserrades.

1. Versuch. Das Wasser strömt gegen die unterste Stelle der Schaufeln und wirkt wie bei einem Rade im graden Gerinne. Die Zahl der Umläufe des Wasserrades in einer Minute, war 8,2.

2. Versuch. Das Wasser fiel nahe am Ende des wagerechten Durchmessers auf die Schaufeln und drehte es in einer Minute 15,19 mal um.

3. Versuch. Dieselbe Wassermenge floß 45 Grad vom Scheitel des Rades auf die Schaufeln und bewirkte in einer Minute 17,26 Umläufe.

4. Versuch. Das Wasser wurde wie bei einem oberschlächtigen Rade auf dessen Scheitel geleitet. Das Wasserrad machte 18,46 Umläufe in einer Minute

Vergleicht man die gefundene Anzahl der Umläufe des Wasserrades, welche in den vorstehenden Versuchen bewirkt wurde, mit einander, so verhält sich

8,2 : 15,19 : 17,26 : 18,46 wie
100 : 185 : 210 : 255.

---

*) J. Banks Abhandlung über die Mühlenwerke. Aus m Englischen übers. von C. G. Zimmermann. Berlin '99. S. 172 u. f.

Außer obigen führt Herr Banks noch mehrere Versuche an, die ähnliche Resultate geben. Auch sehe man hierüber:

Mémoire, dans lequel on démontre que l'eau d'une chûte destinée à faire mouvoir quelque machine, moulin ou autre, peut toujours produire beaucoup plus d'effet en agissant par son poids qu'en aggissant par son choc etc. Par M. de *Parcieux*. Mém. de l'acad. roy. des scienc. de Paris, année 1754. à Paris, p. 603 etc.

191. §.

Hängen zwei Räder in einem horizontalen Gerinne hintereinander, so können sie nicht mit gleicher Geschwindigkeit umgehen, wenn ihre Effekte gleich seyn sollen, weil das vom ersten Rade abfließende Wasser, das zweite mit einer kleinern Geschwindigkeit trift als das erste.

Mit Beibehaltung der vorstehenden Bezeichnung sei

c die Geschwindigkeit des Wassers welches gegen das erste Rad strömt,

v die Geschwindigkeit des ersten Rades,

v' die Geschwindigkeit des zweiten Rades,

so ist das mechanische Moment des ersten Rades

$$= v\,(c - v)\,\frac{M\gamma}{2g}$$

Nachdem das Wasser seinen Stoß gegen das erste Rad verrichtet hat, behält es aber nur noch die Geschwindigkeit v, mit welcher es gegen das zweite Rad strömt. Es ist daher das mechanische Moment des zweiten Rades

$$= v'\,(v - v')\,\frac{M\gamma}{2g}$$

Zur Hervorbringung des größten Effekts bei dem zweiten Rade wird erfordert, daß $v' = \frac{1}{2}v$

ei, also ist das mechanische Moment des zweiten Rades

$$v'(v-v')\frac{M\gamma}{2g} = \frac{v^2}{4}\frac{M\gamma}{2g}$$

und weil beide Räder gleichen Effekt hervorbringen sollen

$$v(c-v)\frac{M\gamma}{2g} = \frac{v^2}{4}\frac{M\gamma}{2g} \text{ oder}$$

$$v(c-v) = \frac{1}{4}v^2 \text{ also}$$

$$(c-v) = \frac{1}{4}v \text{ daher}$$

$$v = \frac{4}{5}c$$

d. h. wenn zwei Räder hintereinander in einem Gerinne hängen, so wird erfordert daß die Geschwindigkeit des ersten Rades ⅘ von der Geschwindigkeit des zuströmenden Wassers, und die Geschwindigkeit des zweiten Rades halb so groß als die des ersten sei.

Für das mechanische Moment des ersten Rades findet man, wenn $\frac{4}{5}c$ statt v gesetzt wird

$$\frac{2c^2}{25g}M\gamma$$

und für das mechanische Moment des zweiten Rades

$$\frac{v^2}{8g}M\gamma = \frac{\frac{16}{25}c^2}{8g}M\gamma = \frac{2c^2}{25g}M\gamma$$

wie erfordert wird. Es ist daher die Summe der mechanischen Momente für beide Räder

$$\frac{4c^2}{25g}M\gamma = \frac{16}{25}hM\gamma$$

Hätte man, anstatt beide Räder hintereinander zu legen, solche nebeneinander in abgesonderte Gerinne gelegt, oder statt zweier Räder nur ein Rad angeordnet, so wäre bei einerlei Gefälle und und unveränderter Wassermenge das mechanische

Außer obigen führt Herr Banks noch mehrere Versuche an, die ähnliche Resultate geben. Auch sieh man hierüber:

Mémoire, dans lequel on démontre que l'eau d'une chûte destinée à faire mouvoir quelque machine, moulin ou autre, peut toujours produire beaucoup plus d'effet en agissant par son poids qu'en aggissant par son choc etc. Par M. de *Parcieux*. Mém. de l'acad. roy. des scienc. de Paris, année 1754. à Paris, p. 603 etc.

191. §.

Hängen zwei Räder in einem horizontalen Gerinne hintereinander, so können sie nicht mit gleicher Geschwindigkeit umgehen, wenn ihre Effekte gleich seyn sollen, weil das vom ersten Rade abfließende Wasser, das zweite mit einer kleinern Geschwindigkeit trift als das erste.

Mit Beibehaltung der vorstehenden Bezeichnung sei

c die Geschwindigkeit des Wassers welches gegen das erste Rad strömt,

v die Geschwindigkeit des ersten Rades,

v' die Geschwindigkeit des zweiten Rades,

so ist das mechanische Moment des ersten Rades

$$= v\,(c - v)\,\frac{M\gamma}{2g}$$

Nachdem das Wasser seinen Stoß gegen das erste Rad verrichtet hat, behält es aber nur noch die Geschwindigkeit v, mit welcher es gegen das zweite Rad strömt. Es ist daher das mechanische Moment des zweiten Rades

$$= v'\,(v - v')\,\frac{M\gamma}{2g}$$

Zur Hervorbringung des größten Effekts bei dem zweiten Rade wird erfordert, daß $v' = \frac{1}{2}v$

, also ist das mechanische Moment des zweiten
ades

$$v' (v - v') \frac{M\gamma}{2g} = \frac{v^2}{4} \frac{M\gamma}{2g}$$

d weil beide Räder gleichen Effekt hervorbringen
len

$$v\,(c-v) \frac{M\gamma}{2g} = \frac{v^2}{4} \frac{M\gamma}{2g} \text{ oder}$$

$$v\,(c-v) = \tfrac{1}{4} v^2 \text{ also}$$

$$(c-v) = \tfrac{1}{4} v \text{ daher}$$

$$v = \tfrac{4}{5} c$$

h. wenn zwei Räder hintereinander in
rem Gerinne hängen, so wird erfordert
ß die Geschwindigkeit des ersten Rades
von der Geschwindigkeit des zuströmen-
n Wassers, und die Geschwindigkeit
s zweiten Rades halb so groß als die
s ersten sei.

Für das mechanische Moment des ersten
ades findet man, wenn $\frac{4}{5}$ c statt v gesetzt wird

$$\frac{2c^2}{25g} M\gamma$$

ld für das mechanische Moment des zwei-
n Rades

$$\frac{v^2}{8g} M\gamma = \frac{\frac{16}{25}c^2}{8g} M\gamma = \frac{2c^2}{25g} M\gamma$$

ie erfordert wird. Es ist daher die Summe
r mechanischen Momente für beide Räder

$$\frac{4c^2}{25g} M\gamma = \tfrac{16}{25} h M\gamma$$

ätte man, anstatt beide Räder hintereinander
legen, solche nebeneinander in abgesonderte
erinne gelegt, oder statt zweier Räder nur ein
ad angeordnet, so wäre bei einerlei Gefälle und
d unveränderter Wassermenge das mechanische

Moment bei einem Rade, oder für zwei Räder nebeneinander

$$= \frac{1}{2} h M\gamma$$

Zieht man diesen Effekt von dem bei zwei hintereinander liegenden Rädern ab, so ergiebt sich

$$\frac{16}{25} h M\gamma - \frac{1}{2} h M\gamma = \frac{7}{50} h M\gamma$$

folglich ist der Effekt bei zwei hintereinander liegenden Rädern in einem Gerinne, merklich größer, als wenn diese Räder nebeneinander angeordnet werden.

192. §.

Wenn in einem horizontalen Gerinne drei Räder hintereinander liegen, welche gleichen Effekt hervorbringen sollen, und es ist mit Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnung

v'' die Geschwindigkeit des dritten Rades, so findet man

das mechanische Mom. des ersten Rades $= v(c-v)\frac{M\gamma}{2g}$

das mechan. Mom. des zweiten Rades $= v'(v-v')\frac{M\gamma}{2g}$

das mechan. Mom. des dritten Rades $= v''(v'-v'')\frac{M\gamma}{2g}$

Der Effekt des dritten Rades wird am größten, wenn $v'' = \frac{1}{2} v'$ ist; dies giebt das mechanische Moment des dritten Rades $= \frac{1}{4} v'v' \frac{M\gamma}{2g}$; weil aber sämmtliche Effekte einander gleich seyn sollen, so wird

$$\frac{1}{4} v'v' \frac{M\gamma}{2g} = v'(v-v')\frac{M\gamma}{2g} \text{ oder}$$
$$v' = \frac{4}{5} v$$

und hieraus das mechanische Moment des zweiten Rades

$$= \frac{4v^2}{25} \frac{M\gamma}{2g}.$$

es ist aber auch

$$\frac{4v^2}{25}\,\frac{M\gamma}{2g} = v\,(c-v)\,\frac{M\gamma}{2g} \text{ oder}$$

$$\frac{4v}{25} = c - v \text{ daher}$$

$$v = \tfrac{25}{29}\,c$$

nd das mechanische Moment des ersten Rades

$$= \frac{100\,c^2}{841}\,\frac{M\gamma}{2g} = \frac{200}{841}\,hM\gamma$$

olglich der gesammte Effekt aller drei Räder

$$= \tfrac{600}{841}\,hM\gamma$$

Dabei ist die Geschwindigkeit

des ersten Rades $v = \frac{25}{29}\,c$

des zweiten Rades $v' = \frac{20}{29}\,c$

des dritten Rades $v'' = \frac{10}{29}\,c$.

Wären statt drei Räder nur zwei hintereinan-er angeordnet, oder auch statt dieser nur eins, so äßt sich eben so wohl wie für nebeneinander lie-ende Räder beweisen, daß der Effekt geringer ist, nd daß mehrere hintereinander liegende Räder ei-en größern Effekt hervorbringen. Der Vortheil er hintereinander liegenden Räder gegen die ne-eneinander liegenden, wird bei übrigens gleichen Umständen noch einleuchtender, wenn man den Ver-ust des Wassers in Erwägung zieht, der durch en Raum zwischen dem Rade und Gerinne ent-ehet, wo offenbar bei nebeneinander liegenden Rä-ern, mehr Wasser ungenutzt verloren geht, als bei intereinander liegenden.

Ist aber gleich das mechanische Moment für en Fall kleiner, wenn anstatt mehr [illegible] terein-nder liegenden Räder, nur ein [illegible] ad angeordnet wird, so blei[illegible] wägen, daß wenn viele M[illegible]

U

Moment bei einem Rade, oder für zwei Räder nebeneinander

$$= \frac{1}{2} h M \gamma$$

Zieht man diesen Effekt von dem bei zwei hintereinander liegenden Rädern ab, so ergiebt sich

$$\frac{16}{25} h M \gamma - \frac{1}{2} h M \gamma = \frac{7}{50} h M \gamma$$

folglich ist der Effekt bei zwei hintereinander liegenden Rädern in einem Gerinne, merklich größer, als wenn diese Räder nebeneinander angeordnet werden.

192. §.

Wenn in einem horizontalen Gerinne drei Räder hintereinander liegen, welche gleichen Effekt hervorbringen sollen, und es ist mit Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnung

v'' die Geschwindigkeit des dritten Rades, so findet man

das mechanische Mom. des ersten Rades $= v(c-v)\frac{M\gamma}{2g}$

das mechan. Mom. des zweiten Rades $= v'(v-v')\frac{M\gamma}{2g}$

das mechan. Mom. des dritten Rades $= v''(v'-v'')\frac{M\gamma}{2}$

Der Effekt des dritten Rades wird am größten, wenn $v'' = \frac{1}{2} v'$ ist; dies giebt das mechanische Moment des dritten Rades $= \frac{1}{4} v'v' \frac{M\gamma}{2g}$; weil aber sämmtliche Effekte einander gleich seyn sollen, so wird

$$\frac{1}{4} v'v' \frac{M\gamma}{2g} = v'(v-v')\frac{M\gamma}{2g} \text{ oder}$$
$$v' = \frac{4}{5} v$$

und hieraus das mechanische Moment des zweiten Rades

$$= \frac{4v^2}{25} \cdot \frac{M\gamma}{2g}.$$

Es

is ist aber auch

$$\frac{4v^2}{25}\,\frac{M\gamma}{2g} = v\,(c-v)\,\frac{M\gamma}{2g} \text{ oder}$$

$$\frac{4v}{25} = c - v \text{ daher}$$

$$v = \tfrac{25}{29}\,c$$

nd das mechanische Moment des ersten Rades

$$= \frac{100\,c^2}{841}\,\frac{M\gamma}{2g} = \frac{200}{841}\,hM\gamma$$

olglich der gesammte Effekt aller drei Räder

$$= \tfrac{600}{841}\,hM\gamma$$

)abei ist die Geschwindigkeit

des ersten Rades $v = \frac{25}{29}\,c$

des zweiten Rades $v' = \frac{20}{29}\,c$

des dritten Rades $v'' = \frac{10}{29}\,c$.

Wären statt drei Räder nur zwei hintereinan-er angeordnet, oder auch statt dieser nur eins, so ißt sich eben so wohl wie für nebeneinander lie-ende Räder beweisen, daß der Effekt geringer ist, nd daß mehrere hintereinander liegende Räder ei-en größern Effekt hervorbringen. Der Vortheil r hintereinander liegenden Räder gegen die ne-meinander liegenden, wird bei übrigens gleichen Imständen noch einleuchtender, wenn man den Ver-ist des Wassers in Erwägung zieht, der durch n Raum zwischen dem Rade und Gerinne ent-eht, wo offenbar bei nebeneinander liegenden Rä-ern, mehr Wasser ungenutzt verloren geht, als bei intereinander liegenden.

Ist aber gleich das mechanische Moment für n Fall kleiner, wenn anstatt mehrerer hinterein-nder liegenden Räder, nur ein einziges Wasser-ad angeordnet wird, so bleibt hiebei doch zu er-ägen, daß wenn viele Mühlengänge durch ein

Rad getrieben werden, weniger Reibung entsteht und die Maschine einfacher werden kann, wodurch man öfters eine ansehnliche Kostenersparung bewirkt, deren Aufwand der größere Effekt nicht entspricht.

193. §.

Bei den vorhergehenden Untersuchungen ist immer unter M diejenige Wassermenge verstanden worden, welche in jeder Sekunde gegen die Schaufeln schlägt. Sie ist von derjenigen verschieden welche in jeder Sekunde durch die Schützöfnung läuft und nach dem Rade strömt, weil ein Theil derselben durch den Spielraum ungenutzt verloren geht. Kennt man die Höhe des Spielraums unter dem Rade $= \sigma$, welcher eigentlich nicht mehr als einen halben Zoll betragen sollte, so kann man den Verlust von dem zuströmenden Wasser dadurch in Rechnung bringen, daß man die Länge der Schaufeln $= l$ mit σ und der Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers multiplizirt. Dies giebt den Wasserverlust

$$= \sigma l c$$

Hiebei ist zwar auf den größern Spielraum welcher unter dem Rade entstehet, wenn zwei Schaufeln gleichweit von demjenigen Halbmesser des Rades abstehen, welcher auf dem graden Gerinneboden senkrecht ist, nicht Rücksicht genommen, eben so wenig wie auf den Wasserverlust auf beiden Seiten des Rades. Was diesen letzten betrift, so wird er schon durch die Wasserbänke (183. §.) ansehnlich vermindert, und man wird deshalb hinlänglich genau rechnen, wenn man annimmt daß das Wasser durch den untern Spielraum des Rades, mit der Geschwindigkeit c abfließt, weil das Rad nur die Geschwindigkeit v hat, wodurch schon eine beträchtliche Verzögerung des frei durchfließen-

des Wassers entstehet. Noch größer wird aber diese Verzögerung bei einem so schmalen Raume, wegen der Adhäsion zwischen dem Wasser und Gerinneboden, weshalb man bei der vorstehenden Regel wenig fehlen wird.

194. §.

Die Theorie der unterschlächtigen Räder, wenn auf alle dabei vorkommende Umstände Rücksicht genommen werden soll, ist noch nicht dahin gediehen, daß man in der Ausübung sehr scharf zutreffende Resultate erwarten kann, und man wird sich in den meisten Fällen mit einer Annäherung begnügen müssen. Es ist indessen nicht undienlich, die vorzüglichsten Schriften in welchen man eigenthümliche Untersuchungen über diesen Gegenstand findet, hier anzuführen.

Sur la plus grande perfection possible des machines, par M. *Parent*. Mémoires de l'academie de Paris, année 1704. Ed. Bat. p. 433.

J. A. *Euleri* Enodatio quaestionis, quomodo vis aquae cum maximo lucro ad molas circumagendas aliave opera perficienda impendi possit. Goett. 1754.

De *Borda*, sur les roues hydrauliques a. a. Orte. (169. §.)

Nouveaux Mémoires de l'acad. royale des Sciences et Belles-lettres à Berlin 1775. Expériences et Rémarques sur les moulins que l'eau meut par en bas dans une direction horisontale. Par M. *Lambert*.

(Hievon findet man eine Uebersetzung in der Sammlung nützlicher Aufsätze und Nachrichten die Baukunst betreffend. Jahrg. 1797. 2. Bd. Berlin.)

G. S. *Klügel*, Theoria nova motus machinarum, vi aquae in rotam subtus incurrentis moven-

darum; in den Commentationis Soc. R. Scient. Goett. Vol. IX. ad 1787—88. Cl. Math. p. 26.

(Eine Uebersetzung von Herrn Lempe, befindet sich im Magazin für die Bergbaukunde, XI. Theil, 1795).

Langsdorf, angef. Hydraulik, 16. Kapitel. S. 266. (1794).

Gerstner's, angef. Abhandlung vom Wasserstoße in Schußgerinnen (1795).

Hutton's, angef. Dictionary, Art. Mill. pag. 110. (1795).

(Das Resultat der Hutton'schen Untersuchung giebt ebenfalls wie die Borda- und Gerstner'sche Theorie $\frac{1}{2}c = v$.)

Langsdorf, angeführte Maschinenlehre. 1ter Band. 2. Th. 5. Kap. S. 152. (1797.)

(Von dieser wichtigen Schrift ist so eben der zweite Band erschienen, welcher lehrreiche Untersuchungen über die angeführten Gegenstände enthält.)

J. Banks, angef. Abhandlung über die Mühlenwerke, übers. von C. G. Zimmermann.

Vierzehntes Kapitel.

Von den Eigenschaften der Luft in Beziehung auf hydraulische Maschinen.

195. §.

Die uns umgebende Luft, welche wir zur Unterscheidung von andern Luftarten, atmosphärische Luft (Aër atmosphaericus, *Air de l'atmosphère*) nennen, besitzt die Fähigkeit, daß wenn ein Theil derselben eingeschlossen ist, solcher durch einen äußern Druck in einen engern Raum gebracht werden, und nach Aufhebung des Drucks, sich wieder so weit ausbreiten kann, als ihm verstattet ist. Diese Eigenschaft nennt man ihre Elastizität oder Expansibilität (Expansio, *Expansion*).

Die Luft hat unter gewissen Umständen auf die Bewegung des Wassers und die hydraulischen Maschinen einen wesentlichen Einfluß, so daß hier diejenigen Eigenschaften derselben kurz auseinander gesetzt werden sollen, welche mit den nachfolgenden Lehren in näherer Verbindung stehen.

196. §.

Das Gewicht der Luft ist in verschiedenen Abständen vom Mittelpunkte der Erde und nach dem Grade ihrer Wärme verschieden. Nahe an der Erdoberfläche rechnet man für einen mittlern Barometerstand von $27\frac{1}{2}$ pariser Zoll und bei einer mittleren Temperatur von 10 Grad nach Reaumur, daß die atmosphärische Luft 800 mal leichter als Wasser ist. Nun wiegt der brandenburgische Kubikfuß destillirtes Wasser 65,9368 Pfund

darum; in den Commentationis Soc. R. Scient. Goett. Vol. IX. ad 1787—88. Cl. Math. p. 26.
(Eine Uebersetzung von Herrn Lempe, befindet sich im Magazin für die Bergbaukunde, XI. Theil, 1795).

Langsdorf, angef. Hydraulik, 16. Kapitel. S. 266. (1794).

Gerstner's, angef. Abhandlung vom Wasserstoße in Schußgerinnen (1795).

Hutton's, angef. Dictionary, Art. Mill. pag. 110. (1795).
(Das Resultat der Hutton'schen Untersuchung giebt ebenfalls wie die Borda- und Gerstner'sche Theorie $\frac{1}{2}c = v$.)

Langsdorf, angeführte Maschinenlehre. 1ter Band. 2. Th. 5. Kap. S. 152. (1797.)
(Von dieser wichtigen Schrift ist so eben der zweite Band erschienen, welcher lehrreiche Untersuchungen über die angeführten Gegenstände enthält.)

J. Banks, angef. Abhandlung über die Mühlenwerke, übers. von C. G. Zimmermann.

Vierzehntes Kapitel.

Von den Eigenschaften der Luft in Beziehung auf hydraulische Maschinen.

195. §.

Die uns umgebende Luft, welche wir zur Unterscheidung von andern Luftarten, atmosphärische Luft (Aër atmosphaericus, *Air de l'atmosphère*) nennen, besitzt die Fähigkeit, daß wenn ein Theil derselben eingeschlossen ist, solcher durch einen äußern Druck in einen engern Raum gebracht werden, und nach Aufhebung des Drucks, sich wieder so weit ausbreiten kann, als ihm verstattet ist. Diese Eigenschaft nennt man ihre Elastizität oder Expansibilität (Expansio, *Expansion*).

Die Luft hat unter gewissen Umständen auf die Bewegung des Wassers und die hydraulischen Maschinen einen wesentlichen Einfluß, so daß hier diejenigen Eigenschaften derselben kurz auseinander gesetzt werden sollen, welche mit den nachfolgenden Lehren in näherer Verbindung stehen.

196. §.

Das Gewicht der Luft ist in verschiedenen Abständen vom Mittelpunkte der Erde und nach dem Grade ihrer Wärme verschieden. Nahe an der Erdoberfläche rechnet man für einen mittlern Barometerstand von $27\frac{1}{2}$ pariser Zoll und bei einer mittleren Temperatur von 10 Grad nach Reaumur, daß die atmosphärische Luft 800 mal leichter als Wasser ist. Nun wiegt der brandenburgische Kubikfuß destillirtes Wasser 65,9368 Pfund der-

liner Handelsgewicht *), daher ist das Gewicht von einem brandenburgischen Kubikfuß atmosphärischer Luft

$\frac{65,9368}{800}$ = 0,08242 berl. Pf. = $\frac{1}{12}$ Pf. beinahe
= $2\frac{7}{11}$ Loth, oder
$\frac{68,6656}{890}$ = 0,082582 Pf. cöllnisch Markgewicht.

In höhern Gegenden wird zwar das Gewicht der Luft geringer, so daß wenn man sich 75 Fuß über das Meer erhebt, bei übrigens gleichen Umständen, das spezifische Gewicht der Luft um etwa $\frac{1}{330}$ vermindert wird.

197. §.

In ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß, setzt man eine etwa 3 Fuß lange mit Quecksilber gefüllte und an dem einen Ende verschlossene Glasröhre, dergestalt, daß das offene Ende derselben mit dem Quecksilber im Gefäße communicire, so wird die Quecksilbersäule nur so weit auslaufen, daß noch eine Höhe von etwa 29 brandenburgische Zoll über der Oberfläche im Gefäße stehen bleibt. Man kann hieraus schließen daß die gewöhnliche atmosphärische Luft, die Körper welche sie umgiebt so stark drückt, als eine Quecksilbersäule von 29 Zoll Höhe. Nun ist das Quecksilber $13\frac{1}{2}$ bis 14 mal schwerer als Wasser, daher steht der Druck der Atmosphäre mit dem Drucke einer Wassersäule im Gleichgewichte, deren Höhe 32 bis 34 brandenburgische Fuß beträgt.

Hienach kann man den Druck der Atmosphäre auf einen Quadratfuß, 2110 berliner Pfund und

---

*) Meine angeführte Vergleichung der Maaße und Gewichte, 28. §.

auf einen Quadratzoll, $14\frac{3}{4}$ dergleichen Pfunde rechnen.

Anmerk. Durch den Druck der Luft läßt sich erklären, weshalb eine Flüssigkeit aus dem Stechheber nicht ausläuft. Die Handspritze, der Blasebalg, der Windkessel und mehrere Einrichtungen gründen sich hierauf.

198. §.

Wenn sich Luft in einem Gefäße befindet, so vergrößert sich, den Erfahrungen zu Folge, ihre Elastizität und Dichtigkeit bei unveränderter Wärme, nach dem Verhältnisse der zusammendrückenden Kraft; auch verhalten sich die Elastizitäten der Luft oder die Kräfte mit welcher sie gegen gleich große Wände eines Gefäßes drückt, umgekehrt wie die Räume, die gleiche Luftmengen einnehmen. Mariottens Versuche *) bestätigen dies. Hieraus folgt, daß sich die Elastizitäten gleich warmer und ungleich dichter Luftmassen, sehr nahe wie ihre Dichtigkeiten verhalten, welches man das Mariottesche Gesetz von der Dichtigkeit der Luft nennt.

199. §.

Die Kraft mit welcher die Luft dem Zusammendrücken widerstehet, nennt man ihre absolute Elastizität (Elasticitas absoluta, *Elasticité absolue*), und als Maaß derselben, kann die Höhe einer Wassersäule dienen, welche mit dem Gegendrucke der Luft im Gleichgewichte ist.

---

*) Oeuvres de M. *Mariotte*, à Leyde 1717. Discours de la nature de l'air, p. 149 etc. Traité du mouvement des eaux ... corps fluides, II. Partie, 2 Disc. p.

liner Handelsgewicht *), daher ist das Gewicht von einem brandenburgischen Kubikfuß atmosphärischer Luft

$\frac{65,9368}{800}$ = 0,08242 berl. Pf. = $\frac{1}{12}$ Pf. beinahe
= $2\frac{7}{11}$ Loth, oder

$\frac{68,6656}{890}$ = 0,082582 Pf. cöllnisch Markgewicht.

In höhern Gegenden wird zwar das Gewicht der Luft geringer, so daß wenn man sich 75 Fuß über das Meer erhebt, bei übrigens gleichen Umständen, das spezifische Gewicht der Luft um etwa $\frac{1}{330}$ vermindert wird.

197. §.

In ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß, setze man eine etwa 3 Fuß lange mit Quecksilber gefüllte und an dem einen Ende verschlossene Glasröhre, dergestalt, daß das offene Ende derselben mit dem Quecksilber im Gefäße communicire, so wird die Quecksilbersäule nur so weit auslaufen, daß noch eine Höhe von etwa 29 brandenburgische Zoll über der Oberfläche im Gefäße stehen bleibt. Man kann hieraus schließen daß die gewöhnliche atmosphärische Luft, die Körper welche sie umgiebt so stark drückt, als eine Quecksilbersäule von 29 Zoll Höhe. Nun ist das Quecksilber $13\frac{1}{2}$ bis 14 mal schwerer als Wasser, daher steht der Druck der Atmosphäre mit dem Drucke einer Wassersäule im Gleichgewichte, deren Höhe 32 bis 34 brandenburgische Fuß beträgt.

Hienach kann man den Druck der Atmosphäre auf einen Quadratfuß, 2110 berliner Pfund und

*) Meine angeführte Vergleichung der Maaße und Gewichte, 28. §.

auf einen Quadratzoll, 14⅔ dergleichen Pfunde rechnen.

Anmerk. Durch den Druck der Luft läßt sich erklären, weshalb eine Flüssigkeit aus dem Stechheber nicht ausläuft. Die Handspritze, der Blasebalg, der Windkessel und mehrere Einrichtungen gründen sich hierauf.

198. §.

Wenn sich Luft in einem Gefäße befindet, so vergrößert sich, den Erfahrungen zu Folge, ihre Elastizität und Dichtigkeit bei unveränderter Wärme, nach dem Verhältnisse der zusammendrückenden Kraft; auch verhalten sich die Elastizitäten der Luft oder die Kräfte mit welcher sie gegen gleich große Wände eines Gefäßes drückt, umgekehrt wie die Räume, die gleiche Luftmengen einnehmen. Mariottens Versuche *) bestätigen dies. Hieraus folgt, daß sich die Elastizitäten gleich warmer und ungleich dichter Luftmassen, sehr nahe wie ihre Dichtigkeiten verhalten, welches man das Mariottesche Gesetz von der Dichtigkeit der Luft nennt.

199. §.

Die Kraft mit welcher die Luft dem Zusammendrücken widerstehet, nennt man ihre absolute Elastizität (Elasticitas absoluta, *Elasticité absolue*), und als Maaß derselben, kann die Höhe einer Wassersäule dienen, welche mit dem Gegendrucke der Luft im Gleichgewichte ist.

---

*) Oeuvres de M. *Mariotte*, à Leyde 1717. Discours de la nature de l'air, p. 149 etc.
Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides, II. Partie, 2 Disc. p. 380 etc.

Haben zwei Luftmassen verschiedene Dichtigkeiten und dennoch gleiche absolute Elastizität, so nennt man diejenige spezifisch elastischer, welche weniger Dichtigkeit hat. Die spezifische Elastizität bezeichnet daher die Elastizität jedes einzelnen gleich großen Lufttheilchens.

200. §.

Durch die Wärme erhalten Luftmassen die gleichen Druck leiden, eine Verstärkung der Elastizität und man kann annehmen *) daß bei einerlei Druck, die Dichtigkeit der Luft um beiläufig $\frac{1}{200}$ abnimmt, wenn das Reaumursche Thermometer um einen Grad steigt. Die Fähigkeit der Luft sich durch Wärme auszubreiten, ist größer oder geringer, nach dem Grade ihrer Feuchtigkeit oder Trockenheit, oder nach ihrem hygrometischen Zustande, daher hängt die Elastizität der Luft vom Drucke auf dieselbe, von ihrer Wärme und von ihrem hygrometischen Zustande ab.

201. §.

Der allgemeine Beweis (89. §.) für das Verhältniß der Geschwindigkeiten, womit Wasser unter verschiedenen Druckhöhen aus einem Gefäße fließt, gilt eben sowohl für Quecksilber wie für andere Flüssigkeiten. Wenn sich daher Quecksilber und Wasser in zwei verschiedenen Gefäßen befinden und die Oberflächen der Flüssigkeiten stehen in beiden gleich hoch über den Ausflußöfnungen, so werden auch die Geschwindigkeiten des Ausflusses einander gleich seyn. Wenn daher h die Druckhöhe des Wassers und c die Geschwindigkeit mit welcher dasselbe aus einem Gefäße fließt; H die Druck-

*) Prony, angeführte Neue Archit. Hydraul. 1. Theil 532. §.

öhe des Quecksilbers und C dessen Geschwindig-
it ist, so verhält sich

$$c^2 : C^2 = h : H$$

orausgesetzt, daß die Flüssigkeiten beim Ausflusse
inen Widerstand leiden.

Sind nun γ, γ' die Gewichte von einem Ku-
ikfuß Wasser und Quecksilber, so wird dadurch
ugleich das Verhältniß ihrer Dichtigkeit angezeigt
und man findet die Höhe einer Wassersäule H',
welche auf die Ausflußöfnung des Quecksilbers eben
o stark als die Quecksilbersäule drückt, oder

$$H' = \frac{H\gamma'}{\gamma}$$

Nun verhält sich auch

$$c^2 : C^2 = \frac{h\gamma'}{\gamma} : \frac{H\gamma'}{\gamma} \text{ oder}$$

$$c^2 : C^2 = \frac{h\gamma'}{\gamma} : H' \text{ folglich}$$

$$c^2 : C^2 = \frac{h}{\gamma} : \frac{H'}{\gamma'}$$

weil sich nun dieses von andern Flüssigkeiten eben
o beweisen läßt, so kann man allgemein schließen,
aß sich bei Flüssigkeiten von verschiedener
Dichtigkeit, die Quadrate der Geschwin-
igkeiten, womit dieselben auslaufen, wie
ie Höhen der Wassersäulen, welche dem
Drucke der Flüßigkeiten gegen die Aus-
lußöfnungen gleich sind, dividirt durch
ie Dichtigkeiten verhalten.

202. §.

Wenn eine elastische Flüssigkeit in einem Ge-
äße eingeschlossen ist, in welchem sich eine Öfnung
efindet, so kann man den Druck angeben, mit
welchem diese Flüssigkeit die verschlossene Öfnung
ressen würde, und solche mit dem Drucke einer

Haben zwei Luftmassen verschiedene Dichtigkeiten und dennoch gleiche absolute Elastizität, so nennt man diejenige spezifisch elastischer, welche weniger Dichtigkeit hat. Die spezifische Elastizität bezeichnet daher die Elastizität jedes einzelnen gleich großen Lufttheilchens.

200. §.

Durch die Wärme erhalten Luftmassen die gleichen Druck leiden, eine Verstärkung der Elastizität und man kann annehmen *) daß bei einerlei Druck, die Dichtigkeit der Luft um beiläufig $\frac{1}{200}$ abnimmt, wenn das Reaumursche Thermometer um einen Grad steigt. Die Fähigkeit der Luft sich durch Wärme auszubreiten, ist größer oder geringer, nach dem Grade ihrer Feuchtigkeit oder Trockenheit, oder nach ihrem hygrometischen Zustande, daher hängt die Elastizität der Luft vom Drucke auf dieselbe, von ihrer Wärme und von ihrem hygrometischen Zustande ab.

201. §.

Der allgemeine Beweis (89. §.) für das Verhältniß der Geschwindigkeiten, womit Wasser unter verschiedenen Druckhöhen aus einem Gefäße fließt, gilt eben sowohl für Quecksilber wie für andere Flüssigkeiten. Wenn sich daher Quecksilber und Wasser in zwei verschiedenen Gefäßen befinden und die Oberflächen der Flüssigkeiten stehen in beiden gleich hoch über den Ausflußöfnungen, so werden auch die Geschwindigkeiten des Ausflusses einander gleich seyn. Wenn daher h die Druckhöhe des Wassers und c die Geschwindigkeit mit welcher dasselbe aus einem Gefäße fließt; H die Druck-

*) Prony, angeführte Neue Archit. Hydraul. 1. Theil 532. §.

öhe des Quecksilbers und C dessen Geschwindig-
it ist, so verhält sich

$$c^2 : C^2 = h : H$$

orausgesetzt, daß die Flüssigkeiten beim Ausflusse
inen Widerstand leiden.

Sind nun γ, γ' die Gewichte von einem Ku-
ikfuß Wasser und Quecksilber, so wird dadurch
ugleich das Verhältniß ihrer Dichtigkeit angezeigt
nd man findet die Höhe einer Wassersäule H',
velche auf die Ausflußöfnung des Quecksilbers eben
o stark als die Quecksilbersäule drückt, oder

$$H' = \frac{H\gamma'}{\gamma}$$

Nun verhält sich auch

$$c^2 : C^2 = \frac{h\gamma'}{\gamma} : \frac{H\gamma'}{\gamma} \text{ oder}$$

$$c^2 : C^2 = \frac{h\gamma'}{\gamma} : H' \text{ folglich}$$

$$c^2 : C^2 = \frac{h}{\gamma} : \frac{H'}{\gamma'}$$

veil sich nun dieses von andern Flüssigkeiten eben
o beweisen läßt, so kann man allgemein schließen,
aß sich bei Flüssigkeiten von verschiedener
Dichtigkeit, die Quadrate der Geschwin-
igkeiten, womit dieselben auslaufen, wie
ie Höhen der Wassersäulen, welche dem
Drucke der Flüßigkeiten gegen die Aus-
lußöfnungen gleich sind, dividirt durch
ie Dichtigkeiten verhalten.

202. §.

Wenn eine elastische Flüssigkeit in einem Ge-
äße eingeschlossen ist, in welchem sich eine Öfnung
efindet, so kann man den Druck angeben, mit
velchem diese Flüssigkeit die verschlossene Öfnung
ressen würde, und solche mit dem Drucke einer

Wassersäule vergleichen. Ist alsdann das Verhältniß der Dichtigkeit dieser Flüssigkeit, zur Dichtigkeit des Wassers bekannt, so läßt sich daraus die Geschwindigkeit bestimmen, mit der die elastische Flüssigkeit bei ungeänderter Dichte und Druckhöhe ausfließen wird, wenn kein Widerstand in Absicht der Ausströmung Statt findet.

Aus der zuletzt gefundenen Proportion erhält man, wenn sich die Größen C, H′ und γ' auf die angenommene elastische Flüssigkeit beziehen

$$C^2 = \frac{c^2}{h} \frac{\gamma}{\gamma'} H'$$

oder weil $\frac{c^2}{h} = 4g$ (15. §.) so findet man die Geschwindigkeit mit welcher die Flüssigkeit ausströmt oder

$$C = 2\sqrt{\left[g \frac{\gamma}{\gamma'} H'\right]}$$

203. §.

Der senkrechte Stoß der Luft gegen eine ruhende Fläche f, wird aus ähnlichen Gründen wie 168. §. vom Quadrate der Geschwindigkeit der anstoßenden Luft, von der Größe der gestoßenen Fläche und von dem specifischen Gewichte der Luft abhängen, nur bleibt es zweifelhaft ob man

$$P = \frac{c^2}{2g} f\gamma' \text{ oder } = \frac{c^2}{4g} f\gamma'$$

annehmen soll. Die Versuche des Herrn Wasserbaudirektors Woltmann *) geben

$$P = \tfrac{4}{3} \frac{c^2}{4g} f\gamma'$$

womit auch die Schoberschen Versuche zum Theil

---

*) Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels, von Reinhard Woltmann. Hamburg 1790. S. 51.

ereinstimmen. Man kann daher, bis noch meh-
:e Versuche entweder diesen Ausdruck bestätigen
er irgend eine Modifikation nöthig machen, den-
ben beibehalten.

Nun ist (196. §.)

$$\gamma' = 0{,}08242; \frac{1}{48} = 0{,}016$$

ther die Kraft mit welcher die atmosphärische
ıft eine Fläche f senkrecht stößt

$$P = 0{,}0017583 \cdot c^2 f.$$

$$= \frac{c^2 f}{570}.$$

Anmerk. Ueber den senkrechten und schiefen Stoß der Luft hat der Ritter von Borda Versuche angestellt *), indem er an einem Hebelarm verschiedene Flächen und Körper gegen den Wind bewegte. Statt der vorhin angenommenen $\frac{4}{3}$ findet er $\frac{4}{5}$; auch nimmt nach diesen Versuchen der Widerstand nicht in dem Verhältnisse zu, wie die Fläche wächst, sondern in einem etwas größeren Verhältnisse, so daß wenn sich unter übrigens gleichen Umständen die Flächen wie 1 : 4 verhielten, so war das Verhältniß der Widerstände wie 1 : $4\frac{1}{4}$. Daß sich der senkrechte Stoß wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhalte, stimmt sehr gut mit den Versuchen; aber bei schiefen Flächen verhalten sich die Widerstände nicht wie die Quadrate von den Sinussen der Einfallswinkel, sondern näher wie die simpeln Sinusse.

---

*) Expériences sur la résistance des fluides. Par [M]. le Chevalier de *Borda*. Mémoires de l'academie [ro]yale de Paris 1763. édit. Par. p. 358.

Wassersäule vergleichen. Ist alsdann das Verhältniß der Dichtigkeit dieser Flüssigkeit, zur Dichtigkeit des Wassers bekannt, so läßt sich daraus die Geschwindigkeit bestimmen, mit der die elastische Flüssigkeit bei ungeänderter Dichte und Druckhöhe ausfließen wird, wenn kein Widerstand in Absicht der Ausströmung Statt findet.

Aus der zuletzt gefundenen Proportion erhält man, wenn sich die Größen C, H′ und γ' auf die angenommene elastische Flüssigkeit beziehen

$$C^2 = \frac{c^2}{h} \frac{\gamma}{\gamma'} H'$$

oder weil $\frac{c^2}{h} = 4g$ (15 §.) so findet man die Geschwindigkeit mit welcher die Flüssigkeit ausströmt oder

$$C = 2\sqrt{\left[g \frac{\gamma}{\gamma'} H'\right]}$$

203. §.

Der senkrechte Stoß der Luft gegen eine ruhende Fläche f, wird aus ähnlichen Gründen wie 168. §. vom Quadrate der Geschwindigkeit der anstoßenden Luft, von der Größe der gestoßenen Fläche und von dem specifischen Gewichte der Luft abhängen, nur bleibt es zweifelhaft ob man

$$P = \frac{c^2}{2g} f\gamma' \text{ oder } = \frac{c^2}{4g} f\gamma'$$

annehmen soll. Die Versuche des Herrn Wasserbaudirektors Woltmann *) geben

$$P = \frac{4}{3} \frac{c^2}{4g} f\gamma'$$

womit auch die Schoberschen Versuche zum Theil

---

*) Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels, von Reinhard Woltmann. Hamburg 1790. S. 51.

ereinstimmen. Man kann daher, bis noch meh-
e Versuche entweder diesen Ausdruck bestätigen
er irgend eine Modifikation nöthig machen, den-
ben beibehalten.

Nun ist (196. §.)

$$\gamma' = 0{,}08242;\ \frac{1}{48} = 0{,}016$$

her die Kraft mit welcher die atmosphärische
ift eine Fläche f senkrecht stößt

$$P = 0{,}0017583 \cdot c^2 f.$$

$$= \frac{c^2 f}{570}.$$

Anmerk. Ueber den senkrechten und schiefen Stoß der Luft hat der Ritter von Borda Versuche angestellt *), indem er an einem Hebelarm verschiedene Flächen und Körper gegen den Wind bewegte. Statt der vorhin angenommenen $\frac{4}{5}$ findet er $\frac{1}{5}$; auch nimmt nach diesen Versuchen der Widerstand nicht in dem Verhältnisse zu, wie die Fläche wächst, sondern in einem etwas größeren Verhältnisse, so daß wenn sich unter übrigens gleichen Umständen die Flächen wie 1 : 4 verhielten, so war das Verhältniß der Widerstände wie 1 : $4\frac{3}{4}$. Daß sich der senkrechte Stoß wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhalte, stimmt sehr gut mit den Versuchen; aber bei schiefen Flächen verhalten sich die Widerstände nicht wie die Quadrate von den Sinussen der Einfallswinkel, sondern näher wie die simpeln Sinusse.

---

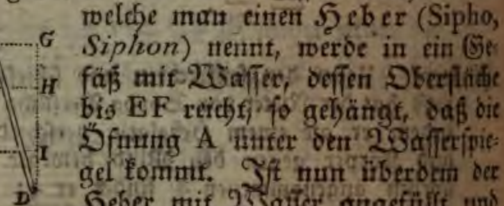
*) Expériences sur la résistance des fluides. Par
l. le Chevalier de *Borda*. Mémoires de l'academie
oyale de Paris 1763. édit. Par. p. 358.

Funfzehntes Kapitel.

Von den Hebern.

204. §.

Eine gebogene an beiden Enden offene Röhre ABD welche man einen Heber (Sipho, *Siphon*) nennt, werde in ein Gefäß mit Wasser, dessen Oberfläche bis EF reicht, so gehängt, daß die Öfnung A unter den Wasserspiegel kommt. Ist nun überdem der Heber mit Wasser angefüllt und die Ausflußöfnung D liegt niedriger als der Wasserspiegel EF, so wird sämmtliches über der Öfnung A stehende Wasser im Gefäße, durch den Heber ablaufen.



Diese Wirkung zu erklären und die Geschwindigkeit zu bestimmen mit welcher das Wasser die Öfnung D verläßt, nehme man die Vertikallinie GD, so daß

DG die größte Höhe des Hebers über der Ausflußöfnung,

DH die Höhe des Wasserspiegels, und

DI die Höhe der Einflußöfnung über der Ausflußöfnung D ist.

Setzt man nun ferner daß

k die Höhe einer Wassersäule bezeichnet, welche eben so stark wie die Atmosphäre drückt,

s ist der Druck gegen die Einflußöffnung A, dem Drucke einer Wassersäule gleich, deren Höhe

$$k + HI - GI = k - GH \text{ ist}.$$

und der Druck gegen die Ausflußöffnung D entspricht einer Wassersäule deren Höhe

$$k - DG \text{ ist};$$

zieht man von ersterer Höhe die letztere ab, so kommt

$$k - GH - k + DG = DG - GH = DH.$$

Oder der Überschuß des Drucks gegen die Einflußöffnung A ist so groß, als wenn eine Wassersäule dagegen preßte, deren Höhe der vertikalen Entfernung des Wasserspiegels EF von der Ausflußöffnung D gleich ist.

Dieser Überschuß des Drucks pflanzt sich gegen das Wasser im Heber fort, und so lange der Wasserspiegel höher als die Ausflußöffnung liegt, muß das Wasser aus dem Heber laufen, auch selbst dann, wenn der Schenkel BA länger als BD ist.

Wird hingegen BF oder die Scheitelhöhe des Hebers über dem Wasserspiegel, größer als die Höhe des Drucks der Atmosphäre = k, so kann dieser Druck die Wassersäule in dem Schenkel AB nicht mehr erhalten, welches ebenfalls von dem Schenkel BD gilt, in welchem Falle sich das Wasser trennen wird und daher kein Ausfluß aus dem Gefäße erfolgen kann.

205. §.

Setzt man die Höhe des Wasserspiegels im Gefäße über der Ausflußöffnung, oder HD = h, so läßt sich h als Druckhöhe ansehen, wonach es leicht ist mit Hülfe des 151. §. die Geschwindigkeit mit welcher das Wasser ausfließt, die Wassermenge, und wenn das Gefäß keinen Zufluß erhält, die Zeit der Ausleerung zu bestimmen.

Funfzehntes Kapitel.

Von den Hebern.

204. §.

Eine gebogene an beiden Enden offene Röhre ABD welche man einen Heber (Sipho, *Siphon*) nennt, werde in ein Gefäß mit Wasser, dessen Oberfläche bis EF reicht, so gehängt, daß die Öfnung A unter den Wasserspiegel kommt. Ist nun überdem der Heber mit Wasser angefüllt und die Ausflußöfnung D liegt niedriger als der Wasserspiegel EF, so wird sämmtliches über der Öfnung A stehende Wasser im Gefäße, durch den Heber ablaufen.

Diese Wirkung zu erklären und die Geschwindigkeit zu bestimmen mit welcher das Wasser die Öfnung D verläßt, nehme man die Vertikallinie GD, so daß

DG die größte Höhe des Hebers über der Ausflußöfnung,

DH die Höhe des Wasserspiegels, und

DI die Höhe der Einflußöfnung über der Ausflußöfnung D ist.

Setzt man nun ferner daß

k die Höhe einer Wassersäule bezeichnet, welche eben so stark wie die Atmosphäre drückt,

so ist der Druck gegen die Einflußöfnung A, dem Drucke einer Wassersäule gleich, deren Höhe

$$k + HI - GI = k - GH \text{ ist}$$

und der Druck gegen die Ausflußöfnung D entspricht einer Wassersäule deren Höhe

$$k - DG \text{ ist;}$$

zieht man von ersterer Höhe die letztere ab, so kommt

$$k - GH - k + DG = DG - GH = DH.$$

Oder der Überschuß des Drucks gegen die Einflußöfnung A ist so groß, als wenn eine Wassersäule dagegen preßte, deren Höhe der vertikalen Entfernung des Wasserspiegels EF von der Ausflußöfnung D gleich ist.

Dieser Überschuß des Drucks pflanzt sich gegen das Wasser im Heber fort, und so lange der Wasserspiegel höher als die Ausflußöfnung liegt, muß das Wasser aus dem Heber laufen, auch selbst dann, wenn der Schenkel BA länger als BD ist.

Wird hingegen BF oder die Scheitelhöhe des Hebers über dem Wasserspiegel, größer als die Höhe des Drucks der Atmosphäre = k, so kann dieser Druck die Wassersäule in dem Schenkel AB nicht mehr erhalten, welches ebenfalls von dem Schenkel BD gilt, in welchem Falle sich das Wasser trennen wird und daher kein Ausfluß aus dem Gefäße erfolgen kann.

205. §.

Setzt man die Höhe des Wasserspiegels im Gefäße über der Ausflußöfnung, oder HD = h, so läßt sich h als Druckhöhe ansehen, wonach es leicht ist mit Hülfe des 151. §. die Geschwindigkeit mit welcher das Wasser ausfließt, die Wassermenge, und wenn das Gefäß keinen Zufluß erhält, die Zeit der Ausleerung zu bestimmen.

Luft die Bewegung des Wassers in der Röhre verzögerte. Diese Schwingungen lassen sich mit der Bewegung eines Pendels vergleichen und eben so mit der schwankenden Bewegung einer flüssigen Masse, welche durch die Wirkung des Windes, oder auf irgend eine andere Art, aus ihrem Gleichgewichte gebracht ist, und man sieht zugleich hieraus, wie die abwechselnde Bewegung der Wellen, sich mit den Schwingungen des Wassers in einem Heber vergleichen lassen, weil bei der Welle wie im Heber, die höchsten Theile nachher die tiefsten werden.

Man sehe hierüber: Bossut angef. Hydrodyn. I. Band II. Abschn. 9. Kap. S. 389; in der größten Allgemeinheit aber, und mit Rücksicht auf die Unzulänglichkeit der bisherigen Vorstellungsart, bei einer analytischen Behandlung dieses Promblems: Herrn la Grange, Analytische Mechanik. Aus dem Französischen von F. W. A. Murhard. Göttingen 1797. 8ter Abschn. Nr. 35, 36 und 37. Seite 546 u. f.

Sechs-

Sechszehntes Kapitel.

Von den Saugpumpen.

208. §.

nter einer **Wasserpumpe** (Antlia aquaria, *mpe d'eau*) versteht man überhaupt eine Maschine, bei der mittelst einer Röhre und eines in derselben auf- und niedergehenden **Stämpfels** oder **Kolbens** (Embolus, *Piston*) das Wasser gehoben werden kann. Man schreibt die Erfindung der Pumpen dem **Ktesibius** *) zu.

Ist bei einer solchen Pumpe in dem Kolben eine Öfnung, und wird das Wasser vorzüglich durch den Druck der Atmosphäre zum Steigen gebracht, so nennt man sie eine **Saugpumpe** (Antlia suctoria, *Pompe aspirante*).

Die wesentlichen Theile einer Saugpumpe bestehen in dem **Stiefel** oder **Kolbenrohr** (Modiolus, *Corps de pompe*) ABCD, welches diejenige Röhre ist, worin der Kolben FG mittelst der Kol-

*) Ktesibius ein Mathematiker zu Alexandrien und Lehrer des Heron, lebte etwa in der Mitte des zweiten Jahrhunderts vor dem Anfange unserer Zeitrechnung

Luft die Bewegung des Wassers in der Röhre verzögerte. Diese Schwingungen lassen sich mit der Bewegung eines Pendels vergleichen und eben so mit der schwankenden Bewegung einer flüssigen Masse, welche durch die Wirkung des Windes, oder auf irgend eine andere Art, aus ihrem Gleichgewichte gebracht ist, und man sieht zugleich hieraus, wie die abwechselnde Bewegung der Wellen, sich mit den Schwingungen des Wassers in einem Heber vergleichen lassen, weil bei der Welle wie im Heber, die höchsten Theile nachher die tiefsten werden.

Man sehe hierüber: Bossut angef. Hydrodyn. I. Band II. Abschn. 9. Kap. S. 389; in der größten Allgemeinheit aber, und mit Rücksicht auf die Unzulänglichkeit der bisherigen Vorstellungsart, bei einer analytischen Behandlung dieses Promblems: Herrn la Grange, Analytische Mechanik. Aus dem Französischen von F. W. A. Murhard. Göttingen 1797. 8ter Abschn. Nr. 35, 36 und 37. Seite 546 u. f.

Sechs=

Sechszehntes Kapitel.

Von den Saugpumpen.

208. §.

nter einer Wasserpumpe (Antlia aquaria, *mpe d'eau*) versteht man überhaupt eine Maschine, bei der mittelst einer Röhre und eines in derselben auf- und niedergehenden Stämpfels oder Kolbens (Embolus, *Piston*) das Wasser gehoben werden kann. Man schreibt die Erfindung der Pumpen dem Ktesibius *) zu.

Ist bei einer solchen Pumpe in dem Kolben eine Öfnung, und wird das Wasser vorzüglich durch den Druck der Atmosphäre zum Steigen gebracht, so nennt man sie eine Saugpumpe (Antlia suctoria, *Pompe aspirante*).

Die wesentlichen Theile einer Saugpumpe bestehen in dem Stiefel oder Kolbenrohr (Modiolus, *Corps de pompe*) ABCD, welches diejenige Röhre ist, worin der Kolben FG mittelst der Kol-

) Ktesibius ein Mathematiker in Alexandrien und Leh- des Heron, lebte etwa in der Mitte des zweiten rhunderts vor dem Anfange unserer Zeitrechnung.

Luft die Bewegung des Wassers in der Röhre verzögerte. Diese Schwingungen lassen sich mit der Bewegung eines Pendels vergleichen und eben so mit der schwankenden Bewegung einer flüssigen Masse, welche durch die Wirkung des Windes, oder auf irgend eine andere Art, aus ihrem Gleichgewichte gebracht ist, und man sieht zugleich hieraus, wie die abwechselnde Bewegung der Wellen, sich mit den Schwingungen des Wassers in einem Heber vergleichen lassen, weil bei der Welle wie im Heber, die höchsten Theile nachher die tiefsten werden.

Man sehe hierüber: Bossut angef. Hydrodyn. I. Band II. Abschn. 9. Kap. S. 389; in der größten Allgemeinheit aber, und mit Rücksicht auf die Unzulänglichkeit der bisherigen Vorstellungsart, bei einer analytischen Behandlung dieses Promblems: Herrn la Grange, Analytische Mechanik. Aus dem Französischen von F. W. A. Murhard. Göttingen 1797. 8ter Abschn. Nr. 35, 36 und 37. Seite 546 u. f.

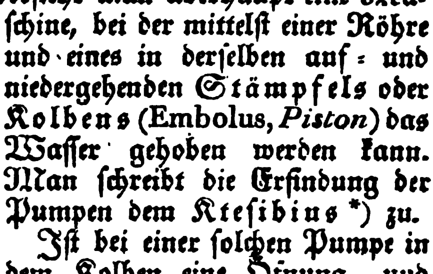
Sechs-

Sechszehntes Kapitel.

Von den Saugpumpen.

208. §.

nter einer Wasserpumpe (Antlia aquaria, mpe d'eau) versteht man überhaupt eine Maschine, bei der mittelst einer Röhre und eines in derselben auf- und niedergehenden Stämpfels oder Kolbens (Embolus, *Piston*) das Wasser gehoben werden kann. Man schreibt die Erfindung der Pumpen dem Ktesibius *) zu.



Ist bei einer solchen Pumpe in dem Kolben eine Öfnung, und wird das Wasser vorzüglich durch den Druck der Atmosphäre zum Steigen gebracht, so nennt man sie eine Saugpumpe (Antlia suctoria, *Pompe aspirante*).

Die wesentlichen Theile einer Saugpumpe bestehen in dem Stiefel oder Kolbenrohr (Modiolus, *Corps de pompe*) ABCD, welches diejenige Röhre ist, worin der Kolben FG mittelst der Kol-

*) Ktesibius ein Mathematiker in Alexandrien und Leh- des Heron, lebte etwa in der Mitte des zweiten hrhunderts vor dem Anfange unserer Zeitrechnung.

Luft die Bewegung des Wassers in der Röhre verzögerte. Diese Schwingungen lassen sich mit der Bewegung eines Pendels vergleichen und eben so mit der schwankenden Bewegung einer flüssigen Masse, welche durch die Wirkung des Windes, oder auf irgend eine andere Art, aus ihrem Gleichgewichte gebracht ist, und man sieht zugleich hieraus, wie die abwechselnde Bewegung der Wellen, sich mit den Schwingungen des Wassers in einem Heber vergleichen lassen, weil bei der Welle wie im Heber, die höchsten Theile nachher die tiefsten werden.

Man sehe hierüber: Bossut angef. Hydrodyn. I. Band II. Abschn. 9. Kap. S. 389; in der größten Allgemeinheit aber, und mit Rücksicht auf die Unzulänglichkeit der bisherigen Vorstellungsart, bei einer analytischen Behandlung dieses Promblems: Herrn la Grange, Analytische Mechanik. Aus dem Französischen von F. W. A. Murhard. Göttingen 1797. 8ter Abschn. Nr. 35, 36 und 37. Seite 546 u. f.

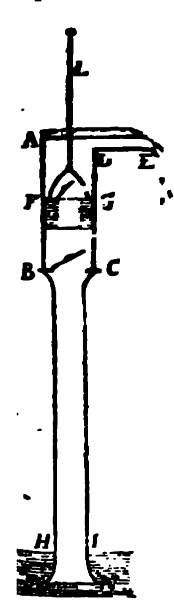
Sechs=

Sechszehntes Kapitel.

Von den Saugpumpen.

203. §.

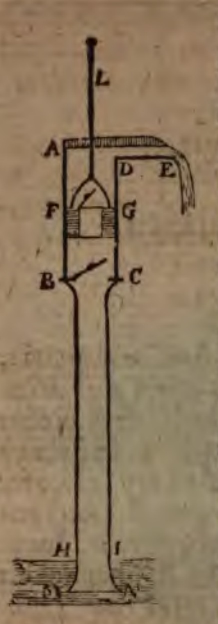
[illegible] einer [illegible] (Antlia [illegible], *Pompe d'eau*), [illegible] man [illegible] Ma- [illegible], [illegible] Röhre [illegible] und [illegible] Kolbens (Embolus, *Piston*) [illegible] Wasser [illegible] Man [illegible] Erfindung der Pumpen dem Ktesibius[*] zu.



Ist bei einer [illegible] Pumpe [illegible] dem Kolben [illegible] wird das Wasser [illegible] den Druck der [illegible] Steigen [illegible] sie eine Saugpumpe (Antlia suctoria, *Pompe aspirante*).

Die [illegible] Theile einer Saugpumpe [illegible] Stiefel oder Kolbenrohr (Modiolus, *Corps de pompe*) [illegible] welches diejenige [illegible] der Kolben FG [illegible]

[*] Ktesibius ein Mathematiker in [illegible] des Heron, lebte etwa in der [illegible] Jahrhunderts vor dem Anfange unserer Zeit.



benstange (Regula, *Ti*
piston) L so bewegt wird
bei seinem Aufwärtsgehen
über ihm befindlichen Wass
der Luft aller Durchgan
schlossen bleibt, beim Herun
cken aber, das unter ihm
liche Wasser über denselben
kann. Zu diesem Ende ist de
ben durchbohrt und über d
nung eine Klappe oder ein
til (Axes, *Soupape*) angeb
welches das Kolbenventil
pape mobile) genannt wird.
Boden oder Untertheil des
fels hat eine Öfnung, welche
das Stiefelventil (*Sou*
dormante) BC geschlossen w
kann. An dem Stiefel befind
eine zweite Röhre BCMN
Saugröhre (*Tuyau d'aspiration*), di
ihrem Untertheile HM im Unterwasser
Sumpf (*Puisard*) stehet. Bei MN wo da
terwasser eintritt, an der Schlundöfnung
ein Seiherblech oder Seiherkasten
bracht, um den Eintritt des Unraths zu v
dern. Das gehobene Wasser läuft bei DE
den Ausguß oder die Gußröhre (Fuse
Gargoüille) ab.

Wenn die Pumpe nicht hoch ist, so feh
weilen die Saugröhre gänzlich und der
steht unmittelbar im Unterwasser. Dagegen
das Wasser auf eine beträchtliche Höhe ge
werden soll, so wird über dem Stiefel noc
Ansatzröhre befestiget, welche Einrichtung
einen hohen Satz, auch eine vereinigte S
und Hebepumpe nennt. Diese Ansatzröhre
zuweilen über 100 Fuß hoch.

Wird die Saugröhre aus mehrern Stücken ammengesetzt, so heißt das oberste, welches sich ächst am Stiefel befindet, das Stöckelkiel, übrigen, die Kielstücke.

Sollen bei mehrern übereinanderstehenden Pum- t, die Kolbenstangen zugleich bewegt werden, so nt man diejenige Stange an welcher sämmtliche lbenstangen befestiget sind, die Schachtstange.

209. §.

Um deutlich einzusehen wie durch die Bewegung s Kolbens das Wasser von IH ab, zum Stei- n gebracht werden kann, wenn sich in der Röhre och kein Wasser sondern Luft befindet, so setze an daß der Kolben in seinem tiefsten Stande BC äre; wird derselbe alsdann bis D aufwärts ge- gen, so entstehet im Stiefel ein beinahe luftlee- r Raum; die in der Saugröhre eingeschlossene ft preßt alsdann gegen das Stiefelventil, stößt selbe auf und ein Theil derselben tritt in den tiefel. Hiedurch ist aber die in den Röhren ein- hlossene Luft verdünnt, und wegen ihrer gerin- n Elastizität kann sie gegen das Wasser in der ugröhre nicht so stark drücken, wie die Atmo- äre das Wasser von außen in die Saugröhre eindrückt, wodurch ein Steigen des Wassers in Saugröhre bewirkt wird. Geht nun der Kol- wieder abwärts, so bleibt das Stiefelventil schlossen, die Luft im Stiefel wird aber zusam- ngepreßt, und wenn dadurch ihre Elastizität ößer als die der äußern Luft ist, welche gegen e Oberfläche des Kolbenventils preßt, so muß sich sselbe öffnen und die gepreßte Luft wird austre- Hiedurch tritt ein Theil der im Stiefel ein- nen Luft in die Atmospäre, und sie würde treten, wenn zwischen dem Kolben- und in Zwischenraum befindlich wäre,

welchen man den schädlichen Raum (*Esp*
superflû) nennt.

Man sieht wie nun durch fortgesetztes S
des Kolbens, die Luft in den Röhren immer m
ausgepumpt und verdünnt wird, so daß bei e
zweckmäßigen Anordnung, das Wasser zuletzt i
das Stiefel- und Kolbenventil steigt, und bei
dem Kolbenhub (*Levée du piston*) das i
dem Kolben befindliche Wasser gehoben und z
Ausguß gebracht wird.

210. §.

Wenn außer dem Drucke des Wassers
der Atmosphäre, aller Widerstand bei der Be
gung des Kolbens bei Seite gesetzt wird; n
sucht die Kraft welche erfordert wird, den Kol
in einer bestimmten Lage im Gleichgewichte
halten.

Der ganze Raum in der Pumpe zwischen
sei mit Wasser ausgefüllt, wird alsdann der K
ben FG aufwärts bewegt, so muß, weil das K
benventil verschlossen ist, die Wassersäule GD
hoben werden. Aber auf diese drückt die Atmosp
mit dem Gewichte einer Wassersäule von der H
k = k, daher ist die gesammte Gewalt welche
die Oberfläche des Kolbens preßt, dem Gewi
einer Wassersäule gleich, von der Höhe

$$= GD + k$$

Nun drückt die Atmosphäre ebenfalls gegen
Oberfläche des Wassers bei HI mit einer Gew
die man wegen des geringen Unterschiedes in
sicht der Höhe DI, der Höhe k gleich setzen ka
Diesem atmosphärischen Drucke wirkt aber die W
sersäule von der Höhe GI entgegen, daher bl
der Druck welcher sich gegen den Kolben fortpfla
und denselben aufwärts zu bewegen strebt

$$= k - GI.$$

ʒieht man diesen von dem zuerst gefundenen ab, so bleibt der Überrest von derjenigen Wassersäule welche den Kolben nach unten preßt

$$(GD + k) - (k - GI) = GD + GI = DI$$

d. h. damit der Kolben im Gleichgewichte erhalten werden kann, muß derselbe mit einer Kraft aufwärts gezogen werden, die dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, deren Grundfläche der Querschnitt des Kolbens, und deren Höhe mit der lothrechten Entfernung des Ausgusses vom Spiegel des Unterwassers übereinstimmt.

Man setze:

H die Höhe der Gußöfnung über dem Spiegel des zu hebenden Wassers,

A den Flächeninhalt eines senkrechten Querschnitts des Stiefels,

so ist die **Kraft für das Gleichgewicht**

$$AH\gamma$$

welche man auch die **hydrostatische Last** und H die **Höhe des hydrostatischen Widerstandes** nennt.

Ist GI größer wie k = 32 Fuß, so kann das Wasser in der Pumpe nicht mehr steigen, daher man in der Ausübung, zu mehrerer Sicherheit, bei Saugpumpen, den höchsten Stand des Kolbens nie größer als 28 bis 29 Fuß annimmt.

211. §.

Wirkt an der Kolbenstange eine Kraft aufwärts, welche der vorhin gefundenen hydrostatischen Last gleich ist, so wird dadurch Gleichgewicht aber keine Bewegung hervorgebracht. Soll der Kolben in Bewegung gesetzt werden, so wird noch mehr Kraft erfordert, die sich unter drei Abtheilungen bringen läßt.

I. Die Überwältigung des Widerstandes, den Reibung des Kolben an den Stiefelwa verursacht, erfordert Kraft.

II. Wenn das Wasser längs einer Röhre durch verschiedene Öfnungen bewegt we soll, so ist dazu ebenfalls Kraft nöthig, halb der fortgepflanzte Druck der Atmosp gegen den Untertheil des Kolbens vermin und deshalb die gefundene Kraft für Gleichgewicht vergrößert werden muß.

III. Weil der Kolben bei jedem Aufwärtsst seine Bewegung von der Ruhe anfängt, muß die gesammte Masse des Wassers in Pumpe, in Bewegung gesetzt werden, und w rend einer gewissen Zeit eine bestimmte schwindigkeit erhalten, wozu gleichfalls K erfordert wird.

Diese verschiedenen Kräfte zur Bewegung Kolbens in Rechnung zu bringen und der Pu die vortheilhafteste Anordnung zu geben, ist von den aller schwierigsten Geschäften der hö Mechanik. So weit es indessen die eingeschr ten Grenzen dieser Schrift erlauben, wird hie ohne zu große Verwickelung der Rechnung, R sicht genommen werden.

212. §.

Über die Reibung zwischen Stiefel und ben fehlt es noch an vollständigen Versuchen. S man die zur Überwältigung dieser Reibung er
F liche Kraft F, dem Gewichte einer Wassers
A gleich, deren Grundfläche der Querschnitt A
f Stiefels und deren Höhe = f ist, so wird

$$F = Af\gamma.$$

Nun läßt sich einsehen, daß in dem Verh niß wie der Kolben mehr Umfang erhält, auch

[illegible]

Nach dem Verhältnisse wie die Stiefel und Kolben gut oder schlecht gearbeitet sind, wird f kleiner oder größer und man kann annehmen.

Für gut polirte metallne Stiefel

$$f = 0{,}03 \frac{H}{D}$$

2. Für nachgebohrte metallene Stiefel

$$f = 0{,}06 \frac{H}{D}$$

3. Für gut gebohrte hölzerne Stiefel

$$f = 0{,}1 \frac{H}{D}$$

4. Für schlechte hölzerne Stiefel

$$f = 0{,}2 \frac{H}{D}$$

I. Die Überwältigung des Widerstandes, den Reibung des Kolben an den Stiefelwän verursacht, erfordert Kraft.

II. Wenn das Wasser längs einer Röhre u durch verschiedene Öfnungen bewegt werd soll, so ist dazu ebenfalls Kraft nöthig, w halb der fortgepflanzte Druck der Atmosphä gegen den Untertheil des Kolbens vermind und deshalb die gefundene Kraft für d Gleichgewicht vergrößert werden muß.

III. Weil der Kolben bei jedem Aufwärtssteig seine Bewegung von der Ruhe anfängt, muß die gesammte Masse des Wassers in Pumpe, in Bewegung gesetzt werden, und wä rend einer gewissen Zeit eine bestimmte G schwindigkeit erhalten, wozu gleichfalls Kr erfordert wird.

Diese verschiedenen Kräfte zur Bewegung Kolbens in Rechnung zu bringen und der Pum die vortheilhafteste Anordnung zu geben, ist e von den aller schwierigsten Geschäften der höh Mechanik. So weit es indessen die eingeschrän ten Grenzen dieser Schrift erlauben, wird hierd ohne zu große Verwickelung der Rechnung, Rü sicht genommen werden.

212. §.

Über die **Reibung** zwischen Stiefel und K ben fehlt es noch an vollständigen Versuchen. S man die zur Überwältigung dieser Reibung erf
F liche Kraft F, dem Gewichte einer Wassersä
A gleich, deren Grundfläche der Querschnitt A
f Stiefels und deren Höhe $= f$ ist, so wird

$$F = A f \gamma.$$

Nun läßt sich einsehen, daß in dem Verhä niß wie der Kolben mehr Umfang erhält, auch

(R)eibung sich vermehrt; wenn also D der Durch(m)esser des Stiefels ist, so verhält sich F wie D.

Wird die Höhe H des Ausgusses über dem (U)nterwasser größer, so muß der Kolben mehr Ge(w)alt ausstehen und stärker gegen die Stiefelwände (ge)preßt werden. Wenn daher H wächst, so muß (a)uch F wachsen, obgleich bei doppelter Höhe von (H), unter übrigens gleichen Umständen, F nicht (d)oppelt so groß wird, sondern in einem geringeren (V)erhältniß zunimmt. Bis indessen genaue Ver(su)che die Funktion zwischen F und H bestimmen, (ka)nn man annehmen daß sich F wie H verhalte. (I)st alsdenn μ eine Zahl, die aus Versuchen be(st)immt werden muß, so erhält man μ

$$F = \mu\, HD \text{ oder}$$

(w)eil $A = 0{,}785\, D^2$ ist

$$Af\gamma = 0{,}785\, D^2 f\gamma = \mu HD \text{ daher}$$

$$f = \frac{\mu}{0.785\,\gamma} \cdot \frac{HD}{D^2} \text{ oder}$$

$$f = \frac{\mu}{0{,}785\,\gamma} \cdot \frac{H}{D}$$

Nach dem Verhältnisse wie die Stiefel und (K)olben gut oder schlecht gearbeitet sind, wird μ (k)leiner oder größer und man kann annehmen:

(I.) Für gut polirte metallne Stiefel

$$f = 0{,}03\, \frac{H}{D}$$

(II). Für nachgebohrte metallene Stiefel

$$f = 0{,}06\, \frac{H}{D}$$

(II)I. Für gut gebohrte hölzerne Stiefel

$$f = 0{,}1\, \frac{H}{D}$$

(IV). Für schlechte hölzerne Stiefel

$$f = 0{,}2\, \frac{H}{D}$$

wo f die Höhe einer Wassersäule bezeichnet, deren Grundfläche der Querschnitt des Stiefels ist, und alle Größen sich auf rheinländisches Fußmaaß beziehen.

In unbestimmten Fällen wird in der Folge die Reibung zwischen dem Kolben und Stiefel durch

$$f = (0{,}1 \pm) \frac{H}{D}$$

bezeichnet werden.

213. §.

Es läßt sich leicht einsehen daß der Kolben so schnell in die Höhe gezogen werden kann, daß er sich von dem unter ihm befindlichen Wasser trennt, in welchem Falle ihm der Druck des Wassers von unten nach oben nicht zu Hülfe kömmt. Um diese Trennung zu vermeiden, darf die Geschwindigkeit des Kolbens eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Man setze daher, daß

- A den Querschnitt, L die Länge und D den Durchmesser des Stiefels,
- A′ den Querschnitt, L′ die Länge *) und D′ den Durchmesser der Saugröhre,
- a′ den Inhalt der Öfnung am Stiefelventil,
- b den **Kolbenhub** oder den Raum welchen der Kolben beim Aufwärtsziehen durchläuft,
- τ die Zeit des Kolbenhubs, und
- w die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens bezeichne,

---

*) Hier und in der Folge wird unter Länge der Saugröhre, die Entfernung des tiefsten Kolbenstandes vom Unterwasser verstanden, weil etwanige Abweichungen der wahren Länge der Saugröhre, nur wenig Abänderungen in den Resultaten geben.

findet man (158. §.) die Zeit t in welcher das Vasser auf die Höhe b steigt, wenn der Kolben ı seinem tiefsten Stande plötzlich gehoben und on dem unter ihm befindlichen Wasser abgerissen vird

$$t = 2\sqrt{\left[\frac{B\left(\frac{A}{A'}L' + \tfrac{1}{2}b\right)b}{k - L' - \tfrac{1}{2}b}\right]}$$

Setzt man 2b für b, so würde das Wasser auf ine doppelt so große Höhe in der Zeit

$$t' = 2\sqrt{\left[\frac{B\left(\frac{A}{A'}L' + b\right)2b}{k - L' - b}\right]}$$

eigen. Damit sich nun das Wasser von dem Kolben bei seinem Aufwärtsbewegen nicht ablöse, kann man annehmen daß der Kolben in der Zeit t' den Weg b durchlaufe, in welcher das Vasser die Höhe 2b steigen könnte. In diesem Falle darf man nicht befürchten, daß sich der Kolen von dem Wasser trennen sollte, weil überdies eine, so wie des Wassers Bewegung von o anangen. Hienach ist die Zeit eines Kolbenubs

$$\tau = t' \text{ oder}$$

$$\tau = 2\sqrt{\left[\frac{2B\left(\frac{A}{A'}L' + b\right)b}{k - L' - b}\right]}$$

und es kann τ wohl größer als t', aber nicht kleiner angenommen werden.

Die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens ist

$$w = \frac{b}{\tau}, \text{ aber}$$

$$\frac{b}{\tau} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{b\,(k - L' - b)}{2B\left(\frac{A}{A'}L' + b\right)}\right]}$$

wo f die Höhe einer Wassersäule bezeichnet, deren Grundfläche der Querschnitt des Stiefels ist, und alle Größen sich auf rheinländisches Fußmaaß beziehen.

In unbestimmten Fällen wird in der Folge die Reibung zwischen dem Kolben und Stiefel durch

$$f = (0{,}1 \pm) \frac{H}{D}$$

bezeichnet werden.

213. §.

Es läßt sich leicht einsehen daß der Kolben so schnell in die Höhe gezogen werden kann, daß er sich von dem unter ihm befindlichen Wasser trennt, in welchem Falle ihm der Druck des Wassers von unten nach oben nicht zu Hülfe kömmt. Um diese Trennung zu vermeiden, darf die Geschwindigkeit des Kolbens eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Man setze daher, daß

- A den Querschnitt, L die Länge und D den Durchmesser des Stiefels,
- A′ den Querschnitt, L′ die Länge *) und D′ den Durchmesser der Saugröhre,
- a′ den Inhalt der Öfnung am Stiefelventil,
- b den **Kolbenhub** oder den Raum welchen der Kolben beim Aufwärtsziehen durchläuft,
- τ die Zeit des Kolbenhubs, und
- w die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens bezeichne,

---

*) Hier und in der Folge wird unter Länge der Saugröhre, die Entfernung des tiefsten Kolbenstandes vom Unterwasser verstanden, weil etwanige Abweichungen der wahren Länge der Saugröhre, nur wenig Abänderungen in den Resultaten geben.

so findet man (158. §.) die Zeit t in welcher das Wasser auf die Höhe b steigt, wenn der Kolben in seinem tiefsten Stande plötzlich gehoben und von dem unter ihm befindlichen Wasser abgerissen wird

$$t = 2\sqrt{\left[\frac{B\left(\frac{A}{A'}L' + \frac{1}{2}b\right)b}{k - L' - \frac{1}{2}b}\right]}$$

Setzt man 2b für b, so würde das Wasser auf eine doppelt so große Höhe in der Zeit

$$t' = 2\sqrt{\left[\frac{B\left(\frac{A}{A'}L' + b\right)2b}{k - L' - b}\right]}$$

steigen. Damit sich nun das Wasser von dem Kolben bei seinem Aufwärtsbewegen nicht ablöse, so kann man annehmen daß der Kolben in der Zeit t' den Weg b durchlaufe, in welcher das Wasser die Höhe 2b steigen könnte. In diesem Falle darf man nicht befürchten, daß sich der Kolben von dem Wasser trennen sollte, weil überdies beide, so wie des Wassers Bewegung von o anfangen. Hienach ist die Zeit eines Kolbenhubs

$$\tau = t' \text{ oder}$$

$$\tau = 2\sqrt{\left[\frac{2B\left(\frac{A}{A'}L' + b\right)b}{k - L' - b}\right]}$$

und es kann τ wohl größer als t', aber nicht kleiner angenommen werden.

Die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens ist

$$w = \frac{b}{\tau}, \text{ aber}$$

$$\frac{b}{\tau} = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{b\,(k - L' - b)}{2B\left(\frac{A}{A'}L' + b\right)}\right]}$$

daher darf die mittlere Geschwindigkeit w des Kolbens, nicht größer seyn als

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{b\,(k - L' - b)}{2B\left(\frac{A}{A'}L' + b\right)}\right]}$$

wenn sich nicht das Wasser unter dem Kolben, von demselben trennen soll.

In dem vorliegenden Falle ist, wenn man voraussetzt daß die Schlundöffnung der Saugröhre gehörig erweitert ist, damit daselbst die Zusammenziehung nicht in Rechnung kommen darf (155. §.)

$$B = 0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2 - 0{,}016\left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{\frac{\frac{1}{2}b}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2\frac{L'}{D'}}{2000}$$

Der obige allgemeine Ausdruck für den Werth welchen w nicht übersteigen darf, giebt für den Fall, wenn die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens und die übrigen Abmessungen, außer der Länge der Saugröhre ($= L'$) gegeben sind,

$$w^2 < \frac{b\,(k - L' - b)}{8B\left(\frac{A}{A'}L' + b\right)}$$

und wenn man daraus L' entwickelt

$$L' < b\,\frac{k - b - 8Bw^2}{8Bw^2\frac{A}{A'} + b}$$

d. h. die Saugröhre muß kürzer als der zuletzt gefundene Ausdruck seyn, wenn sich der Kolben nicht von dem unter ihm befindlichen Wasser trennen soll.

214. §.

In der Voraussetzung daß die Bewegung des Kolbens so angeordnet sei, damit ihn beim Aufwärtsgehen das nachfolgende Wasser nicht verläßt,

e wird [illegible] Druck [illegible]
das Wasser [illegible]
bracht [illegible]
des Wassers [illegible]
Kolben [illegible]
rest [illegible] p [illegible]
welche [illegible] Kolben [illegible]
Wasser [illegible] = Q [illegible]
man [illegible]
höhe [illegible]
Wänden der Röhre [illegible]
die verschiedenen [illegible]

$$Q = (k - L - \tfrac{1}{2}b - h'')A;$$

Wenn nun in der Zeit τ das Wasser auf die Höhe b steigen soll, so muß dazu eine bewegende Kraft

$$Q' = \frac{[illegible]}{g\tau^2} N \text{ (35 §. IX.)}$$

verwandt werden. Der Überrest Q — Q' = p verursacht Druck gegen den Kolben, daher wenn für die Masse N ihr Werth $\left(\frac{A^2}{A'} L + \frac{1}{2} bA\right)$, wie 158. §. gesetzt wird, so ist Q — Q' oder die Kraft welche den Kolben aufwärts preßt

$$p = \gamma A\left[k - L' - \tfrac{1}{2}b - h'' - \frac{\frac{A}{A'}Lb + \frac{1}{2}b^2}{g\tau^2}\right]$$

wo $h'' = w^2 \left(B - \frac{1}{4[illegible]}\right) = w^2 \left[E + F \cdot G \cdot \frac{1}{[illegible]}\right]$ ist.

Bei den vorhergehenden Schlüssen ist zwar vorausgesetzt, daß die Kräfte immer gleich stark wirken und der Druck p unveränderlich bleibe: dies gilt zwar nicht in aller Strenge, man wird aber die gefundenen Ausdrücke als Mittelresultate ansehen können. In einem größern Umfa[illegible] und weit allgemeiner ist der Vortrag in [illegible] en Maschinenlehre des Herrn Lang[illegible]

habe nachstehende Abmessungen; man soll die nöthige Kraft am Kolben zum Aufwärtsziehen bestimmen.

L	Länge des Stiefels bis zum Ausguß	10 Fuß
L′	Länge der Saugröhre	20 Fuß
H	Höhe des Ausgusses über dem Unterwasser	30 Fuß
D	Durchmesser des Stiefels	9 Zoll
D′	Durchmesser der Saugröhre	6 Zoll
a′	Inhalt der Oefnung am Stiefelventil	20 □Z.
b	Höhe des Kolbenhubs	3 Fuß

Hieraus erhält man

$$\frac{A}{a'} = \frac{63{,}6}{20} = 3{,}18;\ \left(\frac{A}{a'}\right)^2 = 10{,}11$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{9^2}{6^2} = \frac{9}{4};\ \left(\frac{A}{A'}\right)^2 = \frac{81}{16}$$

$$\frac{L}{D} = \frac{10 \cdot 12}{9} = 13\tfrac{1}{3};\ \frac{L'}{D'} = \frac{20 \cdot 12}{6} = 40.$$

Für die größte mittlere Geschwindigkeit des Kolbens ist nach 213. §.

$$B = 0{,}0417 \cdot 10{,}11 - 0{,}016 \cdot \tfrac{81}{16} + \frac{2 + \frac{81}{16} \cdot 40}{2006}$$
$$= 0{,}441$$

daher die größte Geschwindigkeit

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{3\,(32 - 20 - 3)}{0{,}882\,(\frac{81}{16} \cdot 20 + 3)}\right]} = 0{,}271 \text{ Fuß}$$

wofür man als mittlere Geschwindigkeit $w = 3$ Zoll $= \frac{1}{4}$ Fuß annehmen kann.

Dies giebt die Zeit eines Kolbenhubs

$$\tau = \frac{3}{w} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 12 \text{ Sekunden.}$$

Nun ist ferner

$$H' = \tfrac{1}{16}\left(0{,}441 + \frac{8{,}5}{2006 \cdot \frac{3}{4}} - 0{,}016\right) = 0{,}03 \text{ Fuß.}$$

$$T = \frac{3}{15\frac{5}{3} \cdot 144}\left[10 + \tfrac{9}{4} \cdot 20\right] = 0{,}07 \text{ Fuß.}$$

$$f = \frac{0{,}1 \cdot 30}{0{,}75} = 4 \text{ Fuß.}$$

daher die zur Aufziehung des Kolbens erforderliche Kraft

$$P = 66 . 0{,}442 \, [30 + 0{,}03 + 0{,}07 + 4] = 994{,}8 \text{ Pf.}$$

wozu bei der Anordnung der ganzen Maschine, noch das Gewicht des Kolbens und der Kolbenstange hinzukommt, wenn zuvor das Gewicht desjenigen Wassers abgezogen wird, welches sie aus der Stelle verdrängt haben.

216. §.

Soll mit Beibehaltung der eingeführten Be- ichnung, und unter den angenommenen Voraus- tzungen der Kolben niedergedrückt werden, so sei

a der Flächeninhalt der Kolbenöfnung, und

P′ die erforderliche Kraft zum Niederdrücken.

Sieht man die Höhe des Kolbens als unbeträcht- ch an, und setzt sein Gewicht nebst dem der Kol- nstange wie bisher bei Seite, so wird er in al- n Lagen im Gleichgewichte bleiben. Bewegt sich rselbe nun mit der Geschwindigkeit w niederwärts, muß das unter ihm befindliche Wasser mit der Geschwindigkeit $w \frac{A}{a}$ durch die Kolbenöfnung flie- n, wozu eine Druckhöhe

$$H'' = \frac{1}{\alpha^2} \left(w \frac{A}{a}\right)^2 = 0{,}0243 \, w^2 \left(\frac{A}{a}\right)^2 \text{ (100. §.)}$$

fordert wird.

Bei der Reibung des Kolbens kann die Höhe es Stiefels in Rechnung gebracht werden, als- ann ist

$$f = (0{,}1 \pm) \frac{L}{D}$$

aher wird [illegible]erdrücken des Kolbens, eine Wassersäule [illegible]e

$$H'' + \ldots \left(\frac{A}{a}\right)^2 + (0{,}1 \pm) \frac{L}{D}$$

erfordert, und man findet die **Kraft zum Niederdrücken des Kolbens**

$$P' = \gamma A \left[0{,}0243\, w^2 \left(\frac{A}{a}\right)^2 + (0{,}1 \pm) \frac{L}{D}\right]$$

Hieraus folgt, daß bei übrigens gleichen Umständen, die Kraft zum Niederdrücken des Kolbens ansehnlich vermehrt werden muß, wenn die **Kolbenöfnung** a zu enge ist, weshalb dieselbe, so weit als es die **übrigen Umstände zulassen**, gemacht werden muß.

Beispiel. Mit Beibehaltung der im letzten Beispiele angenommenen Größen, findet man wenn a = 20 □ Zoll gesetzt wird

$$H'' + f = 0{,}0243 \cdot \tfrac{1}{18} \cdot 10{,}11 + \frac{0{,}1 \cdot 10}{0{,}75}$$
$$= 1{,}35 \text{ Fuß}$$

und die Kraft zum Niederdrücken

$$P' = 66 \cdot 0{,}442 \cdot 1{,}35 = 39{,}4 \text{ Pfund,}$$

wovon aber bei Berechnung der ganzen Maschine, das Gewicht des Kolbens und der Kolbenstange abgezogen werden muß.

217. §.

Da bei den einfachen Saugpumpen die Kraft P zum Aufzuge sehr viel größer ist, als die Kraft P' zum Niederdrücken des Kolbens, so pflegt man außer den bekannten Handpumpen mit **Schwengeln**, wenn Pumpenwerke von einiger Bedeutung angelegt werden sollen, die Pumpen immer paarweise oder **doppelt** von gleichen Abmessungen anzulegen, dergestalt, daß wenn der eine Kolben aufgezogen wird, der andere niedergedrückt werden muß. Die doppelten Saugwerke haben den Vortheil, daß immer einerlei Kraft auf beide Pumpen verwendet wird, denn während eines jeden Auf- und Niedergangs

ungs eines Kolbens, wird alsdann zusammen die
raft

$$P + P'$$

fordert.

Die Zeit welche während des Aufzugs und Niedergangs des Kolbens verfließt, heißt die Zeit eines Kolbenspiels. Setzt man diese = t und ist die Zeit des Kolbenhubs τ, der Zeit es Niedergangs gleich, so wird

$$t = 2\tau$$

nd man erhält die Zeit eines Kolbenspiels

$$t = \frac{2b}{w}$$

Ist nun für die einfache Saugpumpe M′ die Wassermenge, welche während eines Kolbenspiels usgegossen wird, so muß diese dem jedesmal ge- obenen Wasser gleich seyn, vorausgesetzt daß der Kolben genau in die Röhre paßt und die Ventile ch luft- und wasserdicht verschließen, damit sie in Wasser fallen lassen. Alsdann ist die Wassermenge in der Zeit t bei einer einfachen Saugpumpe

$$M' = Ab.$$

Während einer Minute werde die Wassermenge M ausgegossen und die Anzahl der Kolbenzüge in dieser Zeit sei m, so verhält sich

$$M' : M = 1 : m \quad \text{also}$$

$$M = mM' \quad \text{oder}$$

$$M = mAb$$

Ferner verhält sich

$$t : 60 = 1 \text{ [illegible]}$$

$$m = \text{[illegible]}$$

$$M = \frac{60}{t} Ab = \frac{2b}{t} . 30 A; \text{ aber}$$

$$w = \frac{2b}{t} \text{ folglich}$$

findet man die Wassermenge welche in jeder Minute ausläuft, oder

$$M = 30 \, w A$$

und bei einem doppelten Saugwerke

$$M = 60 \, w A.$$

Beispiel. Bei den Abmessungen der einfachen Saugpumpe (215. §.) erhält man die Wassermenge für jede Minute

$$M = 30 . \tfrac{1}{3} . 0{,}442 = 4{,}42 \text{ Kubikfuß.}$$

Anmerk. Während des Kolbenhubs wird zwar nicht die ganze Wassermasse M' ausgegossen, sondern nur ein Wassercylinder von der Höhe b, dessen Grundfläche A, weniger dem Querschnitte des Kolbens ist. Beim Niedergange tritt aber mehr Wasser über den Kolben als in dem Stiefel wegen der Kolbenstange Platz findet, daher bleibt die Wassermenge während eines Kolbenspiels = bA. Nur ist zu bemerken, daß gewöhnlich ein Theil des gehobenen Wassers, wegen Unvollkommenheit der Ventile, wieder zurückfällt.

218. §.

In Absicht der Saugpumpen ist überhaupt noch zu bemerken, daß man die kleinste Geschwindigkeit des Kolbens nicht gern unter $\frac{1}{2}$, und die größte, nicht über $2\frac{1}{2}$ Fuß in einer Sekunde annimmt.

Die Größe des Hubs oder b muß man so groß annehmen, als es die übrigen Umstände zulassen wollen, weil bei jedem Niedergange des Kolbens, durch das Stiefelventil einiges Wasser verloren

eht, und bei jedem Steigen Kraft erfordert wird, ie trägen Massen in Bewegung zu setzen.

Soll die Pumpe gut proportionirt seyn, so ist öthig, daß der Flächeninhalt a' von der Öfnung n Stiefelventile, eben so groß sei, als der Querhnitt A' der Saugröhre.

Die Weite der Saugröhre nimmt man am esten so an, daß der Inhalt ihres Querschnitts ., $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ von dem Inhalte des Stiefelquerhnitts A beträgt.

219. §.

Die Pumpenröhren werden sehr häufig aus)olz verfertiget, welches man ausbohrt, und wenn e einen großen Wasserdruck auszuhalten haben, urch Umlegung eiserner Ringe verstärkt. Öfters acht man die Stiefel von Holz oder Messing, nd die Saugröhren von Blei; bei Pumpen wele beständig betrieben werden ist es aber rathsam, ämmtliche Röhren von gegossenem Eisen zu maen und die Stiefel gut ausbohren zu lassen, weil hr vieles darauf ankommt, daß die Stiefel vollommen glatt und cylindrisch sind.

Eine vollständige Saugpumpe, wie solche nach r Beschreibung des Herrn D. Baader, in Engund von gegossenem Eisen verfertiget wird, ist igur 10 auf der II. Tafel im Durchschnitte und T. II.
on zwei Seiten anzusehen gezeichnet; eben diese Fig. 10.
rt Pumpen sind bei der Saline zu Schönebeck ngebracht.

Haben die Stiefel keine Saugröhre, so daß sich as Stiefelventil im Unterwasser befindet, so verrtigt man sie zuweilen von zweizölligen Bohlen, ergestalt, daß der Querschnitt des Kolbens ein Quadrat giebt, welch [illegible] ufig beim Schleusenau vorkommt. M [illegible] Gilly, Grundiß zu den Vorle [illegible] Praktische bei

verschiedenen Gegenständen der Wasserbaukunst. Berlin 1795. 54. §. S. 25.

220. §.

Bei Anordnung der Ventile kommt alles darauf an, daß sie dem Wasser den größtmöglichen Durchgang verstatten und sich beim Niedergange des Kolbens sogleich verschließen. Es giebt ungemein vielerlei Arten die Ventile zu formen, wovon hier die vorzüglichsten beschrieben werden sollen.

Einfache Klappventile (Valvula, *Clapet*), bestehen aus einer Scheibe von Pfundleder, sind mit einer daran befestigten metallnen Platte beschwert und an dem einen Ende, wo an der ledernen Scheibe ein Lappen stehen bleibt, mittelst derselben neben der Ventilöfnung so befestiget, daß sie leicht auf- und zugehen. Bei den gemeinen Pumpen wird die Platte von Blei genommen und mit Nägel befestiget, sonst aber nimmt man zwei kupferne oder eiserne Platten, wovon die oberste größer und die unterste etwas kleiner als die Ventilöfnung ist; beide Platten werden alsdann durch eine oder mehrere Schrauben mit der ledernen
T. II. Scheibe verbunden. Man s. Figur 11. Bei die-
F. 11. sen Ventilen kommt sehr viel darauf an, daß zu der Scheibe gutes Leder genommen werde, welches man dadurch noch verbessert, daß solches vorher in einer heißen Mischung von Talg, Öhl und Theer getränkt wird.

Man hat auch Klappventile welche ganz von Metall und mit einem dergleichen Gewinde versehen sind. Sie haben aber den Nachtheil daß sich Sand und Unreinigkeiten zwischen das Gewinde setzen, und dadurch das vollkommene und schnelle Verschließen der Öfnung erschweren.

Unter allen Ventilen gewähren die Klappenventile die größte Durchflußöfnung, daher sie mit Recht bei einer guten Konstruktion den Vorzug vor andern verdienen.

Doppelte Klappventile bringt man gewöhnlich an, wenn die Pumpenröhre eine beträchtliche Weite hat. Das Ventil hat alsdann zwei Öfnungen, welche beinahe die Gestalt eines Halbkreises haben, und auf dem Zwischenraume dieser Öfnungen oder dem Steg, werden die Klappen befestiget, wie die Figur 12 näher nachweiset. Die T. II. F. 12.
lederne Scheibe zu beiden Klappen wird kreisrund geschnitten, in der Mitte durchbohrt und befestiget; auch werden, wie bei den einfachen Klappen, auf beiden Seiten metallne halb kreisförmige Platten befestiget.

Ventile mit vielen runden Öfnungen taugen nichts, weil sie wegen der Contraction und Verengung, das Durchlaufen des Wassers erschweren.

Balancirventile werden ganz aus Metall verfertiget und durch einen hohlen Deckel, welcher zwei Zapfen hat, und an den entgegengesetzten Enden der kreisrunden Öfnungen befestiget ist, verschlossen. Die Linie durch die Mitte beider Zapfen geht aber nicht durch den Mittelpunkt der Öfnung, sondern weicht $\frac{1}{12}$ desselben davon ab, damit die eine größte Hälfte des Deckels durch ihr Übergewicht die eine Öfnung von oben, und die kleinere Hälfte, die Öfnung von unten verschließt. Fig. 13. Dieses Ventil ist, wenn von unten kein T. II. F. 13.
Wasser dagegen preßt, immer durch sein eigenes Übergewicht verschlossen, und man hat nur dafür zu sorgen, daß es beim Öfnen, nicht nach der entgegengesetzten Seite überschlage, welches durch Anbringung einiger Zapfen verhindert werden kann. Belidor hat diese Ventile zuerst bekannt gemacht *), nur lassen sie sich nicht gut da anbringen, wo die Bewegung des Wassers sehr

---

*) *Belidor*, Architectura Hydraulica. 1. Theil. III. Buch 5. Kap. 1133.

schnell ist, weil durch den Druck des Wassers gegen die kleinere Hälfte des Ventils, eine beträchtliche Verzögerung bei der Eröfnung entstehet.

Muschelventile (*Soupape à coquille*), bestehen ebenfalls ganz aus Metall und haben eine solche Einrichtung, daß die nach oben konisch erweiterte Öfnung, durch einen hohlen Deckel welcher in die Öfnung genau paßt und eingerieben ist, sich dabei vertikal auf- und niederbewegen kann, verschlossen wird, wie solches die Abbildung Fig. 14
T. II. F. 14. näher nachweiset. Sie erfordern daß die Öfnung welche zum Durchfließen des Wassers übrig bleibt, so groß genommen werde, als der Raum ist, der sich bei geöfnetem Ventile zwischen dem Teller und der Stiefelwand befindet. Hieraus folgt daß diese Durchflußöfnung nie halb so groß als die Weite des Stiefels seyn kann. Gewöhnlich nimmt man wenn D der Durchmesser des Stiefels oder der Röhre ist, den mittlern Durchmesser der Muschel $= D\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Um den Muschelventilen, da sie in Absicht der Dauer den Klappventilen vorzuziehen sind, auch die Vortheile derselben wegen der großen Durchflußöfnung zu geben, dürfte man nur den Stiefel unterhalb so viel erweitern, daß die Ventilöfnung dem Querschnitte der Saugröhre beinahe gleich wäre; auch kann man dem Stege eine größere Länge geben, so daß er bis an beide Stiefelwände reicht, wodurch eine größere Einflußöfnung entstehet. Die größte Höhe auf welche das Muschelventil steigen kann, muß ebenfalls so proportionirt werden, daß hinlänglicher Raum zum Durchfließen des Wassers entstehe.

Kegelventile (*Soupape conique*), sind wie die Muschelventile gestaltet, außer daß der Deckel viel höher und oberhalb verschlossen ist. Sie verengen den Durchfluß des Wassers noch mehr wie die Muschelventile.

Kugelventile (*Soupape sphérique*), haben
ınstatt des Deckels, eine auf der Öfnung lose lie-
gende Kugel. Man sieht aber leicht ein, daß hie-
urch der Raum zum Durchfließen des Wassers
och mehr wie bei den Kegelventilen verengt wird,
aß es sehr schwer ist die Kugel und Öfnung ge-
au abzudrehen und noch schwerer, der Kugel das
rforderliche Gewicht zu geben.

Die Art wie die Ventile befestiget werden, ist
erschieden. Zuweilen werden sie mittelst Schrau-
en zwischen der Saugröhre und dem Stiefel an-
ebracht, wie Figur 11 bis 14; weil aber öfters T. II.
Reparaturen an den Ventilen vorfallen, so hat
ieses die Unbequemlichkeit, daß man um zu den-
elben zu gelangen, jedesmal die Saugröhre oder
en Stiefel abnehmen muß. Dieses zu vermeiden,
erden die Ventile zuweilen in besondern kurzen
Röhren, nach Art der Kolben angebracht und
ben mit einem eisernen Reifen versehen, damit
ıan sie, wenn die Kolbenstange herausgenommen
t, aufziehen und ausbessern könne. Vorzüglich bei
en englischen Pumpen, werden eigene Ventil-
thüren angebracht, deren Konstruktion man aus
er Figur 10 sehen kann, wo alsdenn auch ohne T. II.
en Kolben abzunehmen, die Ventile ausgenommen F. 10.
nd eingesetzt werden können.

221. §.

Die Kolben zu den Saugpumpen sind eben
o mannichfaltig wie die Ventile. Es kommt bei
enselben nicht allein darauf an, daß sie vollkom-
ıen genau an den Stiefelwänden anschließen, keine
uft und kein Wasser durchlassen, sondern sie müs-
n auch leicht beweglich und in der Mitte mit
ner möglichst großen Öfnung versehen seyn,
m Aufziehen des Kolbens durch eine
fen wird, und dem Wasser keinen
tet. Am besten ist es das Gerippe

derselben oder den Kolbenstock (*Corps du piston*) von Metall zu nehmen. Öfters wird er aber von Holz angefertigt, welches vorher in Öhl gekocht wird. Ein solcher hölzerner Kolben mit einer Durchflußöfnung und einer gewöhnlichen einfachen
T. II. Klappe, ist Fig. 15 abgebildet. Oberhalb ist um
F. 15. denselben ein Streifen Wallroßleder befestiget, welches überstehen muß, damit es beim Aufziehen des Kolbens von dem Wasser gegen die Stiefelwände gepreßt werde. Um dieses Leder wird ein von innen abgeschregter eiserner oder besser ein kupferner Ring getrieben, der genau in den Stiefel paßt, so wie auch unterhalb des Kolbens, ein solcher Ring umgelegt wird, damit der Kolben nicht leicht auseinander reissen könne. Um die Grundfläche des Kolbens wird eine eiserne Scheibe gelegt, und zwischen beiden Ringen die Vertiefung mit umgewickeltem Hanf ausgefüllt.

Den Durchschnitt eines hölzernen Kolbens mit doppelten Öfnungen und Klappen, welcher bei weiten Stiefeln angebracht werden kann, sehe man
T. II. Figur 16, wo der Steg oder die Mitte zwischen
F. 16. beiden Öfnungen durchbohrt ist, damit ein eiserner Bolzen zur Befestigung der Kolbenstangen durchgesteckt und angeschraubt werden könne. Man kann auch dergleichen Kolben von Blei anfertigen, in welchem Falle, die Durchflußöfnung noch größer angenommen werden kann.

Von den englischen aus Eisen gegossenen Kol-
T. II. ben mit doppelten Klappen, zeigt Figur 17 eine
F. 17. Abbildung.

Noch eine Art metallner Kolben mit Muschelventil, bei welchen kein Leder sondern nur Hanf
T. II. umgewunden ist, stellt Figur 18 dar. Man kann
F. 18. diese Kolben aber nur in metallnen Stiefeln gebrauchen, in welche sie mit ihrem untern vorspringenden Theile, sehr genau passen müssen und eingerieben werden. Über dem Hanfe ist ein metall-

er Ring der ebenfalls genau in den Stiefel paßt, nd wenn der Hanf abgenutzt oder lose geworden t, mittelst Anziehung einer Schraubenmutter zu-ammengepreßt werden kann, ohne daß man jedes-ial nöthig hätte, neuen Hanf umzulegen.

222. §.

Außer den vorhin beschriebenen gewöhnlichen Einrichtungen der Saugpumpen, kann man die-lben auch noch so anordnen, daß der Stiefel AB igur 19 im Unterwasser stehet, die Saugröhre anz wegfällt und nur eine Aufsatzröhre BG, wel-e etwas von der Seite gebogen ist, erfordert wird. Man nennt dies eine verkehrte Saugpumpe *Pompe soulevante*). Zur Bewegung des Kol-ens ist alsdann eine kurze Kolbenstange CD, wel-e an dem Gatter (*Chassis*) ED befestiget ist, inreichend, und dieses Gatter wird mittelst der ugstange EF bewegt. Diese Einrichtung hat den Vortheil, daß die Zugstange nicht in dem Wasser er Aufsatzröhre sich bewegen darf. T. II. F. 19.

Der Kolben erhält, wie es aus der Figur deut-ch ist, seine Ventilklappe am entgegengesetzten Ende nd das Stiefelventil befindet sich oberhalb des Stiefels.

Die vorzüglichsten Schriften über die Theorie nd Einrichtung der Pumpen, sind am Ende des chtzehnten Kapitels angeführt.

225. §.

Die Kraft welche wegen des Widerstandes des Wassers an den Wänden und beim Durchgange durch die Ventilöfnungen erfordert wird, kann eben so wie 215. §. bei den Saugpumpen bestimmt werden, und man kann den Widerstand welcher wegen der Krümmung der Gurgelröhre entstehet außer Acht lassen, da derselbe bei einer hinlänglich weiten Röhre nur geringe seyn wird, um so mehr, weil die Unsicherheit bei Bestimmung der Friktion und anderer Hindernisse, doch keine allzugenaue Rechnung zuläßt.

Bezeichnet

A den Querschnitt, L die Länge *) und D den Durchmesser des Stiefels,

A′ den Querschnitt, L′ die Länge und D′ den Durchmesser des Gurgelrohrs,

A″ den Querschnitt, L″ die Länge und D″ den Durchmesser der Steigröhre,

a′ den Inhalt der Öfnung am Stiefelventile, und

a″ den Inhalt der Öfnung am Gurgelventile;

ist ferner die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens = w und

H′ die hydraulische Widerstandshöhe beim Niedergange des Kolbens,

so muß das Wasser im Stiefel beinahe den Weg L durchlaufen, welche größere Länge um so mehr

*) Die Länge des Stiefels wird hier nur vom höchsten Kolbenstande bis zur Mitte der Mündung des Gurgelrohrs gerechnet.

ngenommen werden kann, weil der Widerstand egen Krümmung der Gurgelröhre, der Kürze we- en, nicht in Rechnung kommt. Nach 154. §. fin- et man wenn die nöthigen Abänderungen vorge- ommen werden, die Widerstandshöhe

$$H' =$$
$$w^2 \left[0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2 + 0{,}0243\left(\frac{A}{A'}\right)^2 + 0{,}0417\left(\frac{A}{a''}\right)^2 - 0{,}016\left(\frac{A}{A}\right)^2 - 0{,}016\left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{1}{2006}\left(\left(\frac{A}{A}\right)^2\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2\frac{L'}{D'} + \left(\frac{A}{A''}\right)^2\frac{L''}{D''}\right) - \frac{1}{48}\right]$$

oder

$$H' =$$
$$w^2 \left[0{,}0083\left(\frac{A}{A'}\right)^2 + 0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2 + 0{,}0417\left(\frac{A}{a''}\right)^2 - 0{,}032 + \frac{1}{2006}\left(\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2\frac{L'}{D'} + \left(\frac{A}{A''}\right)^2\frac{L''}{D''}\right)\right]$$

der wenn man die Größe in der Parenthese elche mit w^2 multiplizirt ist $= \left(B - \frac{1}{48}\right)$ setzt 157. §.)

$$H' = w^2 \left(B - \frac{1}{48}\right)$$

226. §.

Ist der Kolben in seinem höchsten Stande um ie Höhe b' von dem Unterwasser entfernt, so ist $-b'$ die kleinste Druckhöhe welche zur Erzeugung er Geschwindigkeit des Wassers, mit welcher es n den Stiefel steigt, verwandt werden kann. Es st daher auf eine ähnliche Art wie 213. §. die rößte Geschwindigkeit des Kolbens

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{b(k-b')}{2BL}\right]}$$

der weil hier

$$B = 0{,}0417 \left(\frac{A}{a'}\right)^2 + \frac{L}{2006 D}$$

o wird erfordert, damit das unter dem Kolben

befindliche Wasser sich nicht von demselben trenne, daß die mittlere Geschwindigkeit des Druckkolbens nicht größer als

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{b\,(k-b')}{2L\left[0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2+\frac{L}{2006D}\right]}\right]}$$

angenommen werde.

227. §.

Bei jedem Niedergange des Kolbens muß die Wassermasse in den Pumpenröhren von neuem in Bewegung gesetzt werden, wozu wegen der trägen Masse, Kraft erfordert wird. Setzt man daß

- b die Höhe des Kolbenhubs,
- τ die Zeit eines Kolbenhubs,
- P die gesammte Kraft mit welcher die Kolbenstange herunter gestoßen wird,
- R den gesammten hydrostatischen, hydraulischen- und Reibungswiderstand, welcher die Bewegung des Kolbens verhindert, und
- N die sämmtliche Masse des zu bewegenden Wassers auf den Kolben reduzirt

bezeichne, so erhält man auf eine ähnliche Art wie 214. §.

$$P = R + \frac{bN}{g\tau^2}$$

wo $\frac{bN}{g\tau^2}$ der mechanische Widerstand ist.

Nun findet man (61. §.) das Moment der Trägheit für das Wasser

in dem Stiefel	$w^2 . LA$
in dem Gurgelrohr	$\left(\frac{Aw}{A'}\right)^2 . L'A'$
in der Steigröhre	$\left(\frac{Aw}{A''}\right)^2 . L''A''$

Sollen diese Massen, der Masse [illegible]
em Kolben mit der Geschwindigkeit [illegible]
wird, gleichgültig seyn, so wird erfordert [illegible]
daß

$$[illegible]^2 N = \left[w^2 LA + \left(\frac{Aw}{A'}\right)^2 L'A' - [illegible] \right.$$

$$\text{oder } N = A \left[L + \frac{A}{A'} L' + \frac{A}{A''} [illegible] \right.$$

Es ist daher

$$P = R + \frac{Ab}{g\tau^2} \left[L + \frac{A}{A'} L' + [illegible] \right.$$

oder wenn man

$$\frac{b}{g\tau^2} \left[L + \frac{A}{A'} L' + \frac{A}{A''} L'' \right] = [illegible]$$

setzt, so wird

$$P = R + \gamma . A . T.$$

228. §.

Nimmt man die vorhergegangenen Bestimmungen zusammen, so findet man die Höhe [illegible] Wassersäule über der Grundfläche [illegible] Kolbens, deren Gewicht zum Niederdrücken des Kolbens verwendet werden muß

$$= H + H' + f + T$$

und die Kraft zum Niederdrücken

$$P = \gamma A \left[H + H' + T + f \right]$$

Dabei ist die Höhe des hydrostatischen Widerstandes, oder die lothrechte Entfernung des Unterwassers vom Ausgusse $= H$.

Die Höhe des hydraulischen Widerstandes

$H' =$

$$w^2 \left[0{,}0083 \left(\frac{A}{A'}\right)^2 + 0{,}0417 \left(\frac{A}{a'}\right)^2 + 0{,}0417 \left(\frac{A}{a''}\right)^2 \right.$$

$$\left. - 0{,}032 + \frac{1}{2000} \left(\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \frac{L'}{D'} + \left(\frac{A}{A''}\right)^2 \frac{L''}{D''} \right) \right]$$

befindliche Wasser sich nicht von demselben trenne, daß die mittlere Geschwindigkeit des Druckkolbens nicht größer als

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{b\,(k-b')}{2L\left[0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2+\frac{L}{2006\,D}\right]}\right]}$$

angenommen werde.

227. §.

Bei jedem Niedergange des Kolbens muß die Wassermasse in den Pumpenröhren von neuem in Bewegung gesetzt werden, wozu wegen der trägen Masse, Kraft erfordert wird. Setzt man daß

- b die Höhe des Kolbenhubs,
- τ die Zeit eines Kolbenhubs,
- P die gesammte Kraft mit welcher die Kolbenstange herunter gestoßen wird,
- R den gesammten hydrostatischen, hydraulischen- und Reibungswiderstand, welcher die Bewegung des Kolbens verhindert, und
- N die sämmtliche Masse des zu bewegenden Wassers auf den Kolben reduzirt

bezeichne, so erhält man auf eine ähnliche Art wie 214. §.

$$P = R + \frac{bN}{g\tau^2}$$

wo $\frac{bN}{g\tau^2}$ der mechanische Widerstand ist.

Nun findet man (61. §.) das Moment der Trägheit für das Wasser

in dem Stiefel	$w^2 \,.\, LA$
in dem Gurgelrohr	$\left(\frac{Aw}{A'}\right)^2 \,.\, L'A'$
in der Steigröhre	$\left(\frac{Aw}{A''}\right)^2 \,.\, L''A''$

Sollen diese Massen, der Masse N welche an em Kolben mit der Geschwindigkeit w bewegt wird, gleichgültig seyn, so wird erfordert (61. §.) aß

$$r^2 N = \left[w^2 LA + \left(\frac{Aw}{A'}\right)^2 L'A' + \left(\frac{Aw}{A''}\right)^2 L''A''\right] \gamma$$

oder $N = A \left[L + \frac{A}{A'} L' + \frac{A}{A''} L''\right] \gamma$ sei.

Es ist daher

$$P = R + \frac{Ab}{g\tau^2} \left[L + \frac{A}{A'} L' + \frac{A}{A''} L''\right] \gamma$$

der wenn man

$$\frac{b}{g\tau^2} \left[L + \frac{A}{A'} L' + \frac{A}{A''} L''\right] = T$$

etzt, so wird

$$P = R + \gamma . A . T.$$

228. §.

Nimmt man die vorhergegangenen Bestimmungen zusammen, so findet man die Höhe der Wassersäule über der Grundfläche des Kolbens, deren Gewicht zum Niederdrücken des Kolbens verwendet werden muß,

$$= H + H' + f + T$$

und die Kraft zum Niederdrücken

$$P = \gamma A [H + H' + T + f]$$

Dabei ist die Höhe des hydrostatischen Widerstandes, oder die lothrechte Entfernung des Unterwassers vom Ausgusse $= H$.

Die Höhe des hydraulischen Widerstandes

$$H' =$$

$$w^2 \left[0{,}0083 \left(\frac{A}{A'}\right)^2 + 0{,}0417 \left(\frac{A}{a'}\right)^2 + 0{,}0417 \left(\frac{A}{a''}\right)^2 - 0{,}032 + \frac{1}{2000} \left(\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \frac{L'}{D'} + \left(\frac{A}{A''}\right)^2 \frac{L''}{D''}\right)\right]$$

Die Höhe des mechanischen Widerstandes

$$T = \frac{b}{g\tau^2}\left[L + \frac{A}{A'}L' + \frac{A}{A''}L''\right]$$

Die Höhe des Reibungswiderstandes

$$f = (0{,}1 \pm)\,\frac{H}{D}$$

woraus man die Regel ziehet, daß alles übrige gleich gesetzt, die Kraft bei der Druckpumpe desto kleiner seyn kann, je kürzer und weiter die Gurgel- und Steigröhren, und je größer die Ventilöfnungen sind.

229 §.

Soll der Kolben aufwärts gezogen werden, so ist im höchsten Punkte desselben, die hydrostatische Widerstandshöhe (210. §.)

$$= b'$$

Die Druckhöhe zur Überwältigung des hydraulischen Widerstandes und zur Hervorbringung der Geschwindigkeit w

$$H'' = w^2\left[0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2 + \frac{L}{2006\,.\,D}\right]$$

die Höhe des Reibungswiderstandes

$$f = (0{,}1 \pm)\,\frac{L}{D}$$

und weil hier der mechanische Widerstand unbeträchtlich ist, so erhält man, wenn

P′ die Kraft zum Aufziehen des Kolbens bezeichnet,

die gleichgeltende Wasserhöhe auf der Grundfläche des Kolbens

$$= b' + H'' + f$$

und die Kraft zum Aufziehen des Kolbens

$$P' = \gamma A\,[b' + H'' + f].$$

230. §.

230. §.

Die Druckpumpen werden gewöhnlich paarweise von gleichen Abmessungen angelegt, da man dann zwei zusammengehörige Pumpen, von welchen der eine Kolben aufgezogen wird, wenn der andere heruntergehet, ein doppeltes Druckwerk nennt. Sie erhalten eine gemeinschaftliche Steigröhre, mit der sie durch die Gurgelröhren vereiniget sind.

Die fortwährend erforderliche Kraft zur Bewegung der Kolben beim doppelten Druckwerke ist

$$P + P'$$

und wenn man die Zeit t eines Kolbenspiels $= 2\tau$ setzt, so wird

$$t = \frac{2b}{w}$$

Es sei bei dem einfachen Druckwerke M' die Wassermenge, welche während der Zeit eines Kolbenspiels gehoben wird, so ist M'

$$M' = A \cdot b$$

und wenn während einer Minute, die Wassermenge M ausgegossen und die Anzahl der Kolbenzüge in dieser Zeit $= m$ ist, so erhält man wie 217. §. die Wassermenge für jede Minute bei dem einfachen Druckwerke M m

$$M = 30\,wA$$

und bei dem doppelten Druckwerke

$$M = 60\,wA.$$

Beispiel. Für $w = 2$ Fuß und $A = \frac{5}{6}$ □ Fuß, ist die Wassermenge bei einem einfachen Druckwerke in jeder Minute

$$M = 30 \cdot 2 \cdot \tfrac{5}{6} = 50 \text{ Kubikfuß}.$$

231. §.

Bei einem doppelten Druck[illegible] gemeinschaftlicher Steigröhre, bleibt [illegible] Wasser

derselben in beständiger Bewegung, weil allemal wenn der eine Kolben aufwärts geht, der andere Wasser in die Steigröhre preßt. Nur in dem Augenblicke wenn die Kolben eine entgegengesetzte Bewegung annehmen, wird kein Wasser fortgedrückt, und das Wasser in der Steigrohre würde zum augenblicklichen Stillstande kommen, wenn es nicht wegen seines Beharrungsvermögens die Bewegung fortsetzte. Es ist daher in diesem Falle die Höhe für den mechanischen Widerstand geringer, also P kleiner; man wird aber nicht viel fehlen, wenn P etwas zu groß in Rechnung gebracht wird.

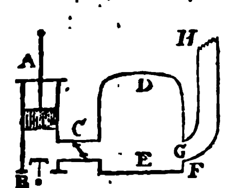
Um aber sowohl bei den einfachen als auch bei den doppelten Druckpumpen, ein gleichförmiges Fortströmen des Wassers zu bewirken, müßte man eine Kraft anbringen, die wenn der Druck der Kolben aufhört, gegen das Wasser in der Steigröhre preßt. Dieses geschieht durch den Windkessel (Catinum, *Réservoir d'air, Récipient*), welcher mit den Stiefeln in Verbindung gesetzt wird. Wenn bei einem doppelten Druckwerke, A, B die beiden Stiefel sind, und man verbindet mit denselben durch die Kropf- oder Verbindungsröhren C und D, ein vollkommen luft- und wasserdichtes Gefäße EF, welches man gewöhnlich eben so hoch wie die Stiefel und doppelt so weit macht, so heißt EF der Windkessel, von welchem bei G die Steigröhre GH abgeht. An oder in den Verbindungsröhren befinden sich Ventile, die sich gegen den Windkessel öfnen.



Steigt nun der Kolben B in die Höhe, so wird der Stiefel B mit Wasser angefüllt und das Kropfventil D bleibt verschlossen. Wenn hingegen der Kolben A heruntergedrückt wird, und der Stiefel

ist voll Wasser, so bleibt das Stiefelventil geschlossen, das Kropfventil wird aufgestoßen und das Wasser tritt in den Windkessel, woselbst es die oberhalb bei E befindliche Luft zusammen preßt, und zum Theil durch die Öfnung bei G in die Steigröhre geht. Läßt irgend einen Augenblick der Druck der Kolben nach, so fährt die zusammengepreßte Luft im Windkessel fort, auf das Wasser zu drücken und es bleibt im Steigen.

Auf eine ähnliche Art kann durch Anbringung eines Windkessels bei einer einfachen Druckpumpe, ein fortwährendes Steigen des Wassers bewirkt werden. Der Windkessel DE, welcher etwa drei bis viermal so weit und eben so hoch wie der Stiefel AB ist, wird durch die Verbindungsröhre C mit dem Stiefel vereinigt, und an einer Seite des Kessels, geht die Steigröhre FH in die Höhe, da man sich dann den Erfolg eben so wie bei dem doppelten Druckwerke erklären kann.



Wenn nun bei einfachen und doppelten Druckwerken, die Wassersäule in der Steigröhre in fortwährender Bewegung bleibt, und wenn man überdies dafür sorgt, daß beim Austritte des Wassers aus dem Windkessel in die Steigröhre, die Einflußöfnung G keine scharfe Kante hat, sondern sich allmählich verengt, so findet daselbst beinahe keine Contraction Statt, und die Höhe wegen des mechanischen Widerstandes (227. §.) wird

$$T = \frac{b}{g r^2}\left[L + \frac{A}{A'} L'\right]$$

wo alsdenn

A' den Querschnitt, und

L' die Länge der Verbindungsröhre bezeichnet.

Auch bei den Saugpumpen ... Vor-

theil ein Windkessel über der Saugröhre anbringen, da denn das Wasser aus demselben mittelst einer Verbindungsröhre in den Stiefel unter den Saugkolben tritt, nur muß sich noch ein Ventil an der Verbindungsröhre befinden, welches sich nach dem Stiefel öfnet.

232. §.

Dasjenige was von den Ventilen bei den Saugpumpen gesagt worden, gilt unter ähnlichen Umständen von den Druckpumpen. Da die Kolben keine Ventile haben, sondern ganz massiv sind, so dürfen sie zwar nicht so künstlich seyn, sie müssen aber vorzüglich genau an die Stiefel schließen, weil sonst bei dem großen Drucke welchen die Kolben leiden, das Wasser leicht über sie tritt. Es werden daher auch die Stiefel zu den Druckwerken gewöhnlich von Metall verfertiget und gut ausgebohrt.

Man hatte sonst die Kolben von übereinander gelegten und mittelst zweier Metallplatten zusammengepreßten pfundledernen Scheiben verfertiget; diese Art hat aber den Nachtheil, daß wenn sie neu sind, die Friktion außerordentlich groß ist, und so bald sie sich nur etwas abnutzen, tritt das Wasser über dieselben.

Eine bessere Art von Druckkolben findet man
T. III. F. 20. Figur 20 abgebildet. Der mittelste Körper oder Kolbenstock wird aus recht hartem Holze, oder besser aus Blei, etwa zwei Zoll hoch verfertiget. Auf beiden Seiten sind Fugen von der Dicke des umzulegenden Leders schräg eingedreht, in dieselben das Leder gesteckt und mit Nägel befestiget. Auf beiden Seiten des Kolbenstocks werden zwischen dem Leder, Scheiben von Korkholz eingepreßt, auf welche wieder metallne Scheiben kommen, die mittelst der Schraubenmutter des durchgehenden Bolzens, zusammengepreßt werden, und so den ganzen Kol-

[illegible]

[illegible]

...ig, daß das Gewicht der Kolbenstange in die
...e des Kolbens kommt, welches der Feuerspri-
...we diese Stangen kurz sind, und sich merk-
...en der senkrechten Lage entfernen, nicht gleich-
...; ist. Sie erfordern gut ausgebohrte Stie-
...nd die äußern metallnen Ränder, müssen in
...en eingerieben werden.

...ei vollkommen gut polirten metallnen Stie-
...kann man auch die Kolben ganz massiv, ohne
... oder Leder machen.

Achtzehntes Kapitel.

Von den vereinigten Saug- und Druckpumpen.

233. §.

Wird bei einer Pumpe, das Wasser sowohl durch den Druck der Atmosphäre in einer besondern Saugröhre, und zugleich durch den Druck des Kolbens gehoben, so entstehet ein vereinigtes Saug- und Druckwerk (Antlia suctoria simul et compressoria, *Pompe mixte*), dessen Zusammensetzung die nebenstehende Figur hinlänglich erläutert. AB ist der Stiefel, BC die Saugröhre, DE das Gurgelrohr und EF ein Theil der Steigröhre. Es läßt sich auch die Bewegung des Kolbens in entgegengesetzter Richtung anbringen, alsdann muß die Kolbenstange mittelst eines Gatters bewegt werden. Man sieht auch leicht, daß sich bei den vereinigten Saug- und Druckwerwerken eben so wie bei den Druckwerken, zwischen dem Stiefel und der Steigröhre ein Windkessel anbringen läßt, um eine gleichförmigere Bewegung des Wassers in der Steigröhre zu bewirken.



234. §.

Nimmt man dasjenige zusammen, was in den beiden vorhergehenden Kapiteln von dem Wider-

stande bei Saug- und Druckpumpen gelehrt ist, so läßt sich daraus leicht die Kraft zur Bewegung des Kolbens bei den vereinigten Saug- und Druckwerken bestimmen. Eben so leicht ist es, nach den dortigen Sätzen die Wassermenge zu finden, welche in jeder Minute gehoben wird.

Noch wird es nicht undienlich seyn, ein von de la Hire angegebenes Pumpenwerk (Mémoire pour la construction d'une pompe qui fournit continuellement de l'eau dans le reservoir. Mém. de l'acad. de Paris, année 1716. Edit. Bat. p. 408 etc.) zu beschreiben, welches beim Auf- und Niedergange des Kolbens Wasser hebt. Mit dem Druckstiefel AB ist die Saugröhre CDH und Steigröhre EFG, jede mittelst zweier Ventile in C, D und E, F so verbunden, daß sich die Saugröhrventile C, D gegen den Stiefel, die Steigröhrventile E, F gegen die Steigröhre öfnen. Der massive Kolben geht in dem, außer den Ventilöfnungen von allen Seiten geschlossenen Stiefel, und die Kolbenstange geht bei A so durch den Deckel, daß der Stiefel (wie bei den neuen Dampfmaschinen) luft- und wasserdicht verschlossen bleibt. Geht der Kolben in die Höhe, so öfnen sich die Ventile D und E; das Wasser aus der Saugröhre tritt unter den Kolben, und das Wasser über dem Kolben, wird in die Steigröhre getrieben. Geht der Kolben niederwärts, so öfnen sich die Ventile C und F; das Wasser aus der Saugröhre tritt über den Kolben, und durch das Ventil F wird das Wasser unter dem Kolben, in die Steigröhre getrieben.

Erhebliche Schriften, in welchen man Untersuchungen über die Bewegung des Wassers in Pum-
[illegible] nachstehende:

Discussion plus particulière des diverses manières d'élèver de l'eau par le moyen des pompes avec le plus grand avantage, par L. *Euler.* Mém. de l'acad. de Berlin 1752. p. 149.

Maximes pour arranger le plus avantageusement les machines destinées à élèver de l'eau par le moyen des pompes, par L. *Euler.* Mém. de l'acad. de Berlin 1752. p. 185.

W. J. G. Karsten, Lehrbegrif der gesammten Mathematik. 5. Th. Greifswale 1770; der XVII—XXIX. Abschnitt.

W. J. G. Karsten, Abhandlung über die vortheilhafteste Anordnung der Feuerspritzen. Greifswalde 1773.

G. S. Klügel, Abhandlung von der besten Einrichtung der Feuerspritzen. Berlin 1774.

Du Buat, angef. Hydraulique, (1786) Part. I. Sect. IV. Chap. 8.

K. C. Langsdorf, Versuch einer neuen Theorie hydrodynamischer und pyrometrischer Grundlehren. Frankf. und Leipzig 1787; das 7te, 8te und 9te Kap.

Langsgorf, angef. Hydraulik (1794) 22stes bis 27stes Kapitel.

Langsdorf, angef. Maschinenlehre (1797). I. Band, 2ter Theil. 12tes und 13tes Kapitel; und II. Band (1799) 7te Abhandlung.

A. G. Kästner, Anfangsgründe der Hydrodynamik. Zweite vermehrte Auflage. Göttingen 1797. 668—748 §.

D. J. Baader, vollständige Theorie der Saug- und Hebepumpen und Grundsätze zu ihrer vortheilhaften Anordnung. Bayreuth 1797.

Vorzüglich über den Bau und die Anlagen der Pumpen, findet man in folgenden Schriften Nachricht:

J. Leupold, Theatrum machinarum hydraulicarum

Tom. I. Leipzig 1724. Cap. X. XII. und Tom. II. 1725. Cap. III—VIII und X.

H. Calvör, historisch-chronologische Nachricht und Beschreibung des Maschinenwesens bei dem Bergbau auf dem Oberharz. I. Theil. Braunschweig 1763. II. Kap. 2ter Abschnitt.

Belidor, angef. Architectura Hydraulica. I. Theil. 3tes und 4tes Buch.

D. J. Baader, angeführte Theorie der Saug- und Hebepumpen.

Neunzehntes Kapitel.

Von der Wassersäulenmaschine.

235. §.

Wenn ein beträchtliches Gefälle und hinreichendes Wasser vorhanden ist, so kann solches benutzt werden, um Wasser aus einer noch größern Tiefe
T. III. F. 22 heraus zu heben. Ist AB (Figur 22) eine Fallröhre durch welche mittelst der Kommunikations- oder Gurgelröhre BD, Wasser in den Stiefel DE gelassen werden kann, so wird dadurch der Druckkolben F und mit ihm die Kolbenstange G gehoben. Sind nun mit der Kolbenstange G, die Kolben und Schachtstangen H, tiefer liegender Pumpen verbunden, so können solche ebenfalls mit in die Höhe gehoben werden. Hat der Kolben F seinen höchsten Stand erreicht, und man verschließt mittelst der Wendungspippe C durch Umdrehung des Kreuzhahns (Calix, *Robinet*) die Fallröhre, so kann das Wasser in derselben nicht ferner auf den Kolben drücken, und wenn zu gleicher Zeit das Wasser aus dem Stiefel durch die Wendungspippe aus dem Abflußrohr I wegfließt, so wird der Kolben nebst Stangen wieder sinken. Eine solche Anordnung, wo mittelst einer Fallröhre, ein Druckkolben die Bewegung anderer Pumpenstangen bewirkt, nennt man eine Wassersäulenmaschine.

Hier kann nur so viel von derselben erklärt werden, als zur hydraulischen Beurtheilung erfordert wird; das übrige, besonders die Steurung

)er die Art wie durch die Maschine selbst, der
:reuzhahn geöfnet und verschlossen wird, gehört
i die Maschinenlehre, wo von dieser Erfindung
's Herrn J. C. Höll mehr gesagt werden kann.

Damit durch das Aufsteigen der Kolbenstange
G die ansehnliche Last der übrigen Schacht- und
.olbenstangen in die Höhe gehoben werden könne,
mmt man dem Drucke des Wassers gegen den
.olben F dadurch zu Hülfe, daß die Kolben-
ınge FG mittelst einer Kette GK an den Wa-
ebaum oder Balancier KM befestiget ist, wel-
er durch ein Gegengewicht, das aus einem Stein-
ıſten N bestehen kann, beinahe mit der Last ins
Bleichgewicht gebracht werden kann. Der Kolben
hat alsdann beim Steigen das Übergewicht der
ast zu heben, da er dann eben durch dieses Über-
ewicht wieder herunter gedrückt wird.

Außer der Wendungspippe ist bei Q in dem
fallrohre noch ein Hahn, zur Anlassung oder
Sperrung der Maschine.

Die Wendungspippe C bestehet aus dem Pip-
engehäuse, welches kegelförmig abgedreht ist und
rei Öfnungen hat, wovon die eine B (Fig. 23) T. III.
ach der Fallröhre, D nach dem Stiefel und I F. 23.
ach dem Abflußrohre geht. Im Pippengehäuse
st der durchbohrte Kegel, Kreuz- oder Wen-
ungshahn gleichfalls mit drei eben so großen
Öfnungen, die auf die vorigen genau passen, eben
) groß sind und untereinander zusammenhängen.
Wird nun der Wendungshahn so gedreht, daß
ie beiden Öfnungen b, d desselben, gegen B, D
ommen (Fig. 23) und daß i der Öfnung I grade
ntgegen stehet, so wird dadurch die Kommunika-
ion zwischen der Fallröhre und dem Stiefel be-
virkt; wenn aber die Öfnung d gegen I (Fig. 24) F. 24.
und i gegen D gebracht wird, so ist die Verbin-
ung zwischen Fa[illegible] tiefel unterbrochen;
agegen kann das [illegible] Stiefel durch

T. III. F. 22. das Abflußrohr I fortfließen und mit dem aus der Tiefe oder dem Sumpfe gehobenen Wasser bei P abgeführt werden.

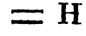
Um zu verhindern, daß nicht mehr Wasser durch das Abflußrohr wegfließt, als der Druckkolben zum Heruntergehen Raum erfordert, und damit zwischen der Wendungspippe und dem Kolben in seinem tiefsten Stande, die Röhre nicht wasserleer werde, so darf man nur die Ausflußöfnung des Abflußrohrs nach dem Vorschlage des Herrn Langsdorf so anlegen, daß solche mit dem niedrigsten Stande des Kolbens gleich hoch liege. In der Zeichnung Figur 22 konnte dies nicht angezeigt werden, weil dadurch die Deutlichkeit verloren ging.

236. §.

Die Kraft zu bestimmen welche der Druckkolben F (Fig. 22) zur Bewegung der übrigen Kolbenstangen ausüben kann, sei

- H die Höhe des Wassers in der Fallröhre über dem niedrigsten Stande des Kolbens,
- A der Querschnitt und D der Durchmesser des Stiefels,
- b die Höhe des Kolbenhubs,
- A′ der Querschnitt, D′ der Durchmesser und L′ die Länge des Gurgelrohrs,
- A″ der Querschnitt, D″ der Durchmesser und L″ die Länge der Fallröhre;

wird nun vorausgesetzt, daß die Öfnungen in den Hähnen, den Durchfluß des Wassers nicht verengen, so ist die hydrostatische Druckhöhe, welche von unten gegen den Kolben preßt



$= H$

nd wenn

w die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens ist,
ie hydraulische Widerstandshöhe (154 §.)
enn man den Widerstand wegen der Krümmun-
en bei Seite setzt,

$$H' = \frac{w^2}{2006}\left[\frac{b}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \frac{L'}{D'} + \left(\frac{A}{A''}\right)^2 \frac{L''}{D''}\right]$$

ie Höhe des Reibungswiderstandes am Kol-
en (212. §.)

$$f = (0{,}1 \pm) \cdot \frac{H}{D}$$

nd weil die Wassermasse bei jedem Steigen des
Kolbens, aus der Ruhe in Bewegung gesetzt wer-
en muß, die Höhe des mechanischen Wi-
erstandes (214. §.)

$$T = \frac{b}{g\tau^2}\left[b + \frac{A}{A'} L' + \frac{A}{A''} L''\right]$$

o τ die Zeit eines Kolbenhubs bezeichnet.

Hienach ist die gesammte Kraft welche
er Kolben beim Steigen ausüben kann,
der

$$P = \gamma A\,[H - H' - f - T]$$

onach leicht in vorkommenden Fällen die Kraft
es Kolbens bestimmt werden kann.

Ist τ' die Zeit in welcher der Kolben nieder-
nkt, so ist die Zeit eines Kolbenspiels

$$t = \tau + \tau'$$

nd in dieser Zeit muß das Fallrohr die Wasser-
enge

$$= Ab$$

efern, es ist daher die zur Betreibung der Ma-
hine in jeder Minute erforderliche Wasser-
enge

$$M = \frac{60\,Ab}{t}$$

Die Bestimmung der übrigen Größen welche zur vollständigen Anordnung erfordert werden, kann nach Anleitung des sechszehnten Kapitels geschehen.

237. §.

Außer der beschriebenen Anordnung einer Wassersäulenmaschine, kann dieselbe noch auf mancherlei Art abgeändert werden. Um den Gewichtskasten am Wagebaume gänzlich zu entbehren, findet man Vorschläge in Herrn Langsdorf's Hydraulik 392. §. u. f. Sowohl Beschreibungen als Untersuchungen über die Wassersäulenmaschine, sind in nachstehenden Schriften:

N. Poda, Kurzgefaßte Beschreibung der bei dem Bergbau zu Schemnitz in Nieder-Hungarn errichteten Maschinen. Herausgegeben von J. E. von Born. Prag 1771. S. 54 u. f.

C. T. Delius, Anleitung zu der Bergbaukunst, nach ihrer Theorie und Ausübung. Wien 1773. 2ter Abschnitt, 9tes Kap.

Langsdorf, angef. Hydraulik. (1794.) 20. Kap.

Desselben Maschinenlehre (1797.) 1. B. 2. T. 14. K.

Eine Beschreibung der von G. Winterschmidt erfundenen Wassersäulenmaschine, findet man in

H. Calvör, angef. Beschreibung des Maschinenwesens. 1. Th. S. 159 u. f.

so wie die von Belidor erfundene, in dessen angef. Archit. Hydraulica, 1. Th. 4. B. 1. K.

Zwanzigstes Kapitel.

Von der Spiralpumpe.

238. §.

Bindet man eine Röhre um eine Welle, legt e Axe der Welle horizontal und giebt der Röhre bst die Einrichtung, daß das eine Ende bei er Umdrehung der Welle, Wasser und Luft öpfen kann, indem das andere Ende mit einer steigröhre verbunden ist, so nennt man diese Ein- htung eine **Spiralpumpe** (Antlia spiralis, *ompe spirale*), welche gegen das Jahr 1746 n Andreas **Wirz**, einem Zinngießer in Zürich funden und ausgeführt worden. In Florenz wur- n im Jahre 1779 Versuche damit nach den Ver- sserungen von Daniel **Bernoulli** angestellt, bei elchen in jeder Minute etwa 2½ Kubikfuß Was- r, an 100 Fuß hoch gestiegen sind. Außer dieser den Versuchen in Florenz erbauten Spiral- umpe, ist im Jahre 1784 in Archangelsky bei Moskau, durch Hrn. **Norberg**, eine solche Ma- hine mit dem besten Erfolge ausgeführt worden, elche in jeder Minute 7 Kubikfuß Wasser, 72 uß hoch, durch eine 740 Fuß lange Röhrenlei- ung gehoben hat *).

Die 25ste Figur zeigt die Abbildung einer Spi- T.III
alpumpe, nach ihren wesentlichen Theilen. Um F.25

*) Man s. J. F. Lempe Magazin der Bergbaukunde. I. Theil. Dresden 1795. S. 38. u. f.

T. III. F. 45. die horizontalliegende Axe CD welche bei C umgedreht werden kann, ist die Röhre ABA'B'A''.... gewunden und daran befestiget. Der Anfang der Röhre oder das Horn (Cornu, *Corne*) AE erweitert sich bei E, um das darunter befindliche Wasser in hinlänglicher Menge bei jeder Umdrehung zu schöpfen; das Ende FG tritt in eine mit der Axe verbundene horizontale Röhre DH, die mit der Steigröhre (Tuba, *Tuyau montant*) IK zusammenhängt. Bei der Umdrehung wird die Röhre DH mit bewegt, dagegen bleibt die Steigröhre HIK in unveränderter Lage, welches durch das Gewinde (Commissura) bei H bewerkstelliget wird.

So vielmal die Röhre um die Axe gewunden ist, so viel Gänge oder Windungen (Convolutiones, *Tours*) hat die Spiralpumpe. ABA' ist die erste, A'B'A'' die zweite Windung u. s. w. Sämmtliche Windungen machen die Schlange (Serpens, *Serpent*) aus, welche nebst der Steigröhre luft- und wasserdicht seyn muß.

Hat das Horn bei fortwährender Umdrehung immer einen Wasser- und Luftsatz geschöpft, so werden anfänglich die Oberflächen der Wassersäulen auf beiden Seiten der Windungen, wegen des hydrostatischen Gleichgewichts, gleich hoch stehen; gelangt aber endlich das Wasser in der letzten Windung bis an die Steigröhre, so wird durch die fortgesetzte Umdrehung der Schlange, das Wasser welches nicht anders ausweichen kann, zum Steigen gebracht werden, und weil dieses nun auf die Luft und das Wasser welches sich in den Windungen befindet zurückdrückt, so können die Wassersäulen in beiden Schenkeln der Windungen, nicht mehr gleich hoch seyn, wenn ein Gleichgewicht erfolgen soll. Durch das in den Windungen nachfolgende Wasser und die zusammengepreßte Luft, wird nun bei einer gehörigen Vorrichtung, fortwährend im-

mer

mehr Wasser gehoben und man sieht hieraus, bei dieser Maschine keine dergleichen Hinder- der Bewegung, wie bei den gewöhnlichen mpen, die Kolben 2c. vorkommen, und weil dies kein Wasser welches einmal in den Win- gen enthalten ist verloren geht, bei den Pum- aber wegen der Unvollkommenheit der Ventile, nals ein voller Hub erfolgt, so geht hieraus vor, daß die Spiralpumpe wesentliche Vortheile den Pumpen gewährt. Der Erfinder Wirz te zwar bei seiner Maschine die Röhre schne- förmig, wie eine Uhrfeder in einerlei Vertikal- e gewunden, es ist aber besser die Windungen eneinander fortlaufen zu lassen.

239. §.

Um einzusehen, wie die Luft und das Wasser den Windungen, einer Wassersäule in der Steig- re das Gleichgewicht halten könne, sei Fig. 26 T. III. F. 26. Röhre von drei Windungen welche theils mit asser, theils mit Luft angefüllt sind. Setzt man das Gewicht von der Luft welche in die Steig- re tritt bei Seite, und es soll ein Gleichgewicht schen dem Drucke des Wassers in der Steigröhre und dem, welcher von dem Wasser in den Windun- verursacht wird entstehen, so müßten, wenn das asser in der Steigröhre die größte Höhe errei- soll, die wasserhaltende Bögen alle auf einer- Seite der Schlange so stehen, damit die von Steigröhre zusammengepreßte Luft in der Win- g $GA'''B''$ gegen den Untertheil der Wasser- e $A''B''$ wirkt. Dasselbe gilt von den Wasser- en $A'B'$ und AB, vorausgesetzt daß Luft genug chen den wasserhaltenden Bögen vorhanden ist. re H die hydrostatische Höhe des Wassers H der Steigröhre, wobei die Lufthöhen zwischen Wasser gänzlich bei Seite gesetzt werden und Wasser in der Steigröhre als zusammenhän-

gend angenommen wird; wäre ferner h die Höhe jedes wasserhaltenden Bogens, so ist die Höhe des Drucks gegen die Luft bei G = H, welcher sich gegen B″ fortpflanzt. Bei B″ drückt aber die Höhe des Wasserbogens A″B″ entgegen, also ist der Druck gegen die Luft bei A″ = H — h; eben so bei A′ = H — 2h und bei A gegen die Atmosphäre = H — 3h. Ist nun H — 3h = 0 oder H = 3h so ist alles im Gleichgewichte; vorausgesetzt, daß Luft genug in jeder Windung vorhanden ist.

Wenn die Höhe der Steigröhre kleiner wird, so kann das vorige Gleichgewicht nicht bestehen. Soll KI oder H = h werden, so muß im vorliegenden Falle, der dritte Wasserbogen eine entgegengesetzte oder negative Stellung für das Gleichgewicht annehmen, wobei wieder vorausgesetzt wird, daß Luft genug in den Windungen ist, um den Raum zwischen den Wasserbögen auszufüllen. Der T. III. F. 27. Druck bei G und A″ (Fig. 27) ist alsdenn = H; bei B″ und B′ = H + h; bei A′ und B = H + h — h = H und bei A = H — h = 0, also H = h wie erfordert wird. Diese negative Wasserbögen oder Wasserpaßwechsel müssen also jedesmal entstehen, so bald die Höhe der Wassersäule in der Steigröhre, nicht der ganzen Wirkung der Maschine entspricht; dahingegen, wenn sich die Maschine in ihrer vollen Wirksamkeit befindet, so sind alle Wasserbögen auf der positiven Seite der Windungen.

Aus der vorhergehenden Betrachtung folgt, daß die Luft in den Windungen immer stärker zusammengepreßt wird, je näher sie an die Steigröhre kommt. In der ersten Windung wird sie lediglich von der Höhe des ersten Wasserbogens, dahingegen in der letzten Windung, von der ganzen Wassersäule in der Steigröhre zusammengedrückt. Es muß daher bei unveränderter Luftmenge, der Raum derselben in jeder folgenden Windung immer kleiner werden.

Dieser Umstand verursacht entweder eine Verminderung der Druckhöhen oder ein Zurückströmen des Wassers in den Windungen, nachdem man die Schlange auf eine oder die andere Art einrichtet. Es lassen sich mancherlei Anordnungen für die Schlangen geben; man kann eine cylindrische Röhre um einen Cylinder oder Kegel, oder eine konische Röhre um einen Kegel oder Cylinder winden; auch lassen sich sonst noch Einrichtungen finden, über welche es hier der Raum nicht verstattet Untersuchungen anzustellen. Es wird hinlänglich seyn solche Schlangen näher zu betrachten, welche in der Ausübung leicht verfertiget werden können und die in den meisten Fällen, dem vorgesetzten Endzwecke gemäß sind.

240. §.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich zuerst auf Schlangen, welche aus einer cylindrischen über einen Kegel gewickelten Röhre bestehen.

Die Spiralpumpe (Figur 28) habe die eben beschriebene Eigenschaft, und das Wasser in der Steigröhre befinde sich auf der größtmöglichen Höhe, so müssen sich die Druckhöhen der Wasserbögen in den lezten Windungen vermindern, weil die gleichen Luftmengen immer kleinere Räume einnehmen, und daher die Grundflächen der Wasserbögen in den kleinern Windungen immer höher kommen. Bei fortgesetzter Umdrehung kommt es nun darauf an, daß von dem Horn AE gleich viel Wasser und Luft in die erste Windung geschöpft wird. Es läßt sich aber einsehen, daß die Gestalt des Horns ziemlich gleichgültig ist, wenn nur nicht weniger Wasser und Luft geschöpft wird, als jede Windung erfordert. Denn gesezt, das Horn habe bei seinem Eintritte ins Wasser mehr Luft eingenommen, so wird wegen des Gleichge-

T. III. F. 28.

wichts unter den Wassersäulen, die Oberfläche des Wasserbogens AB dennoch bei A stehen bleiben und daher wenn das Horn weiter herunter kömmt, also der Raum in welchem die Luft eingeschlossen ist, kleiner wird, so wird diejenige Luft welche weniger als eine halbe Windung ausfüllt, wieder aus dem Wasser durch die Öfnung des Horns zurücktreten. Auf gleiche Art wird durch die eingeschlossene Luft und wegen des Gleichgewichts unter den Wasserbögen verhindert, daß nicht mehr Wasser aus dem Horn in die Schlange eintreten kann, als zur Ausfüllung der ersten halben Windung erforderlich ist, weil das anfänglich wegen der größern Weite des Horns zu viel geschöpfte Wasser aus der engern Windung bei A überläuft, und durch das Horn ins Gefäß zurücktritt.

Es kommt also vorzüglich darauf an, daß Wasser und Luft in hinlänglicher Menge geschöpft werde; in keinem Falle schadet eine zu große Menge, dahingegen zu wenig Luft, die Druckhöhe, und zu wenig Wasser, die Wassermenge vermindern. Um daher sicher zu seyn, kann man die Axe der Schlange über die Oberfläche des zu schöpfenden Wassers legen, dem Horn selbst aber eine Länge von etwa dreiviertel einer Windung geben und solches gehörig erweitern.

241. §.

In der nebenstehenden Figur sei die erste Windung der Schlange, am Ende des Horns abgebildet, so ist FF'G der Wasser- und FG'G der Luftbogen, welche beide gleichen körperlichen Inhalt haben. Man setzt, daß

$R = CD$ den Halbmesser der ersten Windung, und R

$r = AH = HD$ den Halbmesser der Röhre bezeichne, r

so ist der körperliche Inhalt der ersten Windung

$$2\pi (R + r) \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 (R + r) r^2$$

wo $\pi = 3{,}14159 \ldots$ ist.

Daher der Raum A welchen die Luft oder das Wasser in der ersten Windung einnimmt

$$A = 2\pi^2 (R + r) r^2$$

die Länge l des Wasserbogens FFG in der ersten Windung l

$$l = \pi (R + r)$$

und die vertikale Höhe des Wasserbogens oder DE, in der ersten Windung

$$= 2R \text{ *)}.$$

---

*) Bei dieser Bestimmung ist angenommen, daß der Punkt F mit D gleich hoch liege, welches bei einer schnellen Umdrehung der Schlange nicht der Fall ist. Denn ein Theil des Wassers ruhet auf den gebogenen Windungen, daher bekommt derselbe ein Bestreben aufwärts zu steigen, welches durch die Adhäsion noch vermehrt wird, weshalb das Uebertreten eines Theils des Wassers wirklich erfolgt, wenn bei einer schnellen Umdrehung, das Vermögen der Wassertheile aufwärts zu steigen größer wird, als die Kraft mit welcher sie zu sinken streben. In den meisten Fällen der Ausübung ist aber die Umdrehung der Schlange so beschaffen, daß nicht leicht ein Uebertreten zu befürchten ist, und selbst wenn dieses Statt findet, so wird dadurch die Wasserhöhe nur um einen so geringen Theil vermindert, daß man ohne Nachtheil den Punkt F mit D als in einerlei Horizont li[illegible]ten kann.



Wenn nun ferner die nebenstehende Figur die letzte Windung vorstellt, in welcher eben so viel Wasser und Luft als in der ersten vorhanden seyn soll, so bezeichne

α den Raum FHP welchen die zusammengepreßte Luft in der letzten Windung einnimmt,

λ die Länge dieses Luftbogens,

H die Höhe des Wassers in der Steigröhre,

k die der Atmosphäre zugehörige Druckhöhe.

Nun ist die Höhe des Drucks auf die Luft in der ersten Windung $= k + 2R$; in der letzten Windung $= k + H$, deshalb müssen sich bei gleicher Luftmenge, die Räume A, α umgekehrt wie die Druckhöhen verhalten (198. §.) also

$$k + H : k + 2R = A : \alpha \text{ daher}$$

der Raum welchen die Luft in der letzten Windung einnimmt:

$$\alpha = \frac{k + 2R}{k + H} A = \frac{k + 2R}{k + H} \pi^2 (R + r) r^2$$

Ferner ist der Querschnitt der Röhre in allen Windungen gleich groß, daher $\frac{\alpha}{\pi r^2} = \lambda$ oder die Länge des Luftbogens in der letzten Windung

$$\lambda = \pi \frac{k + 2R}{k + H} (R + r)$$

ϱ Der Halbmesser $CD = \varrho$ für die letzte Windung läßt sich nunmehr leicht bestimmen. Denn die centrische Linie FHPIF $= 2\pi (\varrho + r)$ muß

der Länge des Wasser- und Luftbogens zusammen genommen gleich seyn, daher

$$2\pi(\varrho + r) = l + \lambda \text{ oder}$$

$$2\pi(\varrho + r) = \pi(R + r) + \pi\frac{k + 2R}{k + H}(R + r).$$

Hieraus findet man den Halbmesser der letzten Windung

$$\varrho = \frac{R + r}{2}\left(1 + \frac{k + 2R}{k + H}\right) - r$$

Beispiel. Wenn eine Spiralpumpe bei welcher der Halbmesser der ersten Windung 4 Fuß, und die Weite der Röhre $\frac{1}{2}$ Fuß beträgt, das Wasser 40 Fuß hoch heben soll; wie groß muß der Halbmesser der letzten Windung seyn?

Hier ist $R = 4$, $r = \frac{1}{4}$, $H = 40$ und $k = 32$ Fuß, daher der Halbmesser

$$\varrho = \frac{4 + \frac{1}{4}}{2}\left(1 + \frac{32 + 8}{32 + 40}\right) - \frac{1}{4} = 3{,}05 \text{ Fuß}.$$

242. §.

Setzt man die Druckhöhe der Wassersäule in der letzten Windung oder $DQ = h$, so läßt sich diese nicht eher bestimmen, bis nicht die Höhe CQ welche zu dem Bogen LP gehört, bekannt ist. Man setze h

$$\text{Bogen } LP = \beta$$
$$CQ = x$$

so ist

$$\text{Sehne } HF = \sqrt{(DF^2 + HD^2)}$$

Aber $DF^2 = r(2\varrho + r)$ und $HD^2 = r^2$ daher

$$\text{Sehne } HF = \sqrt{(2r\varrho + 2r^2)}$$

und man kann in den meisten Fällen die Sehne HF statt des Bogens in Rechnung bringen. Mit mehrerer Genauigkeit erhält man diesen Bogen,

wenn der ihm zugehörige Bogen für den Halbmesser $1 = 2\omega$ gesetzt wird; alsdann ist

$$\text{Bogen HF} = 2\omega\,(\varrho + r)$$

$$\text{Sin}\,\omega = \frac{\frac{1}{2}\,\text{Sehne HF}}{\varrho + r} = \frac{\sqrt{(2r\varrho + 2r^2)}}{2(\varrho + r)}$$

Es ist aber

$$\text{Bogen}\,\omega = \text{Sin}\,\omega + \tfrac{1}{6}\,\text{Sin}\,\omega^3 + \tfrac{3}{40}\,\text{Sin}\,\omega^5 + \ldots\;{}^{*)}$$

und weil das dritte Glied dieser Reihe schon sehr klein wird, also hier weggelassen werden kann

$$\omega = \frac{\sqrt{(2r\varrho + 2r^2)}}{2(\varrho + r)} + \frac{\sqrt{(2r\varrho + 2r^2)^3}}{6.8\,(\varrho + r)^3} \text{ oder}$$

$$2\omega\,(\varrho + r) = \sqrt{(2r\varrho + 2r^2)} + \tfrac{1}{12}\,r\sqrt{\left[\frac{2r}{\varrho + r}\right]}$$

$$= (\varrho + r)\sqrt{\left[\frac{2r}{\varrho + r}\right]} + \tfrac{1}{12}\,r\sqrt{\left[\frac{2r}{\varrho + r}\right]} \text{ daher}$$

$$\text{Bogen HF} = (\varrho + \tfrac{13}{12}r)\sqrt{\left[\frac{2r}{\varrho + r}\right]}$$

Nun ist

$$\text{Bog. LP} = \text{Bog. HFIL} - \text{Bog. HF} - \text{Bog. FIP oder}$$

$$\beta = \tfrac{3}{2}\pi\,(\varrho + r) - (\varrho + \tfrac{13}{12}r)\sqrt{\left[\frac{2r}{\varrho + r}\right]} - \pi\,(R + r)$$

$$\text{oder } \beta = \tfrac{1}{2}\pi\,(3\varrho + r - 2R) - (\varrho + \tfrac{13}{12}r)\sqrt{\left[\frac{2r}{\varrho + r}\right]}$$

woraus der Bogen LP leicht bestimmt werden kann. Aus dem Bogen LP läßt sich leicht der Winkel LCP berechnen, und hieraus könnte man den Si-

---

*) L. Euler, Vollständige Anleitung zur Differentialrechnung. Aus dem Lateinischen übers. und mit Anmerk. und Zusätzen begleitet von J. A. C. Michelsen. 2ter Th. Berlin und Libau 1790. 83. §. wenn daselbst $x = 0$ gesetzt wird.

nus CQ = x für den Bogen LP finden, da als-denn die gesuchte Druckhöhe DQ oder

$$h = \varrho + x \text{ ist.}$$

Wird β negativ, also x negativ, so wird

$$h = \varrho - x.$$

Um aber ohne diese Berechnung einen bestimmten Ausdruck für x durch β zu erhalten, so setze man, daß für den Halbmesser = 1, der zu β gehörige Bogen = φ sei, so ist

$$\beta = \varphi(\varrho + r) \text{ also } \varphi = \frac{\beta}{\varrho + r} \text{ und}$$

$$\text{Sin}\,\varphi = \frac{CQ}{CP} = \frac{x}{\varrho + r}.$$

Nun kann man den Sinus eines Bogens durch folgende Reihe ausdrücken, die schnell genug zusammenläuft, wenn $\varphi < 1$ ist *)

$$\text{Sin}\,\varphi = \varphi - \tfrac{1}{6}\varphi^3 + \tfrac{1}{120}\varphi^5 - \tfrac{1}{5040}\varphi^7 + \ldots$$

es ist daher

$$\frac{x}{\varrho + r} = \varphi - \tfrac{1}{6}\varphi^3 + \tfrac{1}{120}\varphi^5 \text{ oder}$$

$$\varphi = \frac{\beta}{\varrho + r} \text{ gesetzt}$$

$$x = \beta - \tfrac{1}{6}\frac{\beta^3}{(\varrho + r)^2} + \tfrac{1}{120}\frac{\beta^5}{(\varrho + r)^4} \text{ oder}$$

$$x = \beta\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\beta}{\varrho + r}\right)^2 + \tfrac{1}{120}\left(\frac{\beta}{\varrho + r}\right)^4\right]$$

wo man in den meisten Fällen das dritte Glied weglassen kann.

*) L. Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerk. und Zusätzen begleitet von J. A. C. Michelsen. 1. Buch. Berlin 1788. 134. §.

Hieraus findet man die Druckhöhe DQ von dem Wasserbogen in der letzten Windung oder

$$h = \varrho + \beta\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\beta}{\varrho+r}\right)^2 + \frac{1}{120}\left(\frac{\beta}{\varrho+r}\right)^4\right]$$

Beispiel. Bei einer Spiralpumpe sei der Halbmesser der ersten Windung 4 und der letzten 3 Fuß. Die Weite der Röhre $\frac{1}{2}$ Fuß; man soll die Druckhöhe in der letzten Windung finden.

$R = 4$, $\varrho = 3$ und $r = \frac{1}{4}$ Fuß, daher der Bogen

$$\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{22}{7}\left(9+\frac{1}{4}-8\right) - \left(3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)\sqrt{\left[\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{3+\frac{1}{4}}\right]}$$
$$= 0{,}681$$

und hieraus die Druckhöhe

$$h = 3 + 0{,}681\left[1 - \frac{0{,}681^2}{6(3+\frac{1}{4})^2} + \frac{0{,}681^4}{120(3+\frac{1}{4})^4}\right]$$
$$= 3 + 0{,}681\left[1 - 0{,}0749 + 0{,}000017\right]$$
$$= 3{,}63 \text{ Fuß}.$$

243. §.

Betrachtet man die Spiralpumpe im Zustande der Bewegung, wenn die Geschwindigkeit von der centrischen Linie der ersten Windung $= v$ gesetzt wird, also v die mittlere Geschwindigkeit der Röhre ist, so ist offenbar, daß wenn der Wasserbogen von der Länge l mit der Geschwindigkeit v in der Röhre bewegt werden sollte, hiezu (152. §.) eine Widerstandshöhe

$$h' = \frac{lv^2}{2006\,.\,2r} = \frac{\pi v^2(R+r)}{4012\,.\,r}$$

für die erste Windung erfordert wird, wenn man den Widerstand wegen der Krümmung bei Seite setzt.

Bewegt sich hingegen die Röhre und das Wasser steht still, so müssen die Wände der Röhre

on dem Wasser mit einer Gewalt losgerissen wer-
n, welche der Druckhöhe h′ entspricht, oder das
Wasser wird so fortgerissen, als wenn eine Was-
rsäule von der Höhe h′ dasselbe von unten nach
ben preßte. Hierdurch wird also bei der bewegten
Maschine der Druck der einzelnen Wassersäulen
m die Höhe h′ vermindert, und nur der Über-
uß kann als Kraft in Rechnung gebracht wer-
n.

Das Wasser in der Steigröhre wird
aher bei einer kleinen Geschwindigkeit
er Maschine, höher als bei einer großen
eigen.

Für die letzte Windung ist $\varrho + r$ der Halb-
messer der centrischen Linie, daher die Geschwindig-
it derselben $= v \frac{\varrho + r}{R + r}$ und man findet die Wi-
erstandshöhe in der letzten Windung

$$h'' = \frac{l v^2 (\varrho + r)^2}{2006 . 2r (R + r)^2} \text{ oder}$$

$$= \frac{\pi v^2 (\varrho + r)^3}{4012 . r (R + r)^2}$$

olglich die Summe der Widerstandshöhen in
er ersten und letzten Windung

$$h' + h'' = \frac{\pi v^2}{4012 . r} \cdot \frac{(R + r)^3 + (\varrho + r)^3}{(R + r)^2}$$

Ist die Steigröhre mit den Windungen
on gleicher Weite und man nimmt die mittlere
Geschwindigkeit des Wassers in der Steigröhre
$= v$ und die Höhe des Wassers in derselben $= H$
n, so wird zur Fortbewegung des Wassers in
er senkrechten Steigröhre (152. §.) eine Wider-
tandshöhe

$$h''' = \frac{H v^2}{2006 . 2r} \text{ erfordert.}$$

244. §.

Die Anzahl sämmtlicher Windungen sei n, so ist die Druckhöhe des Wasserbogens in der ersten Windung $= 2R - h'$ und in der letzten Windung $= h - h''$. Weil aber die gleichweite Schlange, nach den entwickelten Grundsätzen, um einen Kegel gewunden vorausgesetzt wird, so läßt sich annehmen, daß die Druckhöhen in jeder Windung von 2R bis h gleichförmig abnehmen; alsdann ist die Summe aller Druckhöhen

$$= n \cdot \frac{2R - h' + h - h''}{2}$$

Diese Wassersäulen in den Windungen müssen nicht nur dem Wasser in der Steigröhre von der Höhe H sondern auch der Widerstandshöhe h''' das Gleichgewicht halten, es ist daher (239. §.)

$$H + h''' = \tfrac{1}{2} n \,(2R + h - h' - h'')$$

und man findet die hydrostatische Wasserhöhe in der Steigröhre oder

$$H = \tfrac{1}{2} n \,(2R + h - h' - h'') - h'''$$

woraus man die Anzahl der Windungen oder

$$n = \frac{2\,(H + h''')}{2R + h - (h' + h'')}$$

findet.

Es ist zu bemerken, daß H nur die Höhe des Wassers in der Steigröhre bezeichnet; weil aber die Maschine Wasser und Luft zugleich hebt, so ist die eigentliche Höhe auf welche das Wasser bei einer schnellen Bewegung der Maschine steigt zwar höher, aber die Höhe des Wasserdrucks bleibt $= H$, weil das Gewicht der Luftsäulen nicht in Rechnung kommt.

245. §.

Die Höhe bis zu welcher das Wasser in der Steigröhr[illegible]en werden kann, wäre $= H$, wenn

außer dem Wasser keine Luft durch die Steigröhre aufgefördert würde. Weil aber immer ein Wasercylinder von der Länge $l = \pi (R + r)$ (241. §.) und eine Luftmenge von eben dem Inhalte für den natürlichen Zustand derselben eintritt, so ist offenbar, wenn die Steigröhre mit den Schlangenröhren gleich weit ist, daß alsdann die Höhe des einzelnen Wassersatzes $= \pi (R + r) = l$ ist, die Höhe jedes Luftsatzes wird aber desto geringer seyn, je mehr Wassersätze sich über dem Luftsatze befinden, weil die zwischen zwei Wassersätzen eingeschlossene Luft stärker zusammengepreßt wird. Ist nun die Bewegung der Schlange nicht zu langsam, so daß die Luftsätze zwischen ihren Wassersätzen nicht ohne diese in die Höhe steigen, so entstehet die Frage, wie groß

H die Höhe sämmtlicher Luftsätze in der Steigröhre ist. H′

Die Anzahl sämmtlicher Wassersätze ist $= \frac{H}{l}$ und eben so viel Luftsätze sind in der Steigröhre. Man setze

$$\frac{H}{l} = \mu$$

wo für μ die nächste ganze Zahl genommen werden kann. Die Höhe eines Luftsatzes im natürlichen Zustande oder bei einem atmosphärischen Drucke von $32' = k$ ist l, woraus die Höhe des ersten Luftsatzes in der Steigröhre unter dem ersten oder obersten Wassersatze, leicht gefunden werden kann. Denn (198. §.)

$$k + l : k = l : \frac{kl}{k+l}$$

also ist $\frac{kl}{k+l}$ die Höhe des ersten Luftsatzes.

Für den zweiten Luftsatz erhält man, wenn das

oder wenn die Steigröhre sehr geneigt ist, weil alsdann weit mehr Luftsätze als bei einer vertikalen Steigröhre vorkommen, obgleich die vertikale hydrostatische Druckhöhe dieselbe bleibt.

Auch ist überhaupt noch zu bemerken, daß wenn die Schlange weiter als die Steigröhre ist, die Höhe H′ kleiner und im umgekehrten Falle größer wird.

Beispiel. Für $H = 40$ und $l = 4$ Fuß ist $\mu = \frac{40}{4} = 10$ also die Höhe sämmtlicher Luftsätze

$$H' = 32 . 4 . (\tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{40} + \tfrac{1}{44} + \tfrac{1}{48} + \tfrac{1}{52} + \tfrac{1}{56} + \tfrac{1}{60} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{68} +$$

$= 24{,}86$ Fuß.

Für $H = 16$ und $l = 1$ Fuß findet man

$$H' = 32 . 1 (\tfrac{1}{33} + \tfrac{1}{34} + \tfrac{1}{35} + \ldots\ldots \tfrac{1}{47} + \tfrac{1}{48})$$

$= 12{,}81$ Fuß

und wenn man nach dem zweiten Ausdrucke mit Logarithmen rechnet

$$H' = 73{,}68 \operatorname{Log} (1 + \tfrac{16}{32}) = 12{,}96 \text{ Fuß.}$$

Zusatz. Wenn die Förderungshöhe $= S$ gegeben ist, und man soll daraus die Höhen H und H' bestimmen, so erfordert dies eine weitläuftige Näherungsrechnung, man mag den einen oder andern für H' gefundenen Ausdruck zum Grunde der Rechnung annehmen. Dieß zu erleichtern können die nachstehende Tafeln dienen, wo

- l die Länge des Wasserbogens in der ersten Windung,
- H die hydrostatische Höhe in der vertikalen Steigröhre,
- H' die Höhe sämmtlicher Luftsätze, und
- S die Förderungshöhe $= H + H'$ bezeichnet, und wo alle Zahlen sich auf rheinländisches Fußmaaß beziehen, wenn $k = 32$ Fuß gesetzt wird.

= 1 Fuß	
H'	S
0,97	1,97
1,91	3,91
2,82	5,82
3,71	7,71
4,58	9,58
5,42	11,42
6,24	13,24
7,04	15,04
8,02	17,02
8,58	18,58
9,33	20,33
10,05	22,05
10,76	23,76
11,56	25,56
12,14	27,14
12,81	28,81
13,46	30,46
14,10	32,10
14,73	33,73
15,33	35,33
15,95	36,95
16,54	38,54
17,12	40,12
17,69	41,69
18,25	43,25

l = 2 Fuß		
H	H'	S
2	1,88	3,88
4	3,65	7,65
6	5,34	11,34
8	6,94	14,94
10	8,46	18,46
12	9,92	21,92
14	11,31	25,31
16	12,64	28,64
18	13,92	31,92
20	15,15	35,15
22	16,33	38,33
24	17,48	41,48
26	18,58	44,58
28	19,65	47,65
30	20,68	50,68
32	21,68	53,68
34	22,64	56,64
36	23,58	59,58
38	24,50	62,50
40	25,30	65,30
42	26,25	68,25
44	27,10	71,10
46	27,92	73,92
48	28,71	76,71
50	29,50	79,50

l = 3 Fuß		
H	H'	S
3	2,75	5,75
6	5,27	11,27
9	7,61	16,61
12	9,79	21,79
15	11,84	26,84
18	13,66	31,66
21	15,57	36,57
24	17,28	41,28
27	18,90	45,90
30	20,45	50,45
33	21,94	54,94
36	23,38	59,38
39	24,75	63,75
42	26,07	68,07
45	27,33	72,33
48	28,54	76,54
51	29,71	80,71
54	30,84	84,84
57	31,93	88,93
60	32,98	92,98

l = 4 Fuß		
H	H'	S
4	3,56	7,
8	6,76	14,
12	9,66	21,
16	12,33	28,
20	14,78	34,
24	17,06	41,
28	19,20	47,
32	21,20	53,
36	23,08	59,
40	24,86	64,
44	26,53	70,
48	28,13	76,
52	29,66	81,
56	31,12	87,
60	32,50	92,
64	33,83	97,
68	35,10	103,
72	36,34	108,
76	37,52	113,
80	38,66	118,

l = 5 Fuß

H'	S
4,32	9,32
8,13	18,13
11,54	26,54
14,61	34,61
17,41	42,41
19,98	49,98
22,37	57,37
24,59	64,59
26,67	71,07
28,62	78,62
30,46	85,46
32,19	92,19
33,84	98,84
35,41	105,41
36,81	111,81

l = 6 Fuß

H	H'	S
6	5,05	11,05
12	8,45	20,45
18	13,25	31,25
24	16,67	40,67
30	19,76	49,76
36	22,58	58,58
42	25,17	67,17
48	27,57	75,57
54	29,80	83,80
60	31,89	91,89
66	33,85	99,85
72	35,69	107,69
78	37,44	115,44
84	39,09	123,09
90	40,67	130,67

l = 7 Fuß

H'	S
5,73	12,73
10,59	24,59
14,83	35,83
18,57	46,57
21,91	56,91
24,93	66,93
27,69	76,69
30,27	86,27
32,58	95,58
34,79	104,79
36,85	113,85
38,77	122,77

l = 8 Fuß

H	H'	S
8	6,40	14,40
16	11,72	27,72
24	16,28	40,28
32	20,27	52,27
40	23,83	63,83
48	27,03	75,03
56	29,95	85,95
64	32,61	96,61
72	35,07	107,07
80	37,35	117,35
88	39,47	127,47
96	41,47	137,47

l = 3 Fuß		
H	H′	S
3	2,75	5,75
6	5.27	11,27
9	7.61	16,61
12	9.79	21,79
15	11,84	26,84
18	13,66	31,66
21	15,57	36.57
24	17,28	41,28
27	18,90	45,90
30	20,45	50,45
33	21,94	54,94
36	23.38	59,38
39	24,75	63,75
42	26,07	68,07
45	27,33	72,33
48	28,54	76,54
51	29.71	80,71
54	30,84	84,84
57	31.93	88.93
60	32,98	92,98

l = 4 Fuß		
H	H′	S
4	3,56	7,…
8	6,76	14,…
12	9,66	21,…
16	12,33	28,…
20	14,78	34,…
24	17,06	41,…
28	19,20	47,…
32	21,20	53,…
36	23,08	59,…
40	24,86	64,…
44	26,53	70,…
48	28,13	76,…
52	29,66	81,…
56	31,12	87,…
60	32,50	92,…
64	33,83	97,…
68	35,10	103,…
72	36,34	108,…
76	37.52	113,…
80	38,66	118,…

l = 5 Fuß

H	H′	S
5	4,32	9,32
[illegible]	8,13	18,13
5	11,54	26,54
[illegible]	14,61	34,61
[illegible]	17,41	42,41
[illegible]	19,98	4[illegible],98
[illegible]	22,37	57,37
[illegible]	24,59	64,59
[illegible]	26,67	71,67
[illegible]	28,62	78,62
[illegible]	30,46	85,46
[illegible]	32,19	92,19
[illegible]	33,84	98,84
0	35,41	105,41
5	36,81	111,81

l = 6 Fuß

H	H′	S
6	5,05	11,05
12	8,45	20,45
18	13,25	31,25
24	16,67	40,67
30	19,76	49,76
36	22,58	58,58
42	25,17	67,17
48	27,57	75,57
54	29,80	83,80
60	31,89	91,89
66	33,85	99,85
72	35,69	107,69
78	37,44	115,44
84	39,09	123,09
90	40,67	130,67

l = 7 Fuß

H	H′	S
7	5,73	12,73
14	10,59	24,59
[illegible]	14,83	35,83
8	18,57	46,57
5	21,91	56,91
[illegible]	24,93	66,93
9	27,69	76,69
6	30,27	86,27
3	32,58	95,58
0	34,79	104,79
7	36,85	113,85
4	38,77	122,77

l = 8 Fuß

H	H′	S
8	6,40	14,40
16	11,72	27,72
24	16,28	40,28
32	20,27	52,27
40	23,83	63,83
48	27,03	75,03
56	29,[illegible]5	85,95
64	32,61	96,61
72	35,07	107,07
80	37,35	117,35
88	39,47	127,47
96	41,47	137,47

l = 9 Fuß		
H	H'	S
9	7,03	16,03
18	12,79	30,79
27	17,65	44,65
36	21,89	57,89
45	25,61	70,63
54	28,97	82,97
63	31,10	94,10
72	34,76	106,76
81	37,30	118,30
90	39,66	129,66

l = 10 Fuß		
H	H'	S
10	7,62	17,62
20	13,76	33,76
30	18,91	48,91
40	23,36	63,36
50	27,26	77,26
60	30,75	90,75
70	33,89	103,89
80	36,74	116,74
90	39,33	129,33
100	41,76	141,76

l = 11 Fuß		
11	8,17	19,17
22	14,68	36,68
33	20,10	53,10
44	24,71	68,71
55	28,76	83,76
66	32,35	98,35
77	35,59	112,59
88	38,51	126,51
99	41,18	140,18
110	43,65	153,65

l = 12 Fuß		
12	8,72	20,72
24	15,55	39,55
36	21,68	57,68
48	25,10	73,10
60	30,18	90,18
72	33,87	105,87
84	37,17	121,17
96	40,17	136,17
108	42,89	150,89
120	45,43	165,43

$l = 13$ Fuß

H	H'	S
13	9,23	22,23
26	16,39	42,39
39	22,26	61,26
52	27,21	79,21
65	31,49	96,49
78	35,28	113,28
91	38,65	129,65
104	41,68	145,68
117	44,47	161,47
130	47,05	177,05

$l = 14$ Fuß

H	H'	S
14	9,71	23,71
28	17,20	45,20
42	23,25	65,25
56	28,36	84,36
70	32,75	102,75
84	36,60	120,60
98	40,05	138,05
112	43,14	155,14
126	45,96	171,96
140	48,56	188,56

$l = 15$ Fuß

H	H'	S
15	10,22	25,22
30	17,95	47,95
45	24,19	69,19
60	29,42	89,42
75	33,89	108,89
90	37,82	127,82
105	41,33	146,33
120	44,50	164,50
135	47,38	182,38
150	50,02	200,02

$l = 16$ Fuß

H	H'	S
16	10,65	26,65
32	18,64	50,64
48	25,04	73,04
64	30,36	94,36
80	34,84	114,84
96	38,91	134,91
112	42,44	154,44
128	45,62	173,62
144	48,54	192,54
160	51,20	211,20

Aus diesen Tafeln sieht man, daß nahe gelegene Förderungshöhen, beinahe gleiche Differenzen haben, wenn die Differenzen der zugehörigen hydrostatischen Druckhöhen einander gleich sind. Dies giebt ein Mittel mit Hülfe der Tafeln, aus der gegebenen Förderungshöhe und der Länge des Wasserbogens in der ersten Windung, die hydrostatische Druckhöhe in der Steigröhre zu finden, indem man annimmt, daß sich die Differenzen der nahe gelegenen Förderungshöhen, wie die Differenzen der zugehörigen hydrostatischen Druckhöhen verhalten.

Beispiel. Die Länge des Wasserbogens in der ersten Windung einer Spiralpumpe ist 6 Fuß. Man sucht die hydrostatische Druckhöhe, für eine Förderungshöhe von 60 Fuß.

Hier ist $l = 6$; sucht man daher in der vorstehenden Tafel für $S = 60$ die nächsten Förderungshöhen, so kann man schließen, wenn d die Differenz zwischen der gesuchten und der nächst kleinern hydrostatischen Druckhöhe ist, daß sich verhält

$$67{,}17 - 58{,}58 : 60 - 58{,}58 = 42 - 36 : d \text{ oder}$$
$$8{,}59 : 1{,}42 = 6 : d \text{ daher}$$
$$d = \frac{1{,}42 \cdot 6}{8{,}59} = 0{,}99.$$

Es ist daher die gesuchte hydrostatische Höhe

$$= 36 + 0{,}99 = 36{,}99 \text{ Fuß},$$

und die Lufthöhe

$$= 60 - 36{,}99 = 23{,}01 \text{ Fuß}.$$

Sollte die gegebene Länge l einen Bruch enthalten, so kann man die nächste ganze Zahl dafür annehmen und die Rechnung mit Hülfe der Tafel wie vorher ausführen.

246. §.

Die Wassermenge welche bei jeder Umdrehung der Schlange gehoben wird ist

$$\pi r^2 l = \pi^2 r^2 (R + r)$$

m macht daher die Schlange in jeder Minute m Umlaufe, so findet man für eine Minute die Wassermenge, welche die Maschine hebt oder

$$M = m \pi^2 r^2 (R + r).$$

Zu einem Umlaufe der Schlange werden $\frac{60}{m}$

v Sekunden Zeit erfordert, ist daher v die mittlere Geschwindigkeit der ersten Windung, so verhält sich

$$\frac{60}{m} : 1'' = 2\pi (R + r) : v \text{ daher ist}$$

$$m \pi (R + r) = 30 v$$

oder die Wassermenge

$$M = 30 \cdot v \cdot \pi \ldots$$

nd hieraus der Halbmesser der Röhre

$$r = \sqrt{\left[\frac{M}{30 . \pi v}\right]}$$

Ist P die Kraft welche am Halbmesser R+r
im Übergewichte der Wasserbögen das Gleichge-
icht hält, so müßte man die Momente sämmtlicher
Vasserbögen zusammen nehmen und durch (R+r)
dividiren um P zu finden. Nimmt man hingegen
n, daß die Momente gleichförmig abnehmen, so
t das Moment des Wasserbogens in der ersten
Windung

$$= (R + r) . 2R . \pi r^2 . \gamma$$

nd in der letzten Windung

$$= (\varrho + r) . h . \pi r^2 \gamma$$

e halbe Summe beider Momente oder das mitt-
re Moment

$$\tfrac{1}{2} \pi r^2 [2R (R + r) + h (\varrho + r)] \gamma;$$

ird dieses mit der Anzahl der Wasserbögen n
ultiplizirt, so giebt dies die Summe aller Mo-
mente, und diese Summe durch den Halbmesser
+r dividirt, giebt die gesuchte Kraft

$$P = \tfrac{1}{2} \pi r^2 n \left[2R + h \frac{\varrho + r}{R + r}\right] \gamma$$

der wenn man $\frac{M}{30 v}$ anstatt πr^2 setzt

$$P = \frac{nM}{60 v} \left[2R + h \frac{\varrho + r}{R + r}\right] \gamma.$$

Beispiel. Man soll die cylindrische um einen Kegel gewickelte Schlange einer Spiralpumpe so anordnen, daß in jeder Minute 30 Kubikfuß Wasser, auf eine Höhe von 63 Fuß gehoben werden.

Man setze die Geschwindigkeit der ersten Windung = 4 Fuß, so wird der Halbmesser der Röhre

$$\sqrt{\left[\frac{30}{30 . \frac{22}{7} . 4}\right]} = 0,282 \text{ Fuß.}$$
$$= 3,38 \text{ Zoll.}$$

Für die Länge des Wasserbogens in der ersten Windung ist (241. §.), wenn R willkührlich = 4 Fuß angenommen wird

$$l = \pi (R + r) = \tfrac{22}{7} \cdot 4{,}282 = 13{,}46 \text{ Fuß.}$$

Nun ist S = 63, wodurch sich mit Hülfe der Tafeln (245. §.) die hydrostatische Höhe finden läßt. Denn

$$79{,}21 - 61{,}26 : 63 - 61{,}26 = 52 - 39 : 1{,}26$$

daher ist die hydrostatische Höhe

$$H = 39 + 1{,}26 = 40{,}26 \text{ Fuß.}$$

Der Halbmesser der letzten Windung ist (241. §.)

$$\varrho = \frac{4{,}28}{2}\left(1 + \frac{32 + 8}{32 + 40{,}26}\right) - 0{,}28 = 3{,}04 \text{ Fuß.}$$

daher (242. §.) der Bogen

$$\beta = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{22}{7} \left[9{,}12 + 0{,}28 - 8\right] - \left(3{,}04 + \tfrac{13}{12} \cdot 0{,}28\right) \sqrt{\left[\frac{0{,}56}{3{,}32}\right]}$$
$$= -\, 0{,}173$$

Der negative Werth zeigt an, daß β oberhalb des horizontalen Halbmessers CL (Fig. S. 374) liegt.

Hieraus findet man die Druckhöhe in der letzten Windung

$$h = 3{,}04 - 0{,}173 \left[1 - \frac{0{,}173^2}{6 \cdot 3{,}32^2}\right] = 2{,}872 \text{ Fuß}$$

Für die Widerstandshöhen in der ersten und letzten Windung ist

$$h' + h'' = \frac{22 \cdot 16}{7 \cdot 4012 \cdot 0{,}28} \cdot \frac{4{,}28^3 + 3{,}32^3}{4{,}28^2} = 0{,}281 \text{ F.}$$

Ferner

$$h''' = \frac{40{,}26 \cdot 16}{4012 \cdot 0{,}28} = 0{,}573 \text{ Fuß}$$

daher die Anzahl der Windungen

$$n = \frac{2\,(40{,}26 + 0{,}573)}{8 + 2{,}872 - 0{,}281} = 7{,}71$$

Endlich findet man die erforderliche Kraft

$$P = \frac{7{,}71 \cdot 30}{60 \cdot 4}\left[8 + 2{,}872 \cdot \frac{3{,}32}{4{,}28}\right] 66$$
$$= 649{,}9 \text{ Pfund.}$$

247. §.

Es bleibt nun noch übrig diejenigen Schlangen zu untersuchen, welche aus einer gleich weiten Röhre bestehen, die um einen Cylinder gewunden ist. Sämmtliche Betrachtungen bis an das Ende dieses Kapitels beziehen sich hierauf.

Weil die Luft in den letzten Windungen stärker zusammengepreßt ist als in den erstern, die Gänge aber von einerlei Größe bleiben, so muß näher nach der Steigröhre zu, eine größere Luft- oder Wassermenge als nahe am Horn in jeder Windung vorhanden seyn, wenn die Wasserbögen mit dem Drucke des Wassers in der Steigröhre im Gleichgewichte sind. Wegen dieses Gegendrucks kann mittelst des Horns, nicht mehr Wasser aufgenommen werden, als eine halbe Windung ausfüllt (240. §.); dasselbe gilt von der aufzunehmenden Luft. Stellt man sich nun unter Figur 28 eine um einen Cylinder gewundene Schlange vor, so wird, weil die Luft nicht entweichen kann, durch den stärkern Druck des Wassers in der Steigröhre, aus der horizontalen Röhre IG, das Wasser bei A^{VI} in die Windung $A^{VI}B^{V}$ übertreten, und den übrigen Raum, welchen die Luft nicht einnehmen kann, ausfüllen. Eben dieses Zurücktreten des Wassers wird in einem geringern Verhältnisse bei A^{V} in die Windung $A^{V}B^{IV}$ erfolgen, und so wird dieser Rückgang des Wassers aus jeder hintern Windung in die nächst folgende vordere fortgehen, und immer geringer werden, bis bei A, wo die Luftsäule A'B sich im Gleichgewichte befindet. Bei fortgesetzter Umdrehung der Schlange werden daher durch den beständigen Rückstrom des Wassers, die Wassersäulen unter den Luftbögen erhalten, und es kann, wenn die Maschine im Beharrungsstande ist, deshalb aus der letzten Windung nicht ...sser in die Steigröhre treten, als bei ...nse in die erste Windung getreten ist,

T. III. F. 28.

weil wegen des erwähnten Rückstroms bei der Umdrehung, jede hintere Windung der vorhergehenden so viel Wasser abgiebt, als sie selbst vorher erhalten hat.

248. §.

Es wird nun leicht seyn für eine Schlange, welche aus einer cylindrischen um einen Cylinder gewundenen Röhre bestehet, die Abmessungen zu finden.

Wenn

R den Halbmesser der Windungen (vom Mittelpunkte bis an den Wasser- oder Luftbogen gerechnet)

r den Halbmesser der Röhre,

H die Höhe des Wassers in der Steigröhre,

l′ die Länge des Wasserbogens in der letzten Windung, und

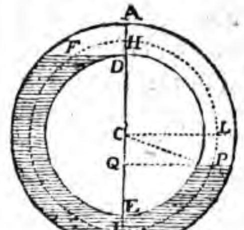
λ die Länge des Luftbogens in der letzten Windung,

bezeichnet, so findet man wie 241. §.

$$\lambda = \pi \frac{k+2R}{k+H} (R+r)$$

Die centrische Linie in jeder Windung ist

$$= 2\pi (R+r)$$



wird daher von dieser die Länge λ abgezogen, so wird

$$l' = \pi (R+r)\left(2 - \frac{k+2R}{k+H}\right)$$

Nun ist, wenn nebenstehende Figur die letzte Windung vorstellt

Bog. LP = Bog. HFIL — Bog. HF — Bog. FIP oder

$$\beta = \tfrac{3}{2}\pi(R+r) - \left(R+\tfrac{13}{12}r\right)\sqrt{\left[\frac{2r}{R+r}\right]} - \pi(R+r)\left(2-\frac{k+2R}{k+H}\right)$$

oder

$$\beta = \pi(R+r)\left[\frac{k+2R}{k+H} - \tfrac{1}{2}\right] - \left(R+\tfrac{13}{12}r\right)\sqrt{\left[\frac{2r}{R+r}\right]}$$

Hieraus findet man wie 242. §. für den Wasserbogen in der letzten Windung, die Druckhöhe

$$h = R + \beta\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\beta}{R+r}\right)^2 + \tfrac{1}{120}\left(\frac{\beta}{R+r}\right)^4\right]$$

249. §.

Die Länge des Wasserbogens in der ersten Windung und die dazu gehörige Widerstandshöhe h' findet man wie 243. §.

$$h' = \frac{lv^2}{4012\,r} = \frac{\pi v^2 (R+r)}{4012\,.\,r}$$

Ist nun h'' die Widerstandshöhe für die letzte Windung, so erhält man auf ähnliche Art

$$h'' = \frac{l'v^2}{4012\,r} \text{ oder } 248.\ \S.$$

$$h'' = \frac{\pi v^2 (R+r)}{4012\,.\,r}\left(2 - \frac{k+2R}{k+H}\right)$$

folglich ist die Summe beider Widerstandshöhen, oder

$$h' + h'' = \frac{\pi v^2 (R+r)}{4012\,.\,r}\left[3 - \frac{k+2R}{k+H}\right]$$

Auf gleiche Art findet man die hydraulische Widerstandshöhe in der senkrechten Steigröhre

$$h''' = \frac{Hv^2}{4012\,.\,r}$$

Setzt man nun die Anzahl [illegible] ngen der Schlange = n, so ist [illegible] es Wasserbogens [illegible]

in der ersten Windung $2R - h'$

in der letzten Windung $h - h''$

und daher eben so, wie 244. §., die Höhe des Wassers in der Steigröhre oder

$$H = \frac{1}{2}n\,(2R + h - h' - h'') - h'''$$

und hieraus die Anzahl der Windungen

$$n = \frac{2(H + h''')}{2R + h - (h' + h'')}$$

Die Höhe sämmtlicher Luftsätze $= H'$ also die gesamte Aufförderungshöhe $H + H'$ wird nach 245. §. gefunden.

Eben so, wie 246. §., ist die Wassermenge in einer Minute

$$M = m\pi^2 r^2 (R + r)$$
$$= 30 . v \pi r^2$$

und der Halbmesser der Röhre

$$r = \sqrt{\left[\frac{M}{30 \pi v}\right]}$$

Für den Halbmesser $R + r$ ist das Moment des Wasserbogens in der ersten Windung

$$= (R + r)\, 2R . \pi r^2 \gamma$$

und in der letzten Windung

$$= (R + r)\, h . \pi r^2 . \gamma$$

daher wie 246. §. die zur Umdrehung der Schlange am Halbmesser $R + r$ erforderliche Kraft

$$P = \frac{1}{2} \pi r^2 n\, [2R + h]\, \gamma \text{ oder}$$

$$P = \frac{nM}{60 . v}\, [2R + h]\, \gamma.$$

Beispiel. Man soll die cylindrische um einen Cylinder gewundene Schlange einer Spiralpumpe so anordnen, daß in jeder Minute 30 Kubikfuß Wasser auf eine Höhe von 63 Fuß gehoben werden.

Die Geschwindigkeit der ersten Windung sei $= 4$ Fuß, so findet man den Halbmesser der Röhre

$$r = \sqrt{\left[\frac{30}{30 \cdot \frac{22}{7} \cdot 4}\right]} = 0{,}28 \text{ Fuß}$$

Ist der Halbmesser jeder Windung oder $R = 4$ Fuß, so findet man wie im 246. §. die hydrostatische Höhe in der Steigröhre

$$H = 40{,}26 \text{ Fuß.}$$

Nach dem 248. §. ist der Bogen

$$\varphi = \frac{22}{7} \cdot 4{,}28 \left[\frac{40}{72{,}26} - \frac{1}{2}\right] - \left(4 + \frac{11}{2} \cdot 0{,}28\right) \sqrt{\left[\frac{2 \cdot 0{,}28}{4{,}26}\right]}$$
$$= -0{,}837 \text{ Fuß}$$

welches anzeigt, daß der Bogen PL oberhalb des horizontalen Halbmessers CL liegt. Hieraus findet man die Druckhöhe in der letzten Windung

$$h = 4 - 0{,}837 \left[1 - \frac{0{,}837^2}{6 \cdot 4{,}28^2}\right] = 3{,}17 \text{ Fuß.}$$

Für die Widerstandshöhen erhält man

$$h' + h'' = \frac{22 \cdot 16 \cdot 4{,}28}{7 \cdot 4012 \cdot 0{,}28} \left[3 - \frac{40}{72{,}26}\right] = 0{,}464 \text{ Fuß}$$

$$\text{und } h''' = \frac{40{,}26 \cdot 16}{4012 \cdot 0{,}28} = 0{,}573 \text{ Fuß}$$

daher die Anzahl der Windungen

$$n = \frac{2\,(40{,}26 + 0{,}573)}{8 + 3{,}17 - 0{,}464} = 7{,}62$$

und hieraus die Kraft

$$P = \frac{7{,}62 \cdot 30}{60 \cdot 4} [8 + 3{,}17]\, 66 = 702{,}2 \text{ Pfund.}$$

250. §.

Es kann nun noch die Frage entstehen, welches die größte Höhe ist, auf die eine um einen Cylinder gewickelte Spiralpumpe, von gegebenen Abmessungen, das Wasser heben kann.

Die genaue Beantwortung dieser Frage, ist

mit weitläuftigen Rechnungen verbunden. Will man sich aber mit einer ungefähren Bestimmung der Förderungshöhe begnügen, so dient hiezu nachstehende Auseinandersetzung.

Nach dem 249. §. erhält man

$$nh = 2H - 2nR + n(h' + h'') + 2h'''$$

und 248. §. wenn die auf β folgenden Glieder weggelassen werden

$$nh = nR + n\beta, \text{ daher}$$

$$2H - 3nR + n(h' + h'') + 2h''' = n\beta.$$

Nun ist 249. §.

$$(h' + h'') = \frac{lv^2}{4012\,r}\left[3 - \frac{32 + 2R}{32 + H}\right]$$

$$h''' = \frac{Hv^2}{4012\,r} \text{ und (248. §.)}$$

$$\beta = l\left[\frac{32 + 2R}{32 + H} - \frac{1}{2}\right] - \left(R + \frac{13}{12}r\right)\sqrt{\left[\frac{2r}{R + r}\right]}.$$

Setzt man die Werthe von h', h'', h''' und β in die vorstehende Gleichung, und nimmt

$$32 + H = y$$

so erhält man nach gehöriger Zusammenziehung und Ordnung der Gleichung

$$y^2 - Ay - B = 0$$

wo alsdann

$$A = \frac{4012\,rn\left[3R - \frac{1}{2}l - \left(R + \frac{13}{12}r\right)\sqrt{\frac{2r}{R + r}}\right] + v^2(64 - 3nl + 256768r}{2(4012\,r + v^2)}$$

und $$B = nl\,(16 + R) \text{ ist.}$$

Man erhält daher die hydrostatische Druckhöhe in der Steigröhre

$$H = \frac{1}{2}A + \sqrt{\left[\frac{1}{4}A^2 + B\right]} - 32$$

voraus nach dem 245. §. die Lufthöhe und die Förderungshöhe bestimmt werden kann.

Beispiel. Mit Beibehaltung der Abmessungen des 246. §. die hydrostatische Druckhöhe in der Steigröhre zu finden.

Hier ist $l = \pi (R + r) = \frac{22}{7} . 4,28 = 13,45$

$$A = \frac{4012 . 0,28 . 7,26 (12 - 6,725 - 1,085) + 16 (64 - 3 . 7,62 . 13,45) + 71895,04}{2 (4012 . 0,28 + 16)}$$

$$= \frac{103966,85}{2278,72} = 45,58$$

$$B = 7,62 . 13,45 (16 + 4) = 2049,78$$

folglich die hydrostatische Druckhöhe

$$H = 22,79 + \sqrt{2569,16} - 32 = 41,48 \text{ Fuß.}$$

251. §.

Aus dem 249. §. berechneten Beispiele, wenn man solches mit dem 246. §. vergleicht, ergiebt sich, daß die um einen Kegel gewundene Schlange bei gleicher Förderungshöhe mehr Windungen und weniger Kraft erfordert, als die um einen Cylinder gewundene, wie man sich auch leicht aus Vergleichung der allgemeinen Ausdrücke überzeugen kann.

Die ersten theoretischen Untersuchungen über die Spiralpumpe, befinden sich in den Petersburger Commentarien vom Jahre 1772, von Daniel Bernoulli. Eine Beschreibung der Wirzschen Pumpe, von J. H. Ziegler von Winterthur, ist im dritten Bande der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich vom Jahre 1766 eingerückt. Die vollständigsten Untersuchungen über diese Maschine sind von Herrn Nicander in den Neuen Abhandlungen der Königl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1783 und 1784, im vierten und fünften Bande enthalten.

Es wird vielleicht nicht undienlich seyn, die Einrichtung zu erklären, wie nach der Nicanderschen
T. III. Beschreibung das Ende der Schlange GH (Fig. 29)
F. 29. unmittelbar mit der Steigröhre IK verbunden wird. Am Ende der Schlange ist dieselbe um so viel verjüngt, daß das Ende der Steigröhre genau hineinpaßt, welches in allen Theilen anschließen, gut abgedreht und eingerieben werden muß. Am Ende der Schlange ist eine Platte ab und an der Steigröhre eine etwas größere Platte cd befestiget und rechtwinklicht abgedreht. Auf der Schlange befindet sich ein metallner Ring ef, welcher sich frei um die Röhre drehen kann. Dieser Ring wird mittelst vier Schrauben an der Platte cd der Steigröhre befestiget, wenn zuvor zwischen die Platten, lederne in heißes Öhl, Talg und Theer getränkte Scheiben dazwischen gelegt sind. Hiedurch erhält man eine luft- und wasserdichte Verbindung, etwa wie G'H'I', die aber wenn gleich alle Theile noch so sorgfältig gearbeitet sind, dennoch eine ansehnliche Reibung verursacht, weshalb noch eine bessere Einrichtung angegeben werden soll.

252. §.

So viel Vorzüge diese Maschine, so weit sie hier beschrieben ist, vor andern Einrichtungen zum Wasserheben hat, so kann sie doch noch dadurch verbessert werden, daß man die letzte Windung GI
F. 30. (Figur 30) nicht unmittelbar in die Steigröhre, sondern zuvor, wie in einen Windkessel ABCD gehen läßt, welcher sich unmittelbar an dem Gefäße ABMN, worin die Schlange ist, befindet. An dem Obertheile des Windkessels wird die Steigröhre K angebracht *). Hiedurch kann man eine bessere

*) Ich habe ein solches Modell von einer Spiral-

bessere mit weniger Reibung verbundene luft- und wasserdichte Befestigung erhalten.

Um die letzte Windung der Schlange am besten mit dem sogenannten Windkessel zu verbinden, dient folgende Einrichtung. Am Ende der letzten Windung I (Figur 31) bleibt eine breite Scheibe T. III.
oder Lappen ab stehen. In der Wand AB des F. 31.
Windkessels wird alsdann eine etwas kleinere kreisförmige Öfnung cd gemacht, und zwischen der Schlange und der Wand des Kessels, eine große lederne Scheibe eg, welche mit einer Öfnung fh versehen ist, an die äußere Wand des Windkessels befestiget, wie solches aus der Figur näher hervorgeht. Wird nun das Ende der Schlange gegen diese lederne Scheibe stumpf angesetzt, so ist es nicht leicht möglich, daß zwischen der Scheibe und Windung, Luft oder Wasser durchdringen könnte, weil die im Windkessel befindliche Luft und das Wasser die lederne Scheibe sehr stark gegen die metallne Scheibe der Schlange anpressen.

253. §.

Die Schlangen zu den Spiralpumpen lassen sich

pumpe mit gläsernen ½ Zoll weiten Röhren, die sich gegen die gläserne Steigröhre etwas verengen, aus eilf Windungen, jede von einem Fuß Durchmesser, verfertigen lassen, welches die beschriebene Einrichtung hat. Noch kann an dem Windkessel desselben, statt der Steigröhre, ein Schlauch mit einem Gußrohre angebracht werden, und damit der Strahl nicht durch das Austreten der Luft unterbrochen wird, so geht die Röhre des Schlauchs bis beinahe auf den Boden des Windkessels, da sie denn nur Wasser aufnimmt; am Obertheile des Kessels ist aber ein Luftventil befindlich, welches durch eine gewundene Feder nur so stark angedrückt wird, daß die zu sehr zusammengepreßte Luft solches öfnen und entweichen kann. Es läßt sich aber bald einsehen, daß hierdurch ein Theil des Effects verloren geht.

am besten aus Kupfer arbeiten, wie die Schlangen bei den Brandtweinblasen, auch kann der Windkessel aus Kupfer, gegossenem Eisen oder aus dreizölligen Bohlen, welche durch eiserne Bänder zusammengetrieben sind, verfertiget werden. Die Steigröhre kann von Blei, Eisen oder aus hölzernen gebohrten Röhren bestehen, auch können hiezu solche Röhren dienen, welche aus vier Bohlen zusammen geschlagen und durch eiserne Bänder befestiget sind, wobei nur darauf zu sehen ist, daß der quadratförmige Querschnitt dieser Röhren, dem Querschnitte der Schlange an Inhalt gleich ist.

Bei der im 238. §. angeführten, in Archangelsky erbauten Spiralpumpe, waren zwei Schlangen von geschlagenem Kupfer nebeneinander gewunden, die Fugen mit Zinn gelöthet, und die eine hatte drei, die andere vier schwedische Zoll Röhrendurchmesser. Jede von den $6\frac{1}{2}$ Windungen der Schlange, welche keinen Kreis sondern ein Achteck bildeten, hatte 18 schwedische Fuß Durchmesser, und das Rad machte in jeder Minute 3 Umläufe. Es ist leicht einzusehen, daß wegen der achteckigten Form der Windungen, ein Verlust an Kraft und Hub entstehen mußte.

So einfach und verhältnißmäßig weniger kostbar auch übrigens die Spiralpumpen gegen andere Maschinen sind, welche das Wasser auf eine beträchtliche Höhe heben, so wollte ich doch versuchen ob man sich nicht anstatt der kupfernen Windungen, einer hölzernen Schlange bedienen könne. Ich ließ zu dem Ende eine hölzerne Schlange von sieben Windungen, jede 2 Zoll weit und 2 Zoll hoch verfertigen, den Durchmesser der Windungen mit Inbegrif der Windungsweite 2 Fuß groß annehmen, und die ganze Schlange auf eine ähn-
T. IV. F. 33. liche Art konstruiren, wie die Figur 33 abgebildete Wasserschnecke, außer daß hiebei keine massive Welle nöthig war. Diese Schlange hat die Ge-

ılt eines an seinem Umfange bekleideten ober-
)lächtigen Wasserrades; bei der Einmündung ist
ıtt des Horns eine Erweiterung von Blech an-
bracht, und die letzte Windung endet sich, mit-
lst einer metallnen Röhre in den sogenannten
Zindkessel (Fig. 30). Bei dem Gebrauche zeigte T. III.
h, daß die Schlangenwindungen, eben so wie F. 30.
etallne Röhren, ganz wasser- und luftdicht wa-
n, so daß der Verfertigung hölzerner Schlangen,
i übrigens genauer Arbeit, nichts im Wege stehet.

am besten aus Kupfer arbeiten, wie die Schlangen bei den Brandtweinblasen, auch kann der Windkessel aus Kupfer, gegossenem Eisen oder aus dreizölligen Bohlen, welche durch eiserne Bänder zusammengetrieben sind, verfertiget werden. Die Steigröhre kann von Blei, Eisen oder aus hölzernen gebohrten Röhren bestehen, auch können hiezu solche Röhren dienen, welche aus vier Bohlen zusammen geschlagen und durch eiserne Bänder befestiget sind, wobei nur darauf zu sehen ist, daß der quadratförmige Querschnitt dieser Röhren, dem Querschnitte der Schlange an Inhalt gleich ist.

Bei der im 238. §. angeführten, in Archangelsky erbauten Spiralpumpe, waren zwei Schlangen von geschlagenem Kupfer nebeneinander gewunden, die Fugen mit Zinn gelöthet, und die eine hatte drei, die andere vier schwedische Zoll Röhrendurchmesser. Jede von den 6½ Windungen der Schlange, welche keinen Kreis sondern ein Achteck bildeten, hatte 18 schwedische Fuß Durchmesser, und das Rad machte in jeder Minute 3 Umläufe. Es ist leicht einzusehen, daß wegen der achteckigten Form der Windungen, ein Verlust an Kraft und Hub entstehen mußte.

So einfach und verhältnißmäßig weniger kostbar auch übrigens die Spiralpumpen gegen andere Maschinen sind, welche das Wasser auf eine beträchtliche Höhe heben, so wollte ich doch versuchen ob man sich nicht anstatt der kupfernen Windungen, einer hölzernen Schlange bedienen könne. Ich ließ zu dem Ende eine hölzerne Schlange von sieben Windungen, jede 2 Zoll weit und 2 Zoll hoch verfertigen, den Durchmesser der Windungen mit Inbegrif der Windungsweite 2 Fuß groß annehmen, und die ganze Schlange auf eine ähnliche Art konstruiren, wie die Figur 33 abgebil-
T.IV. F.33. dete Wasserschnecke, außer daß hiebei keine massive Welle nöthig war. Diese Schlange hat die Ge-

rlt eines an seinem Umfange bekleideten ober-
)lächtigen Wasserrades; bei der Einmündung ist
rtt des Horns eine Erweiterung von Blech an-
bracht, und die letzte Windung endet sich, mit-
lst einer metallnen Röhre in den sogenannten
Windkessel (Fig. 30). Bei dem Gebrauche zeigte T. III.
h, daß die Schlangenwindungen, eben so wie F. 30.
etallne Röhren, ganz wasser- und luftdicht wa-
n, so daß der Verfertigung hölzerner Schlangen,
i übrigens genauer Arbeit, nichts im Wege stehet.

Ein und zwanzigstes Kapitel.

Von der archimedischen Wasserschnecke und der Wasserschraube.

254. §.

Nach denselben Gesetzen wie man um die Spindel einer Schraube die Schraubengänge zeichnet, kann man sich um einen Cylinder, welcher hier ebenfalls die Spindel (Fusus, *Noyau*) heißen kann, eine Schraubenlinie (Helix, *Helice*) denken und nach derselben um den Cylinder eine gleichweite Röhre so winden, daß ihre centrische Linie in die Schraubenlinie der Spindel fällt, so entstehet daraus eine archimedische Wasserschnecke (Cochlea Archimedis, *Vis d'Archimede*) deren Erfindung man dem Archimed zuschreibt. Hält man die Schnecke aufwärts gerichtet, so heißt die untere Öfnung der Röhre die Einflußöfnung, und die obere, die Ausflußöfnung. Diejenige Fläche, welche senkrecht auf der Axe der Spindel die Einflußöfnung in ihrem Schwerpunkte schneidet, und durch die Projektion begränzt wird, ist die Grundfläche der Schnecke.

So vielmal die Röhre um die Spindel gewunden ist, so viel Windungen (Convolutiones, *Circonvolutions, Tours*) hat die Schnecke. Die Windung bei der Einflußöfnung heißt die erste, die folgende die zweite u.s.w. Die Entfernung der centrischen Linie einer Windung von der nächst folgenden, parallel mit der Axe gemessen, ist die Höhe eines Schneckenganges. Wenn nur eine Röhre um

die Spindel gewunden ist, so heißt die Schnecke eine einfache, sind aber zwei oder drei Rohren nebeneinander umgewickelt, so daß zwei oder drei Ein- und Ausflußöfnungen entstehen, so wird sie eine doppelte oder dreifache, oder eine Schnecke von zwei, drei, Gängen genannt.

Außerdem daß man eine Röhre um die Spindel winden kann, so läßt sich eine Wasserschnecke auch dadurch bewerkstelligen, daß man nach der Schraubenlinie in die Spindel Vertiefungen macht und Splisse oder Bretterchen darin so einpfalzt, damit Linien welche man in diesen Bretterchen nach der Axe der Spindel ziehet, auf dieser Axe senkrecht stehen. Werden diese Bretterchen in gleicher Entfernung von der Spindel abgeschnitten und schließen sie dicht aneinander, so wird dadurch ein Schneckengang gebildet, der, wenn an dem äußern Umfange eine Bekleidung mit schmalen Brettern oder ein Mantel (Faß oder Tonne) befestiget wird, wodurch die Räume zwischen dem Schneckengange umschlossen werden, ebenfalls eine Wasserschnecke bildet, die man gewöhnlich Tonnenmühle nennt.

Die Wasserschrauben sind von den Wasserschnecken oder Tonnenmühlen darin verschieden, daß bei ihnen die Bekleidung nicht an dem Schneckengange befestiget ist, sondern unbeweglich bleibt, wenn sich die Spindel mit den Schneckengängen um ihre Axe drehet. Die Höhlung in welcher sich die Schraube bewegt, heißt der Trog oder Kumm, welcher so genau wie möglich um die untere Hälfte der Schraube schließt, und auf beiden Seiten noch eine geringe vertikale Erhöhung erhält.

Die 32. Figur zeigt die Abbildung einer Wasserschnecke mit einer umgewundenen Röhre; Figur 33 einer Tonnenmühle, und Figur 34 von einer Wasserschraube, mit einem gemauerten Trog.

Bei den Tonnenmühlen und Wasserschnecken ist

die Höhe des Schneckenganges von der Höhe der Windungsweite zu unterscheiden, weil letztere die Weite einer Windung im Lichten, senkrecht auf den Brettern des Schneckenganges gemessen, bezeichnet, da erstere parallel mit der Axe der Schnecke gemessen wird. Die Breite der Windung ist diejenige lichte Weite derselben, welche in einer Ebene durch die Axe der Schnecke vom Umfange bis an die Spindel, mit den Bretterchen parallel gemessen wird, oder die Länge der Bretterchen des Schneckenganges, so weit sie aus der Spindel hervorragen.

255. §.

Wenn eine Schnecke irgend eine Stellung erhalten hat, so gilt in Absicht der Lage von jeder folgenden Schneckenwindung, was von der ersten gilt. Ist AFF' (Figur 32) die erste Windung, so wird erfordert, wenn in derselben Wasser stehen bleiben soll, ohne durch die Öfnung A zurück zu fließen, daß ein Theil der Windung bei M niedriger stehe, als einer der vorhergehenden bei L. Wäre kein Theil niedriger wie der vorhergehende nach A zu, so könnte kein Wasser in der ersten Windung stehen bleiben, und weil dieses von jeder folgenden gilt, so müßte unter diesen Umständen eine kleine Kugel die man bei F in die Ausflußöfnung setzt, durch sämmtliche Windungen und endlich bei A wieder auslaufen.

T.IV. F.32.

Hienach ist es sehr wichtig, für jede gegebene Lage der Schnecke zu wissen, ob es entfernter von der Ausmündung, in den Windungen einen Punkt giebt, der niedriger liegt als der vorhergehende nach der Ausmündung zu, weil ohne diese Bedingung die Schnecke bei der Umdrehung kein Wasser in der Windung behält.

Liegt hingegen M, M', M''.... niedriger wie L, L', L''...., so muß wenn die Öfnung A unter den

Wasserspiegel WW kommt, nach hydrostatischen Grundsätzen, ein Theil der ersten Windung mit Wasser angefüllt werden, und weil bei fortgesetzter Umdrehung der Spindel dieses Wasser nicht zurücktreten kann, so muß es so lange in die Höhe steigen, bis es bei E ausfließt.

256. §.

Ist die Spindel ABCD (Figur 35) gegen den Horizont geneigt, und man legt durch den tiefsten Punkt B in der Grundfläche derselben eine horizontale Ebene EE″, so entstehet die Frage, wie hoch irgend ein Punkt M in der centrischen Linie der ersten Windung AFF′ über der Horizontalebene EE″ liege. Diese Höhe sei MN; ferner T. IV. F. 35

α = QAL der Winkel welchen die Schneckenlinie, oder die centrische Linie der Windung, mit dem Umfange der Grundfläche einschließt (wenn man sich beide Linien in eine den Cylinder tangentirende Ebene gelegt vorstellt), welcher hier der Windungswinkel heißen soll. α

β = CBE der Winkel unter welchem die Axe der Spindel gegen den Horizont geneigt ist. β

Man ziehe auf der Oberfläche des Cylinders die Linie MP mit der Axe O′O parallel, und es sei

x der Bogen für den Halbmesser = 1, welcher zum Bogen AP in der Grundfläche der Spindel gehört, und die Projektion des Punkts M auf der Grundfläche bestimmt, x

ist, wenn

R = AO den Halbmesser der zur centrischen Linie bezeich- R

T. IV. F. 36. Bogen $AP = R.x$

Ferner sei PR senkrecht auf MN und Pn senkrecht auf der Ebene EE″, so ist MPnN eine vertikale Fläche und $\angle MPR = \beta$.

Aber $PM = R.x \text{ Tgt}\,\alpha$ und

$$MR = PM \text{ Sin}\,\beta = Rx \text{ Tgt}\,\alpha \text{ Sin}\,\beta$$

Man ziehe PH auf AB und HS auf EE″ senkrecht, so ist $\angle HBS = 90° - \beta$ also

$$HS = BH.\text{Cos}\,\beta$$

und weil HP, PR horizontal und HS, Pn, RN vertikal sind, so ist $HS = Pn = RN$, daher

$$MN = MR + RN = R.x \text{ Tgt}\,\alpha \text{ Sin}\,\beta + BH.\text{Cos}\,\beta$$

Nun ist

$$BH = 2R - AH = 2R - \text{Sin.vers}\,x$$
$$= 2R - R(1 - \text{Cos}\,x) = R + R\,\text{Cos}\,x$$

folglich die gesuchte Höhe des Punkts M über der Horizontalebene EE″, oder

$$MN = R.x \text{ Tgt}\,\alpha \text{ Sin}\,\beta + R(1 + \text{Cos}\,x)\text{ Cos}\,\beta.$$

257. §.

Derjenige Werth von x, welcher für MN die kürzeste unter allen zunächst gelegenen Linien oder ein Minimum giebt, bestimmt den niedrigsten Punkt in der ersten Windung; so wie derjenige Werth von x, welcher für MN die längste Linie unter den zunächst gelegenen oder ein Maximum giebt, den höchsten unter den nächst vorhergehenden und darauf folgenden Punkten der ersten Windung über dem Horizonte EE″ bestimmt.

Für beide Fälle findet man *)

$$\text{Sin}\,x = \text{Tgt}\,\alpha.\text{Tgt}\,\beta$$

*) $\frac{d(MN)}{dx} = R \text{ Tgt}\,\alpha \text{ Sin}\,\beta - R \text{ Sin}\,x \text{ Cos}\,\beta = 0$ also

wovon man sich leicht durch Proberechnungen überzeugen kann, so bald α und β bestimmte Werthe erhalten. T. IV. F. 36.

Weil aber ein jeder Sinus zu einem spitzen und stumpfen Winkel (welche sich zu 180 Grad ergänzen) zugleich gehört, so folgt daraus daß der Bogen x zwei Werthe hat, wovon der eine in den ersten, und der andere in den zweiten Quadranten des Bogens APB fällt. Der Bogen für x im ersten Quadranten, giebt für MN ein Maximum, und im zweiten Quadranten ein Minimum.

258. §.

Wenn $\text{Tgt}\,\alpha \,.\, \text{Tgt}\,\beta > 1$ ist, so wird
$$\text{Sin}\,x > 1$$

$$\text{Tgt}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta = \text{Sin}\,x\ \text{Cos}\,\beta \text{ oder}$$
$$\text{Sin}\,x = \text{Tgt}\,\alpha\ \text{Tgt}\,\beta$$

Um nun zu bestimmen, in wie fern dieser Ausdruck für ein Maximum oder Minimum gilt, so erhält man nach bekannten Lehren

$$\frac{d^2(MN)}{dx^2} = -R\ \text{Cos}\,x\ \text{Cos}\,\beta.$$

So lange also Cos x positiv ist, wird der ganze Ausdruck negativ und man erhält ein Maximum; welches Statt findet, wenn x im ersten oder vierten Quadranten von A fällt. Wird aber Cos x negativ, welches nur geschehen kann, wenn x in den zweiten oder dritten Quadranten von A fällt, ein Minimum. Es können daher nur im ersten und vierten Quadranten Maxima und im zweiten oder dritten Quadranten Minima enthalten seyn. Soll x in den dritten oder vierten Quadranten fallen, so müßte Tgt α Tgt β negativ werden; weil dieses aber nie der Fall ist, so kann auch x nie in dem dritten oder vierten Quadranten liegen, oder es giebt daselbst weder ein Maximum noch ein Minimum.

welches unmöglich ist, weil kein Sinus größer als 1 werden kann; es giebt daher auch in diesem Falle weder ein Maximum noch Minimum.

Für $Tgt\,\alpha \,.\, Tgt\,\beta = 1$ ist

$$Sin\,x = 1 = Sin\,90^\circ$$

also gehört der Bogen x in diesem Falle zu einem rechten Winkel, und weil nun x nur einen Werth haben kann, so müßte MN für $Sin\,x = 1$ ein Maximum und Minimum zugleich seyn; daher findet keins von beiden Statt, und man erhält für diesen Bogen einen Wendungspunkt.

In den Windungen kann aber nur dann Wasser bleiben, wenn ein Theil derselben niedriger als der vorhergehende liegt, es läßt sich daher einsehen, daß die Schnecke nur dann Wasser schöpft, wenn es für MN ein Minimum giebt.

Wäre $Tgt\,\alpha \,.\, Tgt\,\beta < 1$ so wird

$$Sin\,x < 1 \text{ und weil}$$

$$Sin\,x = Sin\,(\pi - x)$$

so fällt der zu x gehörige Bogen von dem Umfange der Grundfläche in den ersten Quadranten und giebt ein Maximum, so wie $\pi - x$ in den zweiten Quadranten fällt und ein Minimum giebt.

Nun war $Tgt\,\alpha \,.\, Tgt\,\beta < 1$ also

$$Tgt\,\alpha < \frac{1}{Tgt\,\beta} \text{ oder } < Cot\,\beta \text{ oder}$$

$$Tgt\,\alpha < Tgt\,(90^\circ - \beta) \text{ daher}$$

$$\alpha < 90^\circ - \beta \text{ folglich}$$

$$\alpha + \beta < 90 \text{ Grad,}$$

d. h. wenn die Schnecke Wasser schöpfen soll, so müssen die Winkel α und β zusammengenommen, weniger als 90 Grad betragen.

259. §.

Wenn für den Bogen AQ (Fig. 35) in dem dazu gehörigen Punkte L der centrischen Linie, LN' ein Maximum wird, und man setzt daß T. IV. F. 35

δ denjenigen Bogen für den Halbmesser = 1 bezeichne, welcher zum Bogen AQ gehört,

so ist AQ = R . δ und δ ein Werth von x im ersten Quadranten, daher

$$\text{Sin}\,\delta = \text{Tgt}\,\alpha \,.\, \text{Tgt}\,\beta.$$

Man nehme

$$BP = AQ = APB - AP$$

und ziehe aus P die Linie PM bis an die centrische Linie mit O'O parallel, so ist

$$\text{Sin}\,AQ = \text{Sin}\,AP,$$

daher ist AP der Bogen in der Grundfläche für das Minimum und L liegt am höchsten, M aber am niedrigsten unter den zunächst gelegenen Punkten der centrischen Linie, in der ersten Windung.

Zieht man durch L eine Horizontallinie durch die Spindel, bis solche die centrische Linie in l trift; so wird dadurch der Bogen LMFl abgeschnitten, und wenn man sich anstatt der centrischen Linie eine sehr dünne Röhre denkt, so kann man LMFl den wasserhaltenden Bogen (Arcus Hydrophorus) nennen.

Man ziehe QG senkrecht auf den Durchmesser AB, so wird erfordert, wenn bei der Umdrehung der Schnecke, jede obere Windung einen eben so großen wasserhaltenden Bogen erhalten soll, daß die Oberfläche des Wassers bis an den Punkt G in der Grundfläche, welcher der Normalpunkt heißen kann, reiche. Denn wenn bei der Umdrehung der Spindel, die Ein-

T. IV. F. 35. flußöfnung A von B nach Q geht, so wird sich dieser Bogen allmählich mit Wasser füllen, und so bald A in Q ist, genau so viel Wasser geschöpft seyn, als den Bogen LMFl ausfüllt, welches sogleich dadurch einleuchtend wird, wenn man sich diesen Bogen, mit sich parallel an Q gelegt vorstellt. Kommt A über Q, so schöpft die Schnecke so viel Luft, als zwischen zwei wasserhaltenden Bögen enthalten ist, und so kann regelmäßig immer bei jeder Umdrehung so viel Wasser geschöpft werden, als die Ausfüllung des wasserhaltenden Bogens erfordert.

Wenn hingegen die Oberfläche des Wassers nicht bis G reicht, sondern nur etwa bis O, so kann nicht der ganze wasserhaltende Bogen gefüllt werden, und man erhält eine geringere Wassermenge in jeder Windung.

Liegt aber der höchste Punkt der Öfnung A unter der Oberfläche des Wassers, so kann die Schnecke keine Luft schöpfen und die ganze Röhre, so weit sie unter dem Wasserspiegel liegt, füllt sich nach hydrostatischen Gründen mit Wasser. Wird nun die Spindel umgedreht, so schießt etwas Wasser aus der angefüllten Windung in die nächstfolgende über. Bei dem weitern Fortrücken des übergeschossenen Wassers wird die Luft zwischen diesem und dem untern verdünnt; neue Luft tritt durch das übergeflossene Wasser von oben herunter, neues Wasser schießt über, und wenn bei der Umdrehung die Luftsäule in einer Windung unter die Grundfläche des Wassers in die nächst unterhalb vorhergehende gänzlich mit Wasser angefüllte Windungen kommt, tritt sie nach oben und treibt neues Wasser vor. Sind auf diese Art sämmtliche obere Windungen mit Wasser und Luft gefüllt, so tritt bei der Umdrehung allmählich die obere Luft durch die Wasserbögen nach den untern Windungen, und setzt die verdünnte Luft zwischen den Wasser-

gen mit der äußern ins Gleichgewicht. Aber ich jeden drei oder vier Umdrehungen, strömt die ift so heftig in die Ausflußöfnung und durch le Wasserbögen nach den untern Windungen hin, ß dadurch eine heftige Erschütterung in sämmtlhen Wasserbögen entstehet. Hiedurch und wegen r unregelmäßigen Bewegung des Wassers, kann enfalls nicht so viel Wasser jedesmal ausgegossı werden, als der wasserhaltende Bogen einer Zindung Inhalt hat; soll daher die größte Jassermenge bei der Schnecke geschöpft erden, so wird erfordert, daß der Wasrspiegel bis an den Normalpunkt G 'iche, wie solches die nachstehenden Versuche beitigen. Dasselbe gilt von den Tonnenmühlen. T. IV. F. 35.

Die Wasserschraube macht hievon eine Ausıhme, weil solche entweder nach oben offen, oder bst wenn sie bekleidet ist, doch zwischen der Beeidung und den Schraubengängen so viel Zwi)enraum hat, daß die Luft die Räume zwischen n Wasserbögen ausfüllen kann. Die Wasserhraube giebt daher eben so viel Wasser, an mag allein ihre Grundfläche, oder ehrere Windungen der untern Schrauengänge unter den Wasserspiegel brinen, wenn nur der wasserhaltende Bogen nicht ıs der Oberfläche des Wassers kommt.

Anmerk. Um mit der Erfahrung zu vergleichen, wie viel Wasser eine Schnecke bei verschiedener Eintauchung der Einflußöfnung giebt, ließ ich eine gläserne 0,25 Zoll weite Röhre um einen Cylinder winden, so daß der Durchmesser der centrischen Linie 1,6 Zoll groß, und die ganze Schnecke von 15 Windungen, von Oefnung zu Oefnung 15 Zoll lang war. Hienach ist der Winkel $\alpha = 11\frac{1}{4}$ Grad, und bei sämmtlichen Versuchen war die Schnecke so gelegt, daß ihre Axe mit dem Horizonte einen Winkel β von 21 Grad einschloß.

Bei jedem Versuche wurde zuvor das Wasser in der Schnecke in den Beharrungsstand gebracht, man machte jedesmal 100 Umdrehungen in Zeit von 5 Minuten, und wenn die erhaltene und genau ausgemessene Wassermenge durch 100 dividirt wurde, entstand die Wassermenge bei jeder Umdrehung, welche dem Wasserbogen in jeder Windung gleich ist.

I. Versuch. Die Einflußöfnung in ihrem tiefsten Stande war genau unter der Oberfläche des Wassers.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,0916 Kubikzoll.

II. Versuch. Wenn der vierte Theil von der Grundfläche der Spindel (254. §.) im Wasser eingetaucht war.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,1145 Kubikzoll.

III. Versuch. Der Wasserspiegel stand bis an die Mitte der Grundfläche.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,1469 Kubikzoll.

T. IV. F. 35. IV. Versuch. Der Wasserspiegel stand in der Mitte zwischen dem Mittelpunkte O (Figur 35) und dem Normalpunkte G.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,1570 Kubikzoll.

V. Versuch. Die Oberfläche des Wassers stand genau gegen den Normalpunkt G.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,1796 Kubikzoll.

VI. Versuch. Wenn die Oefnung am höchsten stand, so lag der Wasserspiegel zwischen dem Mittelpunkte der Oefnung und dem Normalpunkte.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,1698 Kubikzoll.

VII. Versuch. Die Oefnung in ihrem höchsten Stande lag frei über dem Wasserspiegel.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,1632 Kubikzoll.

VIII. Versuch. Das Wasser stand etwas in der Oefnung, so daß nur wenig Luft geschöpft werden konnte.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,0903 Kubikzoll.

IX. Versuch. Die Oefnung in ihrem höchsten Stande war so weit unter dem Wasser, daß sie keine Luft schöpfen konnte, und außerdem waren drei Windungen der Schnecke mit Wasser bedeckt waren.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,0243 Kubikzoll.

Diese Versuche, obgleich nur sehr im Kleinen angestellt, ersetzen dennoch durch die Genauigkeit mit welcher die Werkzeuge verfertiget sind, den Mangel an Größe, und sind hinreichend die vorgetragenen Sätze zu erläutern.

260. §.

Die Entfernung des Normalpunkts G vom höchsten Punkte A der Grundfläche läßt sich leicht für jede Lage der Schnecke bestimmen. Denn es ist (Figur 35) $AO = R$ und Bogen $AQ = R.\delta$ daher die gesuchte Entfernung T. IV. F. 35.

$$AG = R \text{ Sin.vers } \delta.$$

261. §.

Vom entferntesten Punkte l des wasserhaltenden Bogens, ziehe man lQ' auf die Grundfläche senkrecht, setze daß

- L die Länge des wasserhaltenden Bogens LMFl, L
- λ die Länge desjenigen Bogens für den Halbmesser 1 bezeichne, welcher zum Bogen APBQ' gehört λ

und denke sich die krumme Oberfläche des Cylinders ABCD in eine Ebene ausgebreitet, so ist

$$AL = AQ . \text{Sec}\,\alpha = R.\delta . \text{Sec}\,\alpha$$

$$ALMFL = APBQ' . \text{Sec}\,\alpha \text{ oder}$$

$$L + AL = R . \lambda . \text{Sec}\,\alpha \text{ daher}$$

$$L = R\,(\lambda - \delta)\,\text{Sec}\,\alpha.$$

Sobald nun λ bekannt ist, läßt sich mit Hülfe der übrigen gegebenen Größen, die Länge des wasserhaltenden Bogens L bestimmen.

T. IV. F. 33. Nach (256 §.) ist die Höhe des Punkts L über der Fläche EE″ oder

$$LN' = R\delta \, Tgt\,\alpha \, Sin\,\beta + R\,(1 + Cos\,\delta)\, Cos\,\beta$$

und eben so die Höhe von l über dieser Fläche

$$ln' = R\lambda \, Tgt\,\alpha \, Sin\,\beta + R\,(1 + Cos\,\lambda)\, Cos\,\beta$$

daher weil L und l in einerlei Horizontalebene liegen (259. §.) so muß $LN' = ln'$ seyn oder

$$\lambda \, Tgt\,\alpha \, Sin\,\beta + Cos\,\lambda \, Cos\,\beta = \delta \, Tgt\,\alpha \, Sin\,\beta + Cos\,\delta \,.\, Cos\,\beta$$

dividirt man durch $Cos\,\beta$ und setzt

T $$Tgt\,\alpha \, Tgt\,\beta = T$$

so wird

$$\lambda T + Cos\,\lambda = \delta . T + Cos\,\delta$$

weil nun δ und T bekannte Größen sind, so kommt es darauf an, aus dieser Gleichung den Werth von λ zu finden. Dieses läßt sich aber nicht ohne Weitläuftigkeit durch fortgesetztes Proberechnen bewerkstelligen, wie man sich aus den Karstenschen Lehrbüchern, wo auf diese Art gerechnet ist, überzeugen kann, weshalb man, um auf einem direkten Wege die Länge des wasserhaltenden Bogens zu finden, für die meisten Fälle annehmen kann, daß der Bogen λ nicht viel von der halben Peripherie verschieden ist. Man setze daher, um zu einem allgemeinen Ausdrucke für λ zu gelangen, daß

$$\lambda = \pi + \omega \text{ ist, so wird}$$

$$\omega = \lambda - \pi$$

und weil *)

$$Cos\,\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{24} - \frac{\omega^6}{720} + \ldots .$$

so

*) L. Eulers, angef. Einleitung in die Analysis. 1ster Band, 134. §.

so ist wenn man nur die beiden ersten Glieder der Reihe beibehält, da ω einen Bogen bezeichnet welcher ein Bruch ist

$$\text{Cos}\,\lambda = \text{Cos}\,(\pi + \omega) = -\text{Cos}\,\omega = \frac{\omega^2}{2} - 1$$

oder wenn man für ω substituirt

$$\text{Cos}\,\lambda = \tfrac{1}{2}(\lambda - \pi)^2 - 1$$
$$= \tfrac{1}{2}\lambda^2 - \pi\lambda + \tfrac{1}{2}\pi^2 - 1$$

Man setze die bekannte Größe

$\delta T + \text{Cos}\,\delta = A$, so wird A

$\lambda T + \text{Cos}\,\lambda = A$, oder

$\lambda T + \tfrac{1}{2}\lambda^2 - \pi\lambda + \tfrac{1}{2}\pi^2 - 1 = A$ oder

$\lambda^2 - 2\lambda(\pi - T) - 2 + \pi^2 - 2A = 0$ und hieraus

$\lambda = \pi - T \pm \sqrt{[(\pi - T)^2 + 2 - \pi^2 + 2A]}$ oder

$\lambda = \pi - T \pm \sqrt{[2 + 2A + T^2 - 2\pi T]}$ folglich

weil hier der kleinere Werth von λ nicht gesucht wird

$$\lambda = 3{,}1416 - T + \sqrt{[2 + 2A + T^2 - 6{,}283T]}$$

Nun ist

$$T = \text{Tgt}\,\alpha\ \text{Tgt}\,\beta = \text{Sin}\,\delta \text{ und}$$
$$A = \delta T + \text{Cos}\,\delta \text{ bekannt,}$$

daher läßt sich leicht daraus λ und demnächst die Länge des wasserhaltenden Bogens

$$L = R\,(\lambda - \delta)\ \text{Sec}\,\alpha \text{ finden.}$$

Beispiel. Wenn nach Vitruv's Angabe *) $\text{Tgt}\,\alpha = 1$ und $\text{Tgt}\,\beta = \frac{3}{4}$ also $\alpha = 45°$ und $\beta = 36°\ 52'$ genommen wird, so ist

$$T = \text{Tgt}\,\alpha\ \text{Tgt}\,\beta = \tfrac{3}{4} = \text{Sin}\,\delta \text{ daher}$$

*) Marcus Vitruvius Pollio angef. Baukunst. 10. Buch, 11. K. S. 265.

$\text{Sin}\,\delta = 0{,}75 = \text{Sin}\,48^\circ\,35'$ und

$\text{Cos}\,\delta = 0{,}66153$

$\text{Bog.}\,\delta = 0{,}84795$ also

$A = 0{,}84795 \cdot \frac{3}{4} + 0{,}66153 = 1{,}29749$ daher

für $R = 1$

$\lambda = 3{,}1416 - 0{,}75 + \sqrt{[2 + 2{,}595 + 0{,}75^2 - 6{,}283 \cdot 0{,}75]}$
$= 2{,}3916 + 0{,}6672 = 3{,}0588$

(Nach den Tafeln stimmt zu diesem Bogen ein Winkel von $175^\circ\,16'$)

daher ist die Länge des wasserhaltenden Bogens
$= (3{,}0588 - 0{,}8479)\,\text{Sec}\,45^\circ = 3{,}1266.$

(Wird der Werth von λ in die Gleichung
$\lambda T + \text{Cos}\,\lambda = 1{,}2975$ gesetzt,
so erhält man, weil
$\text{Cos}\,175^\circ\,16' = -0{,}9966$ ist
$3{,}0588 \cdot \frac{3}{4} - 0{,}9966 = 1{,}2975$
wie erfordert wird.)

262. §.

Die vorgetragenen Untersuchungen beziehen sich sämmtlich auf Röhren von unendlich kleinen Durchmessern, und lassen sich nur bei sehr engen Röhren, mit Beiseitesetzung der Adhäsion anwenden. Da mir nun bis jetzt keine Untersuchungen über Schnecken von beträchtlicher Weite bekannt sind, so gebe ich nachstehende Auseinandersetzung über die Wasserschnecken mit Windungen, deren senkrechte Durchschnitte, Rechtecke von beträchtlicher Größe sind, als einen Versuch, die Theorie dieser Maschinen der Ausübung näher zu bringen.

T.IV. F.36. Es sei A'BCD (Figur 36) derjenige Cylinder, dessen Umfang durch die centrische Linie ALSFl' der Windung geht; A der Schwerpunkt der Einflußöfnung a a'a'' (die sich der Leser von sich abge-

kehrt denken muß), und $aB'C'D'$ der Umfang der Spindel, die unter dem Winkel $CBE = \beta$ gegen den Horizont EE' geneigt ist. Die Grundfläche $a'vba'$ welche von der Bekleidung der Schnecke begrenzt wird, geht hier nicht durch den Schwerpunkt der Einflußöfnung, sondern durch den äußern Rand aa' derselben. Durch den höchsten Punkt L (259. §.) in der centrischen Linie, lege man eine Ebene $TtLt''$ welche erweitert in die Axe der Spindel fällt, und von dem Umfange der Windung begrenzt wird. Weil diese Ebene in den ersten Quadranten, von A' an gerechnet, fällt, so wird sich ihr niedrigster Punkt am Umfange der Spindel in t befinden; durch diesen Punkt lege man eine Horizontalebene tS, welche die centrische Linie der ersten Windung in den Punkten S und l' schneidet, so würde bei einer Röhre von unendlich kleiner Weite, der Anfang des wasserhaltenden Bogens in L seyn (258. §). Im gegenwärtigen Falle aber, wird das Wasser bis zum Punkte t nach A' zu ablaufen, und in der Horizontalfläche tS stehen bleiben, daher man ohne Nachtheil annehmen kann, daß sich der Anfang des wasserhaltenden Bogens, um die Länge LS verkürze, so daß man SFl' als die wahre Länge dieses Bogens erhält. T. IV. F. 36.

Man setze die Höhe der Windungsweite $a'a'' = a$, a
die Breite aa' derselben $= b$, den Halbmesser für b
die centrische Linie, $OA' = R$, und den zum Punkte S in der Grundfläche gehörigen Bogen $A'V$ für den Halbmesser $1, = \delta + \sigma$, so ist

$$\text{Bogen } A'V = R(\delta + \sigma) \text{ und}$$

$$\text{Bogen } QV = R \cdot \sigma$$

weil (259. §) der Bogen $A'Q = R \cdot \delta$ ist.

Zieht man nun TQ, tq auf die Grundfläche, und TX, tx, SW, sw auf die Horizontalebene EE' senkrecht, so ist (256. §)

$$TX = R.\delta.Tgt\alpha.Sin\beta + R(1 + Cos\delta)Cos\beta$$

Von t sei tu auf TX senkrecht, so ist

$$tx = TX - Tu$$

wo Tu der vertikale Abstand der Punkte T und t
T.IV. F.37. von einander ist. Man denke sich (Figur 37) die vertikale rechtwinklichte Ebene Ao'od welche in o' auf der Horizontalfläche ee' stehet; der Kreisausschnitt Ao'T sei auf Ao'o senkrecht, und in demselben die Punkte T,t so gelegen wie Figur 36, dergestalt, daß die Fläche Ao'od mit einem Theile der Fläche A'OO'd (Fig. 36) übereinkommt. Aus T,t ziehe man TT' und tt' auf Ao' senkrecht, so sind diese Linien horizontal und t',T' liegen eben so hoch über ee' wie t,T und weil $\angle Ao'T = \delta$, so ist

$$T't' = Tt.Cos\delta$$

Man ziehe T'u' vertikal und t'u' horizontal, ist nun $\angle eo'o = \beta$, so wird $\angle t'T'u' = \beta$, daher

$$T'u' = T't'\ Cos\beta = Tt.Cos\delta\ Cos\beta.$$

Es ist aber T'u' der vertikale Abstand der Punkte T und t (da TT' und tt' in einerlei Horizontale liegen) und weil $Tt = \frac{1}{2}b$, so ist dieser Abstand

$$= \tfrac{1}{2}b\ Cos\delta\ Cos\beta$$

daher auch (Figur 37)

$$Tu = \tfrac{1}{2}b\ Cos\delta\ Cos\beta$$

folglich

$$tx = R\delta\ Tgt\alpha\ Sin\beta + R\ (1 + Cos\delta)\ Cos\beta - \tfrac{1}{2}b\ Cos\delta\ Cos\beta$$

Ferner ist (256. §.)

$$sw = R(\delta + \sigma)Tgt\alpha Sin\beta + R[1 + Cos(\delta + \sigma)]Cos\beta$$

und wenn ss' auf SW senkrecht gezogen wird, so ist $\angle Sss' = \beta$ also $Ss' = \frac{1}{2}a\ Sin\beta$ daher

$$SW = sw + Ss'\ \text{oder}$$

$$SW = R(\delta + \sigma) \text{Tgt}\alpha \text{Sin}\beta + R[1 + \text{Cos}(\delta + \sigma)] \text{Cos}\beta + \tfrac{1}{2} a \text{ Sin}\beta$$

Der Punkt S liegt mit t in einerlei Horizontalebene, daher ist

$$SW = tx$$

Setzt man beide Werthe einander gleich, dividirt durch R Cos β, und anstatt Tgt α Tgt β, nach 259. §. Sin δ gesetzt, giebt nach gehöriger Abkürzung

$$\sigma \text{Sin}\delta + \text{Cos}(\delta + \sigma) = \text{Cos}\delta - \frac{b \text{ Cos}\delta}{2R} - \frac{a \text{ Tgt}\beta}{2R}$$

und es kommt darauf an, aus dieser Gleichung σ zu entwickeln.

In denjenigen Fällen, wo $\delta + \sigma$ nicht viel von $\frac{1}{2}\pi$ oder einem rechten Winkel verschieden ist, welche in der Ausübung am meisten vorkommen, kann man den Werth von σ auf folgende Art ohne weitläuftige Proberechnung finden. Man setze

$$\delta + \sigma = \tfrac{1}{2}\pi + \omega$$

wo ω auch negativ seyn kann, so ist wenn man in der vorletzten Gleichung auf beiden Seiten δ Sin δ addirt

$$\sigma \text{Sin}\delta + \delta \text{ Sin}\delta + \text{Cos}(\delta + \sigma) = \text{Cos}\delta - \frac{b \text{ Cos}\delta}{2R} - \frac{a \text{ Tgt}\beta}{2R} + \delta \text{ Sin}\delta$$

oder

$$\text{Cos}\delta - \frac{b \text{ Cos}\delta}{2R} - \frac{a \text{ Tgt}\beta}{2R} + \delta \text{ Sin}\delta = B$$

gesetzt, giebt

$$(\delta + \sigma) \text{ Sin}\delta + \text{Cos}(\delta + \sigma) = B \text{ oder}$$

$$(\tfrac{1}{2}\pi + \omega) \text{ Sin}\delta + \text{Cos}(\tfrac{1}{2}\pi + \omega) = B$$

aber $\text{Cos}(\frac{1}{2}\pi + \omega) = -\text{Sin}\,\omega$ daher

$$\omega \text{ Sin}\delta - \text{Sin}\,\omega = B - \tfrac{1}{2}\pi \text{ Sin}\delta$$

Nun ist nach der Voraussetzung der Bogen ω nicht

$$TX = R.\delta.Tgt\alpha.Sin\beta + R(1+Cos\delta)Cos\beta$$

Von t sei tu auf TX senkrecht, so ist

$$tx = TX - Tu$$

wo Tu der vertikale Abstand der Punkte T und t
T.IV. von einander ist. Man denke sich (Figur 37) die
F.37. vertikale rechtwinklichte Ebene Ao'od welche in o' auf der Horizontalfläche ee' stehet; der Kreisausschnitt Ao'T sei auf Ao'o senkrecht, und in demselben die Punkte T, t so gelegen wie Figur 36, dergestalt, daß die Fläche Ao'od mit einem Theile der Fläche A'OO'd (Fig. 36) übereinkommt. Aus T, t ziehe man TT' und tt' auf Ao' senkrecht, so sind diese Linien horizontal und t', T' liegen eben so hoch über ee' wie t, T und weil $\angle Ao'T = \delta$, so ist

$$T't' = Tt.Cos\delta$$

Man ziehe T'u' vertikal und t'u' horizontal, ist nun $\angle eo'o = \beta$, so wird $\angle t'T'u' = \beta$, daher

$$T'u' = T't'\ Cos\beta = Tt.Cos\delta\ Cos\beta.$$

Es ist aber T'u' der vertikale Abstand der Punkte T und t (da TT' und tt' in einerlei Horizontale liegen) und weil $Tt = \frac{1}{2}b$, so ist dieser Abstand

$$= \frac{1}{2}b\ Cos\delta\ Cos\beta$$

daher auch (Figur 37)

$$Tu = \frac{1}{2}b\ Cos\delta\ Cos\beta$$

folglich

$$tx = R\delta\ Tgt\alpha\ Sin\beta + R\ (1+Cos\delta)\ Cos\beta - \frac{1}{2}b\ Cos\delta\ Cos\beta$$

Ferner ist (256. §.)

$$sw = R(\delta+\sigma)Tgt\alpha Sin\beta + R[1+Cos(\delta+\sigma)]Cos\beta$$

und wenn ss' auf SW senkrecht gezogen wird, so ist $\angle Sss' = \beta$ also $Ss' = \frac{1}{2}a\ Sin\beta$ daher

$$SW = sw + Ss'\ \text{oder}$$

$$SW = R(\delta + \sigma)\,\mathrm{Tgt}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta + R[1 + \mathrm{Cos}(\delta + \sigma)]\,\mathrm{Cos}\,\beta + \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\,\beta$$

Der Punkt S liegt mit t in einerlei Horizontalebene, daher ist

$$SW = tx$$

Setzt man beide Werthe einander gleich, dividirt durch R Cos β, und anstatt Tgt α Tgt β, nach 259. §. Sin δ gesetzt, giebt nach gehöriger Abkürzung

$$\sigma\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}(\delta + \sigma) = \mathrm{Cos}\,\delta - \frac{b\,\mathrm{Cos}\,\delta}{2R} - \frac{a\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{2R}$$

und es kommt darauf an, aus dieser Gleichung σ zu entwickeln.

In denjenigen Fällen, wo $\delta + \sigma$ nicht viel von $\frac{1}{2}\pi$ oder einem rechten Winkel verschieden ist, welche in der Ausübung am meisten vorkommen, kann man den Werth von σ auf folgende Art ohne weitläuftige Proberechnung finden. Man setze

$$\delta + \sigma = \tfrac{1}{2}\pi + \omega$$

wo ω auch negativ seyn kann, so ist wenn man in der vorletzten Gleichung auf beiden Seiten δ Sin δ addirt

$$\sigma\,\mathrm{Sin}\,\delta + \delta\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}(\delta + \sigma) = \mathrm{Cos}\,\delta - \frac{b\,\mathrm{Cos}\,\delta}{2R} - \frac{a\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{2R} + \delta\,\mathrm{Sin}\,\delta$$

oder

$$\mathrm{Cos}\,\delta - \frac{b\,\mathrm{Cos}\,\delta}{2R} - \frac{a\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{2R} + \delta\,\mathrm{Sin}\,\delta = B$$

gesetzt, giebt

$$(\delta + \sigma)\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}(\delta + \sigma) = B \text{ oder}$$

$$(\tfrac{1}{2}\pi + \omega)\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}(\tfrac{1}{2}\pi + \omega) = B$$

aber $\mathrm{Cos}(\tfrac{1}{2}\pi + \omega) = -\mathrm{Sin}\,\omega$ daher

$$\omega\,\mathrm{Sin}\,\delta - \mathrm{Sin}\,\omega = B - \tfrac{1}{2}\pi\,\mathrm{Sin}\,\delta$$

Nun ist nach der Voraussetzung der Bogen ω nicht

$$TX = R.\delta.\mathrm{Tgt}\alpha.\mathrm{Sin}\beta + R(1+\mathrm{Cos}\delta)\mathrm{Cos}\beta$$

Von t sei tu auf TX senkrecht, so ist

$$tx = TX - Tu$$

wo Tu der vertikale Abstand der Punkte T und t
T.IV. von einander ist. Man denke sich (Figur 37) die
F.37. vertikale rechtwinklichte Ebene Ao′od welche in o′ auf der Horizontalfläche ee′ stehet; der Kreisausschnitt Ao′T sei auf Ao′o senkrecht, und in demselben die Punkte T, t so gelegen wie Figur 36, dergestalt, daß die Fläche Ao′od mit einem Theile der Fläche A′OO′d (Fig. 36) übereinkommt. Aus T, t ziehe man TT′ und tt′ auf Ao′ senkrecht, so sind diese Linien horizontal und t′, T′ liegen eben so hoch über ee′ wie t, T und weil $\angle$ Ao′T $= \delta$, so ist

$$T't' = Tt.\mathrm{Cos}\delta$$

Man ziehe T′u′ vertikal und t′u′ horizontal, ist nun $\angle$ eo′o $= \beta$, so wird $\angle$ t′T′u′ $= \beta$, daher

$$T'u' = T't'\ \mathrm{Cos}\beta = Tt.\mathrm{Cos}\delta\ \mathrm{Cos}\beta.$$

Es ist aber T′u′ der vertikale Abstand der Punkte T und t (da TT′ und tt′ in einerlei Horizontale liegen) und weil Tt $= \frac{1}{2}$b, so ist dieser Abstand

$$= \tfrac{1}{2}b\ \mathrm{Cos}\delta\ \mathrm{Cos}\beta$$

daher auch (Figur 37)

$$Tu = \tfrac{1}{2}b\ \mathrm{Cos}\delta\ \mathrm{Cos}\beta$$

folglich

$$tx = R\delta\ \mathrm{Tgt}\alpha\ \mathrm{Sin}\beta + R\,(1+\mathrm{Cos}\delta)\ \mathrm{Cos}\beta - \tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\delta\,\mathrm{Cos}\beta$$

Ferner ist (256. §.)

$$sw = R(\delta+\sigma)\mathrm{Tgt}\alpha\,\mathrm{Sin}\beta + R[1+\mathrm{Cos}(\delta+\sigma)]\mathrm{Cos}\beta$$

und wenn ss′ auf SW senkrecht gezogen wird, so ist $\angle$ Sss′ $= \beta$ also Ss′ $= \frac{1}{2}$a Sin β daher

$$SW = sw + Ss' \text{ oder}$$

$$SW = R(\delta + \sigma)\,Tg\,\alpha\,Sin\,\beta + R[1 + Cos(\delta + \sigma)]\,Cos\,\beta + \tfrac{1}{2}\,a\,Sin\,\beta$$

Der Punkt S liegt mit t in einerlei Horizontalebene, daher ist

$$SW = tx$$

Setzt man beide Werthe einander gleich, dividirt durch R Cos β, und anstatt Tg α Tg β, nach 259 §. Sin δ gesetzt, giebt nach gehöriger Abkürzung

$$\sigma\,Sin\,\delta + Cos(\delta + \sigma) = Cos\,\delta - \frac{b\,Cos\,\delta}{2R} - \frac{a\,Tg\,\beta}{2R}$$

und es kommt darauf an, aus dieser Gleichung σ zu entwickeln.

In denjenigen Fällen, wo $\delta + \sigma$ nicht viel von $\frac{1}{2}\pi$ oder einem rechten Winkel verschieden ist, welche in der Anwendung am meisten vorkommen, kann man den Werth von σ auf folgende Art ohne weitläuftige Probeberechnung finden. Man setze

$$\delta + \sigma = \tfrac{1}{2}\pi + \omega$$

wo ω auch negativ seyn kann, so ist, wenn man zu der vorletzten Gleichung auf beiden Seiten δ Sin δ addirt

$$\sigma\,Sin\,\delta + \delta\,Sin\,\delta + Cos(\delta + \sigma) = Cos\,\delta - \frac{b\,Cos\,\delta}{2R} - \frac{a\,Tg\,\beta}{2R} + \delta\,Sin\,\delta$$

oder

$$Cos\,\delta - \frac{b\,Cos\,\delta}{2R} - \frac{a\,Tg\,\beta}{2R} + \delta\,Sin\,\delta = B$$

gesetzt, giebt

$$(\delta + \sigma)\,Sin\,\delta + Cos(\delta + \sigma) = B \text{ oder}$$

$$(\tfrac{1}{2}\pi + \omega)\,Sin\,\delta + Cos(\tfrac{1}{2}\pi + \omega) = B$$

aber $Cos(\frac{1}{2}\pi + \omega) = -Sin\,\omega$ daher

$$\omega\,Sin\,\delta - Sin\,\omega = B - \tfrac{1}{2}\pi\,Sin\,\delta$$

Nun ist nach der Voraussetzung der Bogen ...

beträchtlich, daher weicht er nur wenig von $\sin\omega$ ab, und es kann letzterer um so mehr statt ω in Rechnung gebracht werden, weil er noch mit $\sin\delta$ multiplizirt und der dadurch entstehende Fehler um so geringer seyn wird. Nach dieser Voraussetzung, und wenn man die Zeichen umkehrt ist

$$(1-\sin\delta)\sin\omega = \tfrac{1}{2}\pi\sin\delta - B \text{ folglich}$$

$$\sin\omega = \frac{\frac{1}{2}\pi\sin\delta - B}{1-\sin\delta}$$

Ist hieraus $\sin\omega$ und also auch der Bogen ω gefunden, so erhält man

$$\sigma + \delta = \tfrac{1}{2}\pi + \omega$$

Wird $\frac{\frac{1}{2}\pi\sin\delta - B}{1-\sin\delta}$ negativ, so sucht man den dazu gehörigen Bogen für einen positiven Sinus, nimmt aber alsdann

$$\sigma + \delta = \tfrac{1}{2}\pi - \omega.$$

Beispiel.

$$B = 0{,}34957 \text{ und}$$

$$\sin\delta = 0{,}24572 \text{ so ist}$$

$$\sin\omega = \frac{1{,}57079 \cdot 0{,}24572 - 0{,}34957}{1 - 0{,}24572} = 0{,}04827$$

$$= \sin 2^\circ\ 46'$$

$$\text{daher } \omega = 0{,}04829$$

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1{,}57079$$

$$\tfrac{1}{2}\pi + \omega = 1{,}61908 = \sigma + \delta$$

$$\text{Aber } \delta = 0{,}24812 \text{ folglich}$$

$$\sigma = 1{,}37096$$

(wozu ein Winkel von $78^\circ\ 33'$ stimmt.)

Anmerk. Für den Fall, daß

σ kleiner als 1 oder kleiner als 57 Grad

ist, kann man durch folgende Betrachtung einen Werth für σ erhalten:

Es ist *)

$$\mathrm{Cos}\,(\delta+\rho) = \mathrm{Cos}\,\delta - \rho\,\mathrm{Sin}\,\delta - \tfrac{1}{2}\rho^2\,\mathrm{Cos}\,\delta + \tfrac{1}{6}\rho^3\,\mathrm{Sin}\,\delta + \tfrac{1}{24}\rho^4\,\mathrm{Cos}\,\delta - \ldots.$$

behält man die drei ersten Glieder dieser Reihe bei, weil die übrigen schon merklich abnehmen, so verwandelt sich die Hauptgleichung in folgende

$$\rho\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}\,\delta - \rho\,\mathrm{Sin}\,\delta - \tfrac{1}{2}\rho^2\,\mathrm{Cos}\,\delta = \mathrm{Cos}\,\delta - \frac{b\,\mathrm{Cos}\,\delta}{2R} - \frac{a\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{2R}$$

und man findet, wenn die Glieder welche sich aufheben weggelassen werden, den Bogen

$$\rho = \sqrt{\left[\frac{b + a\,\mathrm{Tgt}\,\beta\,\mathrm{Sec}\,\delta}{R}\right]}$$

Für die Voraussetzung

$$\rho = \tfrac{1}{2}\pi + \omega$$

erhält man durch ähnliche Betrachtungen

$$\mathrm{Cos}(\delta+\rho) = \mathrm{Cos}(\delta+\tfrac{1}{2}\pi) - \omega\,\mathrm{Sin}(\delta+\tfrac{1}{2}\pi) - \tfrac{1}{2}\omega^2\,\mathrm{Cos}(\delta+\tfrac{1}{2}\pi) = -\,\mathrm{Sin}\,\delta - \omega\,\mathrm{Cos}\,\delta + \tfrac{1}{2}\omega^2\,\mathrm{Sin}\,\delta$$

Diesen Werth in die Hauptgleichung S. 421 gesetzt, und $\frac{1}{2}\pi + \omega$ statt ρ eingeführt, giebt ω, woraus $\rho = \frac{1}{2}\pi + \omega$ durch nachstehenden Ausdruck gefunden wird

$$\rho = 0{,}57079 + \mathrm{Cot}\,\delta - \sqrt{\left[\mathrm{Cot}\,\delta^2 - \frac{b}{R}\,\mathrm{Cot}\,\delta - \frac{a\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{R\,\mathrm{Sin}\,\delta} - 0{,}14159\right]}$$

263. §.

Weil l′ mit t (Figur 36) in einerlei Horizontalebene liegt (262. §.), so ist in l′ das Ende der centrischen Linie des wasserhaltenden Bogens, wozu in der Grundfläche der Punkt q′ gehört. Für den wasserhaltenden Bogen SFl′ ist VBq′ der da- XIV. F. 36.

---

*) L. Euler, angef. Vollständige Anleitung zur Differentialrechnung. 2ter Th. Berlin 1790. 95. §.

T. IV. F. 36. zugehörige Bogen in der Grundfläche, und wenn man für den Halbmesser = 1 den zu A'QVBq'
λ gehörigen Bogen = λ setzt, so ist der senkrechte Abstand des Punkts l' von der Horizontalebene EE' oder (256 §.)

$$l'w' = R\lambda \operatorname{Tgt}\alpha \operatorname{Sin}\beta + R(1 + \operatorname{Cos}\lambda)\operatorname{Cos}\beta + \tfrac{1}{2} a \operatorname{Sin}\beta$$

$$\text{Aber } l'w' = tx$$

daher wenn die hiefür gefundenen Werthe gesetzt, durch R Cos β dividirt und

$$\operatorname{Tgt}\alpha \operatorname{Tgt}\beta = \operatorname{Sin}\delta$$

(259. §) gesetzt wird, so ist nach gehöriger Zusammenziehung

$$\lambda \operatorname{Sin}\delta + \operatorname{Cos}\lambda = \delta \operatorname{Sin}\delta + \operatorname{Cos}\delta - \frac{b \operatorname{Cos}\delta}{2R} - \frac{a \operatorname{Tgt}\beta}{2R}$$

oder 262. §.

$$\lambda \operatorname{Sin}\delta + \operatorname{Cos}\lambda = B$$

und man findet auf eine ähnliche Art wie 261. §.

$$\lambda = 3{,}1416 - \operatorname{Sin}\delta + \sqrt{[2 + 2B + \operatorname{Sin}\delta^2 - 6{,}283 \operatorname{Sin}\delta]}$$

Wenn nun λ und σ bekannt sind, so erhält man die Länge des wasserhaltenden Bogens

L $$L = R(\lambda - \sigma - \delta)\operatorname{Sec}\alpha$$

f und wenn f = a.b den Inhalt vom Querschnitte
M' einer Windung, und M' den körperlichen Inhalt des wasserhaltenden Bogens bezeichnet, so ist die bei jeder Umdrehung geschöpfte Wassermenge

$$M' = f.L = f.R(\lambda - \sigma - \delta)\operatorname{Sec}\alpha$$

vorausgesetzt daß bei der Schnecke der Wasserspiegel genau bis an den Normalpunkt (259. §) reiche, die Umdrehungen nicht zu schnell geschehen, damit sich der wasserhaltende Bogen füllen kann und alles an der Maschine vollkommen dicht sei,



weil sonst ein Theil des geschöpften Wassers verloren geht.

Ist m die Anzahl der Umläufe der Spindel in einer Minute, so findet man die Wassermenge in jeder Minute m

$$M = m . f . L$$ M

und wenn t die Umlaufszeit der Spindel bezeichnet, so ist auch t

$$M = \frac{60}{t} f . L$$

Hat die Spindel mehrere Schneckengänge, so muß diese Wassermenge noch mit der Anzahl der Gänge multiplizirt werden.

Den Normalpunkt G in der Grundfläche findet man, wenn von q auf aB′ eine senkrechte Linie qG gezogen wird. Denn offenbar, wenn der Wasserspiegel bis an den Punkt q reicht, wird sich der wasserhaltende Bogen genau füllen, und die zwischen den Wasserbögen erforderliche Luft eintreten kann, welches dadurch einleuchtend wird, wenn man sich den Punkt t in q denkt. T. IV. F. 36.

Weil dem Bogen aq der Winkel δ zugehört, so ist für der Spindel Halbmesser $Oa = \varrho$ ϱ

$$aG = \varrho \text{ Sin.vers} \delta$$

und weil $a'a = b$, so findet man die Entfernung des Normalpunkts G vom höchsten Punkte a′ in der Grundfläche oder

$$a'G = b + \varrho \text{ Sin.vers} \delta$$

Beispiel. Für eine Schnecke von zwei Windungen sei der Windungswinkel $\alpha = 11° 39'$, der Neigungswinkel $\beta = 50°$; der Halbmesser der centrischen Linie $R = 2{,}16$, die Höhe der Windungsweite $a = 1{,}15$ und die Breite derselben $b = 1{,}62$ Zoll, man sucht die Wassermenge welche die Schnecke bei jeder Umdrehung ausgießt und die Lage des Normalpunkts.

$$\mathrm{Tgt}\,\alpha\ \mathrm{Tgt}\,\beta = 0{,}24572 = \mathrm{Sin}\,\delta = \mathrm{Sin}\,14^\circ\,13'$$

$$\mathrm{Cos}\,\delta = 0{,}96937$$

$$\text{Bogen}\ \delta = 0{,}24812$$

$$B = 0{,}96937 - 0{,}36351 - 0{,}31725 + 0{,}06096 = 0{,}34957$$

$$\lambda = 3{,}1416 - 0{,}24572 + 1{,}10252 = 3{,}99840$$

Nach 262. §. ist

$$\sigma + \delta = 1{,}61908 \text{ also}$$

$$L = \lambda - \sigma - \delta = 2{,}37932$$

daher der Inhalt eines wasserhaltenden Bogen

$$M' = 1{,}15 \,.\, 1{,}62 \,.\, 2{,}16 \,.\, 2{,}37932 \,.\, \mathrm{Sec.}\,\alpha = 9{,}776\ \text{K. Z.}$$

folglich die bei jeder Umdrehung ausgegossene Wassermenge

$$2 \,.\, 9{,}776 = 19{,}55 \text{ Kubikzoll.}$$

Für die Entfernung des Normalpunkts vom höchsten Punkte der Grundfläche findet man, weil $\varrho = R - \frac{1}{2}\,b = 1{,}35$

$$1{,}62 + 1{,}35\ \text{Sin.vers}\,\delta = 1{,}6613 \text{ Zoll.}$$

264. §.

Es wäre zu wünschen, daß man sehr ins Große gehende Versuche hätte, mit welchen die vorstehende Theorie verglichen werden könnte. Herr Professor Hennert in seiner Preißschrift *) führt zwar Versuche an, welche mit drei großen Schnecken in Holland gemacht worden sind, es fehlen aber mehrere

---

*) Dissertation sur la Vis d'Archimede, qui a remporté le prix de mathématique adjugé par l'academie roy. des sciences et belles-lettres de Prusse, en 1766. par M. I. F. *Hennert*. à Berlin 1767. (Diese Piece ist mit einer andern sur la Nutrition zusammengedruckt, welche vorhergeht, wonach sich auch die angeführte Seitenzahl richtet.)

Größen, welche auf die genaue Bestimmung der Wassermenge Einfluß haben; dabei widersprechen die Angaben auf der 82sten Seite, den auf der 84sten Seite befindlichen, und man findet nicht genau angegeben, wie tief der Mittelpunkt der Einflußöfnung unter dem Wasser gestanden hat. Diese Umstände, und noch weit mehr Erinnerungen welche Herr Karsten gegen diese Versuche macht, haben mich bewogen, von einer Wasserschnecke ein hölzernes Modell von beträchtlicher Größe, mit allem möglichen Fleiße, unter meiner Aufsicht verfertigen zu lassen, das in allen seinen Theilen mit derjenigen Genauigkeit vollendet ist, welche die Theorie fordert, und womit in Gegenwart des Königl. Professors Herrn Hobert nachstehende Versuche angestellt sind, bei welchen die Zeiten mit einem Sekundenpendel bemerkt wurden.

Die Schnecke war nach Art der Tonnenmühlen gearbeitet; um eine 2,7 Zoll dicke Spindel gingen 18 Windungen. Die Breite der Schneckenbretter vom Umfange der Spindel bis zur Bekleidung, oder die Breite der Windungsweite, war 1,62 Zoll, so daß der Durchmesser der Schnecke im lichten 5,94 Zoll betrug. Die Schneckenbretter hatten eine Dicke von $\frac{1}{4}$ Zoll, und bei zwei Einflußöfnungen oder doppelten Windungen, war die Höhe einer Windungsweite 1,15 Zoll und die Höhe des Schneckenganges 2,8 Zoll.

Die Grundfläche der Schnecke wurde durch eine Kreislinie an der Umfassung der Schnecke bemerkt, die so eingetheilt war, daß dadurch ein Durchmesser der Grundfläche gleiche Abtheilungen erhielte, wodurch man jedesmal genau den Stand des Wasserspiegels gegen die Grundfläche angeben konnte, wenn der höchste Punkt des Durchmessers, der hier 0 ist, so stand, daß zwei zusammengehörige Punkte der Kreislinie am Umfange, in die Ebene des Wasserspiegels fielen. Die Schnecke wurde in ein

sehr weites Gefäß mit Wasser unter einem Neigungswinkel von $50° = \beta$ gesetzt, und bei jedem Versuche suchte man den Wasserspiegel durch Zugießen auf einerlei Höhe zu erhalten. Glückte dieses nicht ganz, so wurde das Mittel zwischen dem anfänglichen und folgenden Wasserstande genommen und in der zweiten vertikalen Reihe der nachstehenden Tafel dergestalt bemerkt, daß die negativen Entfernungen, die Höhen des Wasserpiegels über 0, die positiven Entfernungen aber, den Abstand des Wasserspiegels unter 0 auf dem höchsten Durchmesser der Grundfläche gemessen, anzeigen. In der dritten Reihe der Tafel befindet sich die Anzahl der beobachteten Umdrehungen der Kurbel, welche sich an der Spindel der Schnecke befand, um ein Gefäß von ½ Kubikfuß genau mit Wasser anzufüllen. Die vierte Reihe enthält die während dieser Zeit nach einem genauen Sekundenpendel beobachtete Sekunden. Endlich ist die fünfte und sechste Reihe aus den beiden vorhergehenden berechnet, um die Versuche besser zu übersehen.

Versuche mit der Wasserschnecke.

Nro.	Entfernung vom höchsten Punkte in der Grundfläche. Zoll.	Anzahl der Umdrehungen der Kurbel.	Zeit in der 864 Kubikzoll Wasser ausliefen Sekunden.	Wassermenge bei einer Umdrehung. Kubikzoll.	Umdrehungen der Schnecke in 1 Minute.
1	— 2,5	55	146	15,7	22
2		58	85	14,9	41
3		59	71	14,6	49
4		61	72	14,1	51
5		66	53	13,1	74
6		79	39	10,9	121
7	— 1,7	60	66	1[illegible],4	54
8	— 1,4	60	98	1[illegible],4	37
9	— 1,2	57	66	1[illegible],6	49
10	— 1,1	54	75	16,0	4[illegible]
11		59	64	14,6	[illegible]6
12	— 1,0	56	58	15,4	5[illegible]
13	— 0,6	58	70	14,9	50
14	— 0,2	57	74	15,1	46
15		56	61	15,4	55
16	+ 0,1	53	64	16,[illegible]	49
17	+ 0,2	6[illegible]	43	13,9	[illegible]6
18	+ 0,3	60	53	14,4	68
19	+ 0,5	52	96	16,0	32
20		53	64	16,3	49
21	+ 0,8	50	94	17,3	32
22		60	50	14,4	72
23		61	48	14,[illegible]	76
24	+ 0,9	60	50	14,4	72
25		61	46	1[illegible],1	74
26	+ 1,0	51	82	16,9	37
27		56	52	15,4	64
28		57	49	15,1	70
29		58	48	14,9	72
30	+ 1,1	49	101	17,6	29
31		48	87	18,0	33
32		49	56	17,6	52
33		49	44	17,6	67
34		59	37	14,6	96
35		59	46	[illegible]	[illegible]

sehr weites Gefäß mit Wasser unter einem Neigungswinkel von $50° = \beta$ gesetzt, und bei jedem Versuche suchte man den Wasserspiegel durch Zugießen auf einerlei Höhe zu erhalten. Glückte dieses nicht ganz, so wurde das Mittel zwischen dem anfänglichen und folgenden Wasserstande genommen und in der zweiten vertikalen Reihe der nachstehenden Tafel dergestalt bemerkt, daß die negativen Entfernungen, die Höhen des Wasserpiegels über o, die positiven Entfernungen aber, den Abstand des Wasserspiegels unter o auf dem höchsten Durchmesser der Grundfläche gemessen, anzeigen. In der dritten Reihe der Tafel befindet sich die Anzahl der beobachteten Umdrehungen der Kurbel, welche sich an der Spindel der Schnecke befand, um ein Gefäß von ½ Kubikfuß genau mit Wasser anzufüllen. Die vierte Reihe enthält die während dieser Zeit nach einem genauen Sekundenpendel beobachtete Sekunden. Endlich ist die fünfte und sechste Reihe aus den beiden vorhergehenden berechnet, um die Versuche besser zu übersehen.

Versuche mit der Wasserschnecke.

Nro.	Entfernung vom höchsten Punkte in der Grundfläche. Zoll.	Anzahl der Umdrehungen der Kurbel.	Zeit in der 864 Kubikzoll Wasser ausliefen Sekunden.	Wassermenge bei einer Umdrehung. Kubikzoll.	Umdrehungen der Schnecke in 1 Minute.
1	— 2,5	55	146	15,7	22
2		58	85	14,9	41
3		59	71	14,6	49
4		61	72	14,1	51
5		66	53	13,1	74
6		79	39	10,9	121
7	— 1,7	60	66	1[illegible],4	54
8	— 1,4	60	68	1[illegible],4	37
9	— 1,2	57	66	1[illegible],6	49
10	— 1,1	54	75	16,0	41
11		59	64	14,6	[illegible]6
12	— 1,0	56	58	15,4	58
13	— 0,6	58	70	14,9	50
14	— 0,2	57	74	15,1	46
15		56	61	15,4	55
16	+ 0,1	53	64	16,[illegible]	49
17	+ 0,2	62	43	13,9	[illegible]6
18	+ 0,3	60	53	14,4	68
19	+ 0,5	52	90	16,0	32
20		53	64	16,3	49
21	+ 0,8	50	94	17,3	32
22		60	50	14,4	72
23		61	48	14,[illegible]	76
24	+ 0,9	60	50	14,4	72
25		61	46	1[illegible],1	74
26	+ 1,0	51	62	16,9	37
27		56	52	15,4	64
28		57	49	15,1	70
29		58	48	14,9	72
30	+ 1,1	49	101	17,6	29
31		48	87	18,0	33
32		49	56	17,6	52
33		49	44	17,6	67
34		59	37	14,6	96
35		59	46	14,6	109

265 §.

Um auch in Absicht der Wasserschraube einige Versuche anzustellen und die vorhergehenden allgemeinen Untersuchungen mit den Erfahrungen zu vergleichen, konnte man sich keines so großen Modells wie bei der Wasserschnecke bedienen, sondern es mußte hiezu ein kleineres sehr genau gearbeitetes Modell benutzt werden, welches sich bei der Königl. Bauakademie befindet, drei Gänge hat, und mit einem Vorgelege versehen ist, wodurch auf zwei Umdrehungen der Kurbel, drei Umdrehungen der Schnecke kommen.

Die Abmessungen dieses Modells sind folgende: Durchmesser der ganzen Schraube $2\frac{5}{8}$ Zoll; Dicke der Spindel $\frac{7}{8}$ Zoll; Breite der Schraubenbretter oder Breite der Windung $\frac{7}{8}$ Zoll; Höhe der Windungsweite $\frac{7}{8}$ Zoll; Dicke der Schraubenbretter etwa $\frac{1}{8}$ Zoll; Höhe des Schraubenganges 3 Zoll; ganze Länge der Schraube 18 Zoll.

Der Untertheil der Schraube wurde in ein Behältniß mit Wasser so gestellt, daß immer wenigstens eine Windung sich unter dem Wasser befand, und die Schraubenaxe hatte in allen Versuchen gegen den Wasserspiegel, eine Neigung von 30 Grad $= \beta$. Das Gefäß in welchem das geschöpfte Wasser aufgefangen wurde, enthielt genau 200 Kubikzolle; die verflossene Zeit ist mittelst eines Sekundenpendels gezählt.

Nro.

No. der Versuche.	Umdrehungen der Kurbel.	Zeit in welcher 200 K. Zoll Wasser ausliefen. Sekunden.	Wassermenge bei einer Umdrehung der Schraube. Kubikzoll.	Umläufe der Schraube in 1 Minute
1	124	260	1,07	43
2	80	137	1,66	52
3	49	49	2,72	90
4	45	40	2,90	101
5	40	29	3,33	124
6	37	21	3,60	159
7	38	18	3,51	190
8	39	18	3,42	195
9	44	18	3,02	220
10	51	17	2,61	270
11	150	42	0,89	321

Bei sehr wenig Umdrehungen in einer Minute wurde gar kein Wasser zum Auslaufen gebracht, obgleich der Spielraum zwischen dem Kumm und den Schraubenbrettern äußerst geringe und alles gut cylindrisch abgedreht war. Man konnte die Anzahl der Umdrehungen der Kurbel bis auf 10 in 32 Sekunden vermehren, und erhielt noch kein Wasser, bei einer wenig größern Geschwindigkeit fing dasselbe aber an, tropfenweise auszufließen. Hienach läßt sich annehmen daß die Schraube bei 28 Umdrehungen in der Minute noch kein Wasser giebt.

In der vorstehenden Tafel sind die beiden letzten vertikalen Reihen aus den nebenstehenden Beobachtungen berechnet, wobei zu bemerken ist, daß zwei Umdrehungen der Kurbel auf drei Umläufe der Schraube kommen. Auch geht daraus hervor, daß die größte Wassermenge erhalten wird, wenn die Schraube in der Minute etwa 159 Umläufe macht, und daß mehr oder weniger Umläufe eine geringere Wassermenge geben, welches sich auch leicht erklären läßt, weil im ersten Falle, das nicht schnell genug aus dem Sumpfe fol-

No. der Versuche.	Umdrehungen der Kurbel.	Zeit in welcher 200 K. Zoll Wasser ausliefen. Sekunden.	Wassermenge bei einer Umdrehung der Schraube. Kubikzoll.	Umläufe der Schraube in 1 Minute
1	124	260	1,07	43
2	80	137	1,66	52
3	49	49	2,72	90
4	45	40	2,96	101
5	40	29	3,33	124
6	37	21	3,60	159
7	38	18	3,51	190
8	39	18	3,42	195
9	44	18	3,02	220
10	51	17	2,61	270
11	150	42	0,89	321

Bei sehr wenig Umdrehungen in einer Minute wurde gar kein Wasser zum Auslaufen gebracht, obgleich der Spielraum zwischen dem Kumm und den Schraubenbrettern äußerst geringe und alles gut cylindrisch abgedreht war. Man konnte die Anzahl der Umdrehungen der Kurbel bis auf 10 in 32 Sekunden vermehren, und erhielt noch kein Wasser, bei einer wenig größern Geschwindigkeit fing dasselbe aber an, tropfenweise auszufließen. Hienach läßt sich annehmen daß die Schraube bei 28 Umdrehungen in der Minute noch kein Wasser giebt.

In der vorstehenden Tafel sind die beiden letzten vertikalen Reihen aus den nebenstehenden Beobachtungen berechnet, wobei zu bemerken ist, daß zwei Umdrehungen der Kurbel auf drei Umläufe der Schraube kommen. Auch geht daraus hervor, daß die größte Wassermenge erhalten wird, wenn die Schraube in der Minute etwa 159 Umläufe macht, und daß mehr oder weniger Umläufe eine e Wassermenge geben, welches sich auch klären läßt, weil im ersten Falle, das icht schnell genug aus dem Sumpfe fol-

Fortsetzung.

Nro.	Entfernung vom höchsten Punkte in der Grundfläche. Zoll.	Anzahl der Umdrehungen der Kurbel.	Zeit in der 864 Kubikzoll Wasser ausliefen. Sekunden.	Wassermenge bei einer Umdrehung. Kubikzoll.	Umdrehungen der Schnecke in 1 Minute.
36	+ 1,2	50	62	17,3	48
37		56	46	15,4	73
38		61	46	14,1	79
39	+ 1,3	46	33	18,8	83
40		49	29	17,6	101
41		72	36	12,0	120
42		73	36	11,8	122
43	+ 1,4	56	61	15,4	55
44		56	47	15,4	71
45		53	43	16,3	74
46		55	40	15,7	82
47	+ 1,5	54	39	16,0	83
48	+ 1,6	52	43	16,6	72
49		46	31	18,8	89
50	+ 1,7	48	51	18,0	56
51		46	46	18,8	60
52		45	37	19,2	73
53		44	31	19,6	85
54		44	27	19,6	98
55		46	23	18,8	120
56	+ 1,8	47	49	18,4	57
57		46	38	18,8	73
58		45	28	19,2	96
59		48	26	18,0	111
60		49	23	17,6	128
61	+ 1,9	48	48	18,0	60
62		48	39	18,0	74
63	+ 2,0	49	40	17,6	73
64		47	29	18,4	97
65	+ 2,1	50	24	17,3	125
66	+ 2,2	49	34	17,6	86
67		50	27	17,3	111
68		51	24	16,9	127
69		66	30	13,1	132
70	+ 2,4	84	112	10,2	45
71		51	44	16,9	69
72		50	38	17,3	79
73		54	28	16,0	116
74	+ 3,0	123	165	7,0	44

Als bei dem Wasserstande — 1,5 Zoll, die Kurbel so schnell umgedreckt wurde, daß 56 Umdrehungen in 23 Sekunden, oder in der Minute 146 Umdrehungen erfolgten, so hörte der Ausfluß des Wassers auf. Eben dies erfolgte bei einem Wasserstande von + 1,3 wenn die Schnecke in einer Minute 150 Umläufe machte.

Aus den vorstehenden Versuchen ergiebt sich, daß es für einen jeden Wasserstand in Bezug auf die Grundfläche der Schnecke, eine Geschwindigkeit giebt, bei welcher die größte Wassermenge für diesen Wasserstand erhalten wird. Als der Wasserspiegel 1,7 Zoll unter dem höchsten Punkte der Grundfläche stand, war bei 85 und 98 Umdrehungen in der Minute, die größte Wassermenge unter allen Versuchen auf eine Umdrehung

19,6 Kubikzoll.

Nach dem im vorigen §. berechneten Beispiele, giebt die Theorie für diesen Fall

19,55 Kubikzoll;

welches eine unerwartete Übereinstimmung ist.

In Absicht des Normalpunkts giebt die Theorie nach dem vorigen §. 1,66 Zoll und die Versuche geben 1,7 Zoll, welches so genau wie möglich stimmt.

Hiedurch wird es aber eben so wie 259. §. bei den kleinen Versuchen mit der gläsernen Schnecke einleuchtend, wie wichtig es sei, daß das Wasser gegen den Normalpunkt stehe, nud man kann sich hieraus sehr gut erklären, wie es möglich war, daß die Schnecken in so üblen Ruf gekommen sind und man Statt ihrer, lieber die unvollkommnern Wasserschrauben wählte, weil man bei erstern die Stellung des Wasserspiegels gegen den Normalpunkt vernachläßigte, worauf man bei letztern nicht Rücksicht zu nehmen hat.

Fortsetzung.

Nro.	Entfernung vom höchsten Punkte in der Grundfläche. Zoll.	Anzahl der Umdrehungen der Kurbel.	Zeit in der 864 Kubikzoll Wasser ausliefen. Sekunden.	Wassermenge bei einer Umdrehung. Kubikzoll.	Umdrehungen der Schnecke in 1 Minute.
36	+ 1,2	50	62	17,3	48
37		56	46	15,4	73
38		61	46	14,1	79
39	+ 1,3	46	33	18,8	83
40		49	29	17,6	101
41		72	36	12,0	120
42		73	36	11,8	122
43	+ 1,4	56	61	15,4	55
44		56	47	15,4	71
45		53	43	16,3	74
46		55	40	15,7	82
47	+ 1,5	54	39	16,0	83
48	+ 1,6	52	43	16,6	72
49		46	31	18,8	89
50	+ 1,7	48	51	18,0	56
51		46	46	18,8	60
52		45	37	19,2	73
53		44	31	19,6	85
54		44	27	19,6	98
55		46	23	18,8	120
56	+ 1,8	47	49	18,4	57
57		46	38	18,8	73
58		45	28	19,2	96
59		48	26	18,0	111
60		49	23	17,6	128
61	+ 1,9	48	48	18,0	60
62		48	39	18,0	74
63	+ 2,0	49	40	17,6	73
64		47	29	18,4	97
65	+ 2,1	50	24	17,3	125
66	+ 2,2	49	34	17,6	86
67		50	27	17,3	111
68		51	24	16,9	127
69		66	30	13,1	132
70	+ 2,4	84	112	10,2	45
71		51	44	16,9	69
72		50	38	17,3	79
73		54	28	16,0	116
74	+ 3,0	123	165	7,0	44

Als bei dem Wasserstande — 1,5 Zoll, die Kurbel so schnell umgedreckt wurde, daß 56 Umdrehungen in 23 Sekunden, oder in der Minute 146 Umdrehungen erfolgten, so hörte der Ausfluß des Wassers auf. Eben dies erfolgte bei einem Wasserstande von + 1,3 wenn die Schnecke in einer Minute 150 Umläufe machte.

Aus den vorstehenden Versuchen ergiebt sich, daß es für einen jeden Wasserstand in Bezug auf die Grundfläche der Schnecke, eine Geschwindigkeit giebt, bei welcher die größte Wassermenge für diesen Wasserstand erhalten wird. Als der Wasserspiegel 1,7 Zoll unter dem höchsten Punkte der Grundfläche stand, war bei 85 und 98 Umdrehungen in der Minute, die größte Wassermenge unter allen Versuchen auf eine Umdrehung

19,6 Kubikzoll.

Nach dem im vorigen §. berechneten Beispiele, giebt die Theorie für diesen Fall

19,55 Kubikzoll;

welches eine unerwartete Übereinstimmung ist.

In Absicht des Normalpunkts giebt die Theorie nach dem vorigen §. 1,66 Zoll und die Versuche geben 1,7 Zoll, welches so genau wie möglich stimmt.

Hiedurch wird es aber eben so wie 259. §. bei den kleinen Versuchen mit der gläsernen Schnecke einleuchtend, wie wichtig es sei, daß das Wasser gegen den Normalpunkt stehe, und man kann sich hieraus sehr gut erklären, wie es möglich war, daß die Schnecken in so üblen Ruf gekommen sind und man Statt ihrer, lieber die unvollkommnern Wasserschrauben wählte, weil man bei erstern die Stellung des Wasserspiegels gegen den Normalpunkt vernachläßigte, worauf man bei letztern nicht Rücksicht zu nehmen hat.

265 §.

Um auch in Absicht der Wasserschraube einige Versuche anzustellen und die vorhergehenden allgemeinen Untersuchungen mit den Erfahrungen zu vergleichen, konnte man sich keines so großen Modells wie bei der Wasserschnecke bedienen, sondern es mußte hiezu ein kleineres sehr genau gearbeitetes Modell benutzt werden, welches sich bei der Königl. Bauakademie befindet, drei Gänge hat, und mit einem Vorgelege versehen ist, wodurch auf zwei Umdrehungen der Kurbel, drei Umdrehungen der Schnecke kommen.

Die Abmessungen dieses Modells sind folgende: Durchmesser der ganzen Schraube $2\frac{5}{8}$ Zoll; Dicke der Spindel $\frac{7}{9}$ Zoll; Breite der Schraubenbretter oder Breite der Windung $\frac{7}{8}$ Zoll; Höhe der Windungsweite $\frac{7}{9}$ Zoll; Dicke der Schraubenbretter etwa $\frac{1}{8}$ Zoll; Höhe des Schraubenganges 3 Zoll; ganze Länge der Schraube 18 Zoll.

Der Untertheil der Schraube würde in ein Behältniß mit Wasser so gestellt, daß immer wenigstens eine Windung sich unter dem Wasser befand, und die Schraubenaxe hatte in allen Versuchen gegen den Wasserspiegel, eine Neigung von 30 Grad $= \beta$. Das Gefäß in welchem das geschöpfte Wasser aufgefangen wurde, enthielt genau 200 Kubikzolle; die verflossene Zeit ist mittelst eines Sekundenpendels gezählt.

Nro.

No. der Versuche.	Umdrehungen der Kurbel.	Zeit in welcher 200 K. Zoll Wasser ausliefen. Sekunden.	Wassermenge bei einer Umdrehung der Schraube. Kubikzoll.	Umläufe der Schraube in 1 Minute
1	124	260	1,07	43
2	80	137	1,66	52
3	49	49	2,72	90
4	45	40	2,90	101
5	40	29	3,33	124
6	37	21	3,60	159
7	38	18	3,51	190
8	39	18	3,42	195
9	44	18	3,02	220
10	51	17	2,61	270
11	150	42	0,8	321

Bei sehr wenig Umdrehungen in einer Minute wurde gar kein Wasser zum Auslaufen gebracht, obgleich der Spielraum zwischen dem Kumm und den Schraubenbrettern äußerst geringe und alles gut cylindrisch abgedreht war. Man konnte die Anzahl der Umdrehungen der Kurbel bis auf 10 in 32 Sekunden vermehren, und erhielt noch kein Wasser, bei einer wenig größern Geschwindigkeit fing dasselbe aber an, tropfenweise auszufließen. Hienach läßt sich annehmen daß die Schraube bei 28 Umdrehungen in der Minute noch kein Wasser giebt.

In der vorstehenden Tafel sind die beiden letzten vertikalen Reihen aus den nebenstehenden Beobachtungen berechnet, wobei zu bemerken ist, daß zwei Umdrehungen der Kurbel auf drei Umläufe der Schraube kommen. Auch geht daraus hervor, daß die größte Wassermenge erhalten wird, wenn die Schraube in der Minute etwa 159 Umläufe macht, und daß mehr oder weniger Umläufe eine geringere Wassermenge geben, welches sich auch leicht erklären läßt, weil im ersten Falle, das Wasser nicht schnell genug aus dem Sumpfe fol-

gen kann, im letzten Falle aber, zu viel Wasser während einer Umdrehung durch den Spielraum verloren geht.

266. §.

Um eine Vergleichung anzustellen, wie die Theorie 263. § mit diesen Erfahrungen bei der Wasserschraube übereinstimmt, kann nachstehende Berechnung dienen.

Es ist $R = a = b = \frac{7}{8}$ Zoll

$$\alpha = 28^\circ\ 37'$$

$$\beta = 30^\circ$$

$$T = 0{,}31500 = \operatorname{Sin}\delta = \operatorname{Sin} 18^\circ\ 22'$$

$$\operatorname{Cos}\delta = 0{,}94906$$

$$\text{Bogen}\ \delta = 0{,}32055$$

$$B = 0{,}94906 - 0{,}47453 - 0{,}28867 + 0{,}10097$$

$$= 0{,}28683$$

$$\lambda = 3{,}1416 - 0{,}31500 + \sqrt{0{,}69375}$$

$$= 3{,}65952$$

$$\operatorname{Sin}\omega = \frac{0{,}20796}{0{,}68500} = 0{,}30359 = \operatorname{Sin} 17^\circ\ 40'$$

also $\omega = 0{,}30833$ daher

$$\sigma + \delta = 1{,}57079 + 0{,}30833 = 1{,}87912$$

$$L = \lambda - \sigma - \delta = 1{,}78040$$

also die auf jeden Gang kommende Wassermenge

$M' = \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot 1{,}7804 \cdot \operatorname{Sec}\alpha = 1{,}3587$ Kubikzoll

folglich kommen auf jede Umdrehung

$3 \cdot 1{,}3587 = 4{,}076$ Kubikzoll.

Die gesammte Wassermenge welche nach der Berechnung mittelst dreier Gänge gehoben wird, vorausgesetzt daß kein Wasser durch den Spiel-

raum verloren geht, ist daher 4,076 Kubikzoll, die Erfahrung giebt 3,6 Kubikzoll; weshalb durch die Spielräume 0,476 Kubikzoll Wasser bei jeder Umdrehung verloren gehen.

Um diesen Wasserverlust einigermaßen in Rechnung zu bringen, kann man folgende Schlüsse machen. Bei 28 Umdrehungen in 60 Sekunden giebt die Schraube noch kein Wasser, es muß also bei jeder Umdrehung in $\frac{60}{28} = \frac{15}{7}$ Sekunden die gehobene Wassermenge $= 4,076$ Kubikzoll verloren gehen. Für die größte Wassermenge werden 159 Umdrehungen in 60 Sekunden erfordert, also erfolgt eine Umdrehung in $\frac{60}{159} = \frac{20}{53}$ Sekunden. Wenn nun bei einer Umdrehung in $\frac{15}{7}$ Sekunden 4,076 Kubikzoll Wasser verloren gehen, so wird in $\frac{20}{53}$ Sekunden die Wassermenge $\frac{7}{15} \cdot \frac{20}{53} \cdot 4,076 = 0,717$ Kubikzoll ablaufen. Wird diese zu der ausgeflossenen Wassermenge hinzugesetzt, so giebt

die Erfahrung 4,317 Kubikzoll,

die Theorie 4,076 Kubikzoll,

welches auch hier eine ziemliche Übereinstimmung ist, daher mit Rücksicht auf den Spielraum bei Schrauben, die allgemeinen Ausdrücke 262. und 263. §. sowohl auf Wasserschnecken als auf Wasserschrauben anwendbar sind.

Es ist zu merken, daß sonst bei den Schrauben der Wasserverlust nach Verhältniß der gehobenen Wassermenge weit größer ist, weil sich bei großen Maschinen selten die Genauigkeit wie bei einem Modelle erhalten läßt. Auch schlossen die Schraubengänge bei dem Modell so dicht an den Kumm, daß ein Klemmen entstand, und zur Überwältigung desselben eine merkliche Kraft verwandt werden mußte. Mit einem andern Modell, welches zwar einen geringen Spielraum hatte, und wo die Schraube ohne Reibung am Kumm umgedreht werden konnte, wurden ebenfalls Versuche ange-

stellt, und man fand den Wasserverlust, beinahe dem vierten Theile der zu hebenden Wassermenge gleich.

267. §.

Aus den vorhergehenden Untersuchungen geht so viel hervor, daß bei einem unveränderlichen Wasserstande des Sumpfs, unter übrigens gleichen Umständen, die Wasserschnecke auf alle Weise der Wasserschraube vorzuziehen ist, so bald nur der Wasserspiegel gegen den Normalpunkt der Schnecke stehet. Denn unter gleichen Umständen verursacht die stärkere Spindel der Schraube, und noch mehr die beträchtliche Reibung der Schraubenbretter am Kumm, einen bedeutenden Widerstand, auch geht noch ein ansehnlicher Theil des gehobenen Wassers verloren, welches bei einer gut gearbeiteten Schnecke nicht der Fall ist.

Wäre hingegen der Wasserspiegel veränderlich und man könnte nicht die Einrichtung treffen, daß die Einflußöfnung der Schnecke verhältnißmäßig erhöhet oder erniedrigt werden könnte, so wird die Wassermenge bei der Schnecke ansehnlich vermindert, und wenn bei einer Schraube der Spielraum nicht zu groß ist, diese immer bei einem veränderlichen Wasserspiegel, der Schnecke vorzuziehen seyn, da solche bei jeder Stellung ihres Untertheils, die nöthige Wassermenge schöpfen kann und die Luft freien Zutritt hat, welches bei einer tiefstehenden Schnecke nicht der Fall ist, weil alsdann keine Luft geschöpft wird, sondern von oben nach unten treten muß, wodurch die Fortbewegung des Wassers verhindert wird Bei der Schraube muß aber auch vorausgesetzt werden, daß ihr Normalpunkt unter dem Wasserspiegel liege; wie tief, ist gleichgültig, weil das Wasser hier, gegen jede Windung gleiche Lage hat. Auch läßt sich wohl mit der Schnecke, aber nicht mit der Schraube unreines Wasser schöpfen.

Gewöhnlich stellt man die Schnecken so, daß ihre Axe mit dem Horizont einen Winkel von 45 bis 60 Grad, die Schrauben aber einen Winkel von 30 Grad einschließen. Bei einigermaßen beträchtlichen Höhen, wird aber eine Spiralpumpe, welche nach Art der Tonnenmühlen, mit zwei bis drei Gängen verfertiget werden kann, den Schnecken und Schrauben vorzuziehen seyn.

Eine Erweiterung der Einflußöfnung bei der Schnecke, kann in so fern von Nutzen seyn, als bei einer schnellen Bewegung, das Wasser leichter einfließt und weniger Contraction leidet, so wie eben dasselbe von der Wasserschraube gilt. Ich behalte es mir vor, hierüber besondere Modelle verfertigen zu lassen, damit Versuche anzustellen und solche der hiernächst folgenden Maschinenlehre beizufügen.

268. §.

Um das statische Moment zu finden, womit das in einer Windung enthaltene Wasser die Schnecke zu drehen strebt, sei P das Gewicht dieses Wassers, und man nehme in der centrischen Linie AF (Figur 38) ein sehr kleines Stück Mm von dem wasserhaltenden Bogen, so findet man das Gewicht desselben T.IV. F.38.

$$= \frac{P . Mm}{L}$$

Man ziehe MP mit OO′ parallel und MN vertikal, so ist die Ebene PMN mit der Ebene ABCD parallel. In ersterer sei MT auf MP senkrecht, so ist $\angle$ NMT $= 90° -$ PMN $= \beta$, und das Gewicht $\frac{P . Mm}{L}$, welches vertikal nach MN wirkt, zerlegt sich nach MT $= \frac{P . Mm}{L} \operatorname{Cos} \beta$ und wirkt allein auf die Umdrehung der Schnecke.

Durch M gehe der auf der Axe O

T. IV. Querschnitt XY, so ist die Entfernung des Punkts
F. 38. M von der Ebene ABCD

$$= R . \mathrm{Sin} XO''M = R . \mathrm{Sin} BOP = PH$$

wenn PH auf AB senkrecht gezogen ist; folglich das Moment des Drucks nach MT

$$= \frac{P . Mm}{L} \mathrm{Cos}\beta . PH$$

Aber wenn pr auf PH senkrecht ist, so verhält sich

$$Pp : pr = PO : PH \text{ also}$$

$$PH = \frac{PO . pr}{Pp} = \frac{R . Hh}{Pp}$$

Weiter ist

$$Mn = Mm . \mathrm{Cos}\alpha = Pp, \text{ also}$$

$$PH = \frac{R . Hh}{Mm . \mathrm{Cos}\alpha}$$

daher das Moment für den kleinen Bogen Mm

$$= \frac{P . Mm}{L} \mathrm{Cos}\beta . \frac{R . Hh}{Mm . \mathrm{Cos}\alpha} = \frac{P . R . \mathrm{Cos}\beta}{L . \mathrm{Cos}\alpha} . Hh$$

Ist nun der wasserhaltende Bogen von S bis M in lauter solche kleine Stücke oder Elemente wie Mm getheilt, so findet man von jedem andern Elemente Mm′ das statische Moment seines Gewichts

$$= \frac{P . R \mathrm{Cos}\beta}{L \mathrm{Cos}\alpha} . Hh'$$

und daher die Summe aller Momente der Elemente von M bis S, oder das statische Moment des ganzen Bogens MS =

$$\frac{P . R \mathrm{Cos}\beta}{L . \mathrm{Cos}\alpha} \left[Hh' + h'h'' + h''h''' + ..\right] = \frac{P . R \mathrm{Cos}\beta}{L . \mathrm{Cos}\alpha} . KH$$

$$= \frac{P . R \mathrm{Cos}\beta}{L \mathrm{Cos}\alpha} \left[\mathrm{Sin.vers} \frac{AP}{R} - \mathrm{Sin.vers} \frac{AV}{R}\right] R$$

folglich wenn das ganze Moment, mit welchem der



wasserhaltende Bogen SMFl' die Schnecke zu drehen strebt, $= \mu$ gesetzt wird, so ist T. IV. F. 35.

$$= \frac{P.R^2 \cos\beta}{L.\cos\alpha}\left[\text{Sin.vers}\frac{APBq'}{R} - \text{Sin.vers}\frac{AV}{R}\right]$$

Aber

$$\text{Sin.vers}\frac{APBq'}{R} - \text{Sin.vers}\frac{AV}{R} = \text{Sin.vers}\lambda - \text{Sin.vers}(\delta+\sigma)$$

$$= (1-\cos\lambda - [1-\cos(\delta+\sigma)] = \cos(\delta+\sigma) - \cos\lambda$$

Nach 262. §. ist ferner

$$\cos(\delta+\sigma) = \cos\delta - \frac{b\cos\delta}{2R} - \frac{a\,\text{Tgt}\,\beta}{2R} - \sigma T$$

und nach 263. §.

$$\cos\lambda = \delta T + \cos\delta - \frac{b\cos\delta}{2R} - \frac{a\,\text{Tgt}\,\beta}{2R} - \lambda T \text{ daher}$$

$$\cos(\delta+\sigma) - \cos\lambda = (\lambda-\delta-\sigma)\ \text{Tgt}\,\alpha\ \text{Tgt}\,\beta$$

oder 263. §.

$$= \frac{L}{R}\ \frac{\text{Tgt}\,\alpha\ \text{Tgt}\,\beta}{\text{Sec}\,\alpha}$$

folglich das gesuchte Moment

$$\mu = \frac{P.R^2\cos\beta}{L.\cos\alpha}\cdot\frac{L}{R}\ \frac{\text{Tgt}\,\alpha\ \text{Tgt}\,\beta}{\text{Sec}.\alpha}$$

$$= P.R\ \text{Tgt}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta$$

und weil $P = \gamma.L.f$, so erhält man das statische Moment des wasserhaltenden Bogens, oder

$$\mu = \gamma.R.L.f.\text{Tgt}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta \text{ oder 263. §.}$$

$$= \gamma R^2(\lambda-\sigma-\delta)\ f.\ \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta$$

und wenn t die Umlaufszeit der Spindel, und M die Wassermenge welche die Schnecke in jeder Minute ausgießt, bezeichnet, so ist nach 263. §.

$$\gamma R.M.t\ \text{Tgt}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta$$

T. IV. Querschnitt XY, so ist die Entfernung des Punkts
F. 38. M von der Ebene ABCD

$$= R . \sin XO''M = R . \sin BOP = PH$$

wenn PH auf AB senkrecht gezogen ist; folglich das Moment des Drucks nach MT

$$= \frac{P . Mm}{L} \cos\beta . PH$$

Aber wenn pr auf PH senkrecht ist, so verhält sich

$$Pp : pr = PO : PH \text{ also}$$

$$PH = \frac{PO . pr}{Pp} = \frac{R . Hh}{Pp}$$

Weiter ist

$$Mn = Mm . \cos\alpha = Pp, \text{ also}$$

$$PH = \frac{R . Hh}{Mm . \cos\alpha}$$

daher das Moment für den kleinen Bogen Mm

$$= \frac{P . Mm}{L} \cos\beta . \frac{R . Hh}{Mm . \cos\alpha} = \frac{P . R . \cos\beta}{L . \cos\alpha} . Hh$$

Ist nun der wasserhaltende Bogen von S bis M in lauter solche kleine Stücke oder Elemente wie Mm getheilt, so findet man von jedem andern Elemente Mm' das statische Moment seines Gewichts

$$= \frac{P . R \cos\beta}{L \cos\alpha} . Hh'$$

und daher die Summe aller Momente der Elemente von M bis S, oder das statische Moment des ganzen Bogens MS =

$$\frac{P . R \cos\beta}{L . \cos\alpha} \left[Hh' + h'h'' + h''h''' + ..\right] = \frac{P . R \cos\beta}{L . \cos\alpha} . KH$$

$$= \frac{P . R \cos\beta}{L \cos\alpha} \left[\text{Sin.vers} \frac{AP}{R} - \text{Sin.vers} \frac{AV}{R}\right] R$$

folglich wenn das ganze Moment, mit welchem der

vasserhaltende Bogen SMFl' die Schnecke zu dre- en strebt, $= \mu$ gesetzt wird, so ist T.IV. F.36.

$$= \frac{P.R^2 \operatorname{Cos}\beta}{L.\operatorname{Cos}\alpha}\left[\operatorname{Sin.vers}\frac{APBq'}{R} - \operatorname{Sin.vers}\frac{AV}{R}\right]$$

lber

$$\operatorname{in.vers}\frac{APBq'}{R} - \operatorname{Sin.vers}\frac{AV}{R} = \operatorname{Sin.vers}\lambda - \operatorname{Sin.vers}(\delta+\sigma)$$

$$= (1-\operatorname{Cos}\lambda - [1-\operatorname{Cos}(\delta+\sigma)] = \operatorname{Cos}(\delta+\sigma) - \operatorname{Cos}\lambda$$

Nach 262. §. ist ferner

$$\operatorname{Cos}(\delta+\sigma) = \operatorname{Cos}\delta - \frac{b\operatorname{Cos}\delta}{2R} - \frac{a\operatorname{Tgt}\beta}{2R} - \sigma T$$

nd nach 263. §.

$$\operatorname{os}\lambda = \delta T + \operatorname{Cos}\delta - \frac{b\operatorname{Cos}\delta}{2R} - \frac{a\operatorname{Tgt}\beta}{2R} - \lambda T \text{ daher}$$

$$\operatorname{Cos}(\delta+\sigma) - \operatorname{Cos}\lambda = (\lambda-\delta-\sigma)\operatorname{Tgt}\alpha\operatorname{Tgt}\beta$$

er 263. §.

$$= \frac{L}{R}\,\frac{\operatorname{Tgt}\alpha\operatorname{Tgt}\beta}{\operatorname{Sec}\alpha}$$

lglich das gesuchte Moment

$$\mu = \frac{P.R^2\operatorname{Cos}\beta}{L.\operatorname{Cos}\alpha}\cdot\frac{L}{R}\,\frac{\operatorname{Tgt}\alpha\operatorname{Tgt}\beta}{\operatorname{Sec}.\alpha}$$

$$= P.R\operatorname{Tgt}\alpha\operatorname{Sin}\beta$$

nd weil $P = \gamma.L.f$, so erhält man das stati- che Moment des wasserhaltenden Bogens, er

$$\mu = \gamma.R.L.f.\operatorname{Tgt}\alpha\operatorname{Sin}\beta \text{ oder 263. §.}$$

$$= \gamma R^2(\lambda-\sigma-\delta) f.\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta$$

nd wenn t die Umlaufszeit der Spindel, und M e Wassermenge welche die Schnecke in jeder Mi- ute ausgießt, bezeichnet, so ist nach 263. §.

$$\mu = \frac{\gamma}{60} R.M.t\operatorname{Tgt}\alpha\operatorname{Sin}\beta$$

269. §.

Es läßt sich leicht einsehen, daß bei der Wasserschnecke ebenfalls das Cartesianische Grundgesetz der Statik Statt findet, nach welchem sich die Kraft zur Last, wie der Weg der Last zum Wege der Kraft verhält. Denn man setze daß
e e die Entfernung der Schraubengänge von einander bezeichne, so ist

$$e = \pi R \text{ Tgt}\alpha$$

daher ist das Wasser bei einer Umdrehung der Schraube um die Höhe

$$e \text{ Sin}\beta = \pi R \text{ Tgt}\alpha \text{ Sin}\beta$$

gestiegen, welches der Weg der Last P ist.

Die Kraft V sei in der Entfernung R′ von der Axe der Schraube angebracht, so ist für eine Umdrehung der Schraube

$$\pi R'$$

der Weg der Kraft, und R′V ihr Moment. Aber

$$PR \text{ Tgt}\alpha \text{ Sin}\beta = R'V, \text{ daher}$$

$$P : V = \pi R \text{ Tgt}\alpha \text{ Sin}\beta : \pi R'$$

wie oben.

Mehreres über die archimedische Wasserschnecke findet man in nachstehenden Schriften:

Pitot, Théorie de la Vis d'Archimede, avec le calcul de l'effet de cette machine. Mémoires de l'académie des sciences, année 1736. p. 238 etc. à Amsterd. 1740.

D. *Bernoulli*, Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii. Argentor. 1738. p. 183 etc.

L. *Euler*, de cochlea Archimedis. Comment. Nov. Petrop. T. V. p. 295 etc.

J. F. Hennert, angeführte Preisschrift.

Karsten, angef. Lehrbegrif, 6ter Theil. 26. und 27ster Abschnitt. S. 60 u. f.

Langsdorf, angef. Hydraulik, 28. Kap. S. 557 u. f.

Woltmann, angef. Beiträge. 4ter Band. S. 214 u. f.

Ueber den Bau der Wasserschnecke findet man Nachricht in:

Vitruvius, angef. Baukunst, 2ter Band, 10tes Buch, 11. Kap. S. 265 u. f.

Leupold, Theatrum Machin. Hydraulic. I. Theil 67. §. S. 36.

Zwei und zwanzigstes Kapitel.

Von den Schöpf- und Wurfrädern.

270. §.

Unter allen Schöpfrädern (Tympani, *Tympans, Roues à godets*), welche bestimmt sind, das Wasser auf eine gegebene Höhe zu heben, verdient unstreitig die im neunzehnten Kapitel abgehandelte Spiralpumpe den Vorzug. Da nun bei den Schöpfrädern, besonders wenn sie an ihrem Umfange mit Zellen oder Eimern versehen sind, die sich bei der Umdrehung auf einer gewissen Höhe ausgießen, die Berechnung der Wassermenge leicht ist, so wird es hinreichend seyn in Absicht ihrer mannichfaltigen Bauart, auf die angeführten Schriften von Leupold und Belidor zu verweisen. In des Herrn Professors Büsch angeführten Versuch einer Mathematik, 2ter Theil, S. 347, findet man eine Beschreibung des Bremischen Schöpfrades, welches das Wasser mittelst 16 Schöpfkasten 40 Fuß hoch hebt.

271. §.

Die Wurfräder welche zur Austrocknung niedriger Ländereien dienen, und gewöhnlich durch ein Vorgelege mit Windmühlenflügel in Bewegung gesetzt werden, theilt man in vertikale und inclinirte. Sie sind beinahe wie Straubeträder geformt, und dienen das Wasser auf eine mäßige Höhe von etwa 4 Fuß zu heben. Liegt die Welle des Rades horizontal, so heißt dasselbe

ein vertikales, bei einer schiefen Lage aber ein inclinirtes Wurfrad.

Eine Abbildung von einem vertikalen Wurfrade, in dem dazu gehörigen Gerinne, ist durch die 39ste Figur vorgestellt. An der viereckigten Welle C sind vier Kreuzärme befestiget, welche zugleich als Schaufeln dienen, und da wo sie ins Wasser treten, eine Breite von etwa $1\frac{1}{2}$ Fuß, so wie die übrigen mittelst der Schwertbänder befestigten Schaufelbretter erhalten. Man giebt diesen Brettern eine gegen den Halbmesser etwas geneigte Lage, damit sie das gehobene Wasser leichter verläßt. Die ganze Höhe des Rades ist 15 bis 20 Fuß, welches sich in einem Gerinne bewegt, dessen Boden und Wände etwa einen Zoll Spielraum lassen. In der Figur ist die Seitenbekleidung nicht angegeben, um die Konstruktion besser zu übersehen. Der Hinterfluther AB erhält vor dem Rade eine Erweiterung durch Flügelwände, auch wohl eine Vertiefung damit das Binnenwasser freier zufließen kann. Von der Mitte des Rades nach vorne zu, ist eine Kröpfung oder ein Aufleiter DB, welcher nach der Höhe des fortzuschaffenden Wassers eingerichtet wird. Vom Aufleiter kommt das Wasser in den Vorfluther BE, und im Falle das Wurfrad still steht, so ist an der Griesssäule B eine Wachtthüre, die sich, wenn das Rad im Gange ist, nach außen öfnet und beim Stillstande verschließt, so daß kein Außenwasser zurücktreten kann. T. IV. F. 39.

Wenn sich das Wurfrad umdreht, so wird das zwischen den beiden tiefsten Schaufeln befindliche Wasser nach dem Aufleiter gehoben, daher findet man die bei jeder Umdrehung gehobene Wassermenge, wenn der Querschnitt der eingetauchten Schaufel mit demjenigen Kreise multiplizirt wird, welcher durch die Schwerpunkte aller eingetauchten Schaufelstücke geht, vorausge[...] hau-

Zwei und zwanzigstes Kapitel.

Von den Schöpf- und Wurfrädern.

270. §.

Unter allen Schöpfrädern (Tympani, *Tympans, Roues à godets*), welche bestimmt sind, das Wasser auf eine gegebene Höhe zu heben, verdient unstreitig die im neunzehnten Kapitel abgehandelte Spiralpumpe den Vorzug. Da nun bei den Schöpfrädern, besonders wenn sie an ihrem Umfange mit Zellen oder Eimern versehen sind, die sich bei der Umdrehung auf einer gewissen Höhe ausgießen, die Berechnung der Wassermenge leicht ist, so wird es hinreichend seyn in Absicht ihrer mannichfaltigen Bauart, auf die angeführten Schriften von Leupold und Belidor zu verweisen. In des Herrn Professors Büsch angeführten Versuch einer Mathematik, 2ter Theil, S. 347, findet man eine Beschreibung des Bremischen Schöpfrades, welches das Wasser mittelst 16 Schöpfkasten 40 Fuß hoch hebt.

271. §.

Die Wurfräder welche zur Austrocknung niedriger Ländereien dienen, und gewöhnlich durch ein Vorgelege mit Windmühlenflügel in Bewegung gesetzt werden, theilt man in vertikale und inclinirte. Sie sind beinahe wie Strauberräder geformt, und dienen das Wasser auf eine mäßige Höhe von etwa 4 Fuß zu heben. Liegt die Welle des Rades horizontal, so heißt dasselbe

ein vertikales, bei einer schiefen Lage aber ein inclinirtes Wurfrad.

Eine Abbildung von einem vertikalen Wurfrade, in dem dazu gehörigen Gerinne, ist durch die 39ste Figur vorgestellt. An der viereckigten Welle C sind vier Kreuzärme befestiget, welche zugleich als Schaufeln dienen, und da wo sie ins Wasser treten, eine Breite von etwa $1\frac{1}{2}$ Fuß, so wie die übrigen mittelst der Schwertbänder befestigten Schaufelbretter erhalten. Man giebt diesen Brettern eine gegen den Halbmesser etwas geneigte Lage, damit sie das gehobene Wasser leichter verläßt. Die ganze Höhe des Rades ist 15 bis 20 Fuß, welches sich in einem Gerinne bewegt, dessen Boden und Wände etwa einen Zoll Spielraum lassen. In der Figur ist die Seitenbekleidung nicht angegeben, um die Konstruktion besser zu übersehen. Der Hinterfluther AB erhält vor dem Rade eine Erweiterung durch Flügelwände, auch wohl eine Vertiefung damit das Binnenwasser freier zufließen kann. Von der Mitte des Rades nach vorne zu, ist eine Kröpfung oder ein Aufleiter DB, welcher nach der Höhe des fortzuschaffenden Wassers eingerichtet wird. Vom Aufleiter kommt das Wasser in den Vorfluther BE, und im Falle das Wurfrad still steht, so ist an der Grießsäule B eine Wachtthüre, die sich, wenn das Rad im Gange ist, nach außen öfnet und beim Stillstande verschließt, so daß kein Außenwasser zurücktreten kann.

T. IV. F. 39.

Wenn sich das Wurfrad umdreht, so wird das zwischen den beiden tiefsten Schaufeln befindliche Wasser nach dem Aufleiter gehoben, daher findet man die bei jeder Umdrehung gehobene Wassermenge, wenn der Querschnitt der eingetauchten Schaufel mit demjenigen Kreise multiplizirt wird, welcher durch die Schwerpunkte aller eingetauchten Schaufelstücke geht, vorausgesetzt daß die Schau-

T. IV. F. 39. feln keine Dicke hätten, und kein Spielraum zwischen der Kröpfung und den Schaufeln vorhanden wäre. Man setze, daß

- a die Höhe der vertikal eingetauchten Schaufel,
- b ihre Breite,
- d den Spielraum zwischen Schaufel und Gerinne,
- r den Halbmesser des Rades bis zum Schwerpunkte der eingetauchten Schaufel,
- k den körperlichen Inhalt sämmtlicher Schaufeln so weit sie ins Wasser treten,
- q den Verlust von dem gehobenen Wasser wegen des Spielraums, bei einer Umdrehung,
- t die Zeit einer Umdrehung,
- M' die gehobene Wassermenge bei einer Umdrehung, und
- M die Wassermenge in einer Minute bezeichne;

ferner sei

- H der Abstand des höchsten Punkts des gehobenen Wassers, vom Spiegel des Binnenwassers,

so läßt sich der Inhalt des Spielraums durch welchen das gehobene Wasser zurückläuft $= (2a + b)d$ annehmen. Die der Geschwindigkeit zugehörige Höhe wird nicht sehr von H verschieden seyn, man erhält daher den Wasserverlust in einer Sekunde

$$= d(2a + b)\,\alpha \sqrt{H}$$

und daher in t Sekunden oder

$$q = 4{,}9\, dt\,(2a + b) \sqrt{H}.$$



Nun ist die Fläche der eingetauchten Schaufel $= ab$, also der Inhalt des Wasserrings welchen man sich um das ganze Rad gelegt denken kann $= 2\pi r . ab$, daher die Wassermenge bei jeder Umdrehung oder

$$M' = 2\pi abr - k - q$$

folglich die Wassermenge welche in jeder Minute gehoben wird oder

$$M = \frac{60}{t} [2\pi abr - k - q]$$

Der Umdrehung des Rades setzt sich eine Wassersäule von der Höhe H entgegen, deren Querschnitt man $= ab$ annehmen kann; hienach ist die zur Umdrehung des Rades am Halbmesser r erforderliche Kraft

$$P = abH . \gamma.$$

Über vertikale Wurfräder können folgende Schriften nachgesehen werden:

J. van *Zyl*, Theatrum machinarum universale; of groot algemeen Moolen-Boek. I. Deel. Te Amsterdam 1761. p. 5. Tab. XX—XXVI.

Büsch, angef. Versuch einer Mathematik. 2ter Theil. S. 348.

Woltmann, angef. Beiträge, 4ter Bd. S. 169 u. f.

272. §.

Die inclinirten Wurfräder haben gewöhnlich eine solche Stellung, daß die Wasserradswelle mit dem Horizont einen Winkel von 60 Grad einschließt; ihre Schaufeln erhalten eine solche Stellung, wie die Kämme bei einem Kammrade. Es ist nicht wahrscheinlich daß sie Vorzüge vor den vertikalen Wurfrädern haben, vielmehr

der Inhalt vom Trapez'

$$DEGH = eh - \frac{1}{2}e^2 \,Tgt\beta$$

der Inhalt des Wasserkörpers in Zelle

$$M' = \frac{be}{2}(2h - e\,Tgt\beta)$$

sei

I die Wassermenge welche in jeder Minute gehoben wird,

1 die Anzahl der Umdrehungen des obern Getriebes in einer Minute,

die Anzahl der Stäbe desselben,

n. n die Anzahl der Schaufeln welche in Minute aus der Röhre kommen, daher die :rmenge in einer Minute

$$M = \frac{1}{2}mnbe\,(2h - e\,Tgt\beta)$$

Ausdruck setzt aber voraus, wenn M da- ichtig berechnet werden soll, daß e Tgt β rößer als h seyn darf, weil sonst der Punkt r G fällt und anstatt des obigen Ausdrucks

$$M' = \frac{bh^2}{2}\,Cot\beta$$

t wird, welcher Fall aber nur bei einer sehr Lage des Schaufelwerks oder bei großen en von e vorkommt.

275. §.

erforderliche Kraft ... ınng des Was- Umfange des Getr... = P, die Länge ... so weit sie übe... asser steht, bis der Schaufeln ... t Wasser an-

Hydraulica, 1ter Theil, 3tes Buch, 2tes K.
856. §. u. f.

Drei und zwanzigstes Kapitel.

Von den Schaufel- und Paternosterwerken.

273. §.

Wegen der leichten Fortbringung werden die
Schaufelwerke (*Chapelets inclinés*) immer
sehr häufig bei Grundbauen angewandt,
wenn das Grundwasser auf keine beträchtliche Höhe
gehoben werden soll. Ihre Anordnung ergiebt sich
aus der 40sten Figur. Mit einer rechtwinklichten T. V.
verdichteten Röhre AB, welche am obern und F. 40.
untern Ende offen ist, wird eine eben so große
Rinne CD verbunden. An beiden Enden der Röhre
befinden sich in E und F eiserne Getriebe mit sechs
eisernen Stäben, über welche eine doppelte Kette
ohne Ende geht. In der Mitte zwischen den Gelenken
dieser eisernen gleich großen Kettenglieder,
sind rechtwinklichte 1 bis 1½ Zoll dicke Bretter
oder Schaufeln auf die Richtung der Kette
senkrecht befestiget, welche die ganze Röhre ausfüllen,
und nur oberhalb und auf beiden Seiten
einen Spielraum von ¼ bis ⅜ Zoll haben. In
der obern Rinne kann dieser Spielraum größer
seyn. Diese Einrichtung heißt ein Schaufelwerk,
welches, wenn es bei G angelehnt wird, mittelst
einer Kette oder eines Seils bei H so weit gesenkt
werden kann, daß der Untertheil in das auszuschöpfende
Wasser gehet. Wird nun das obere
Getriebe E mittelst Kurbeln, die an der Axe des-

T. V. F. 40. selben gewöhnlich angebracht werden, von A nach K umgedreht, vorausgesetzt daß die Getriebestäbe genau in die Gelenke der Kettenglieder passen, so müssen dadurch die Schaufeln und das untere Getriebe F in Bewegung gesetzt werden, das Wasser wird in der Röhre AB steigen, durch KL ausfließen, und die ledigen Schaufeln werden in der Rinne CD nach dem Grundwasser zurückgehen.

Man macht die Schaufelwerke von 18 bis 32 Fuß lang, und giebt gewöhnlich den Schaufeln eine Höhe von 5 bis 6 und eine Breite von 12 bis 15 Zoll. Den Abstand zweier Schaufeln im Lichten nimmt man von 7 bis 8 Zoll, damit man sich vierstöckigter Getriebe bedienen kann; es wäre aber besser den Abstand der Schaufeln von einander mehr zu vermindern, und beinahe der Höhe gleich zu machen, in welchem Falle die Getriebe sechs Stäbe erhalten müssen.

274. §.

Wenn ABC $= \beta$ der Winkel ist, welchen die Axe der Schaufeln mit dem Horizont einschließt; ferner die Höhe der Schaufeln DE $= h$, ihre Entfernung von einander im Lichten gemessen $= e$ und ihre Breite $= b$, so kann man die in jeder Zelle DEFG befindliche Wassermenge finden, wenn der Raum, welchen die Kettenglieder einnehmen bei Seite gesetzt, und auf den Spielraum zwischen den Schaufeln und den Seitenwänden der Röhre nicht Rücksicht genommen wird.

Der Inhalt des Längenquerschnitts einer Zelle ist $= eh$; nun ist wenn die Zelle bis DH mit Wasser angefüllt ist, $\angle$ FDH $= \beta$ also

$$FH = e \operatorname{Tgt} \beta$$

daher der Inhalt des $\triangle$ DFH $= \frac{1}{2} e^2 \operatorname{Tgt} \beta$

folglich

folglich der Inhalt vom Trapez'

$$DEGH = eh - \tfrac{1}{2}e^2 \, Tgt\beta$$

daher der Inhalt des Wasserkörpers in einer Zelle

$$M' = \frac{be}{2}(2h - e \, Tgt\beta)$$

Es sei

M die Wassermenge welche in jeder Minute gehoben wird,

m die Anzahl der Umdrehungen des obern Getriebes in einer Minute,

n die Anzahl der Stäbe desselben,

so ist m.n die Anzahl der Schaufeln welche in jeder Minute aus der Röhre kommen, daher die Wassermenge in einer Minute

$$M = \tfrac{1}{2} mnbe (2h - e \, Tgt\beta)$$

Dieser Ausdruck setzt aber voraus, wenn M danach richtig berechnet werden soll, daß e Tgtβ nicht größer als h seyn darf, weil sonst der Punkt H unter G fällt und anstatt des obigen Ausdrucks

$$M' = \frac{bh^2}{2} \, Cot\beta$$

erhalten wird, welcher Fall aber nur bei einer sehr steilen Lage des Schaufelwerks oder bei großen Werthen von e vorkommt.

275. §.

Die erforderliche Kraft zur Erhebung des Wassers am Umfange des Getriebes sei = P, die Länge der Röhre, so weit sie über dem Wasser steht, bis zum Ausgusse = L, und die [illegible] der Schaufeln = d, so ist $\frac{L}{e+d}$ die Anz[illegible]r an-

T. V. F. 40. selben gewöhnlich angebracht werden, von A nach K umgedreht, vorausgesetzt daß die Getriebestäbe genau in die Gelenke der Kettenglieder passen, so müssen dadurch die Schaufeln und das untere Getriebe F in Bewegung gesetzt werden, das Wasser wird in der Röhre AB steigen, durch KL ausfließen, und die ledigen Schaufeln werden in der Rinne CD nach dem Grundwasser zurückgehen.

Man macht die Schaufelwerke von 18 bis 32 Fuß lang, und giebt gewöhnlich den Schaufeln eine Höhe von 5 bis 6 und eine Breite von 12 bis 15 Zoll. Den Abstand zweier Schaufeln im Lichten nimmt man von 7 bis 8 Zoll, damit man sich vierstöckigter Getriebe bedienen kann; es wäre aber besser den Abstand der Schaufeln von einander mehr zu vermindern, und beinahe der Höhe gleich zu machen, in welchem Falle die Getriebe sechs Stäbe erhalten müssen.

274. §.

Wenn ABC $= \beta$ der Winkel ist, welchen die Axe der Schaufeln mit dem Horizont einschließt; ferner die Höhe der Schaufeln DE $= h$, ihre Entfernung von einander im Lichten gemessen $= e$ und ihre Breite $= b$, so kann man die in jeder Zelle DEFG befindliche Wassermenge finden, wenn der Raum, welchen die Kettenglieder einnehmen bei Seite gesetzt, und auf den Spielraum zwischen den Schaufeln und den Seitenwänden der Röhre nicht Rücksicht genommen wird.

Der Inhalt des Längenquerschnitts einer Zelle ist $= eh$; nun ist wenn die Zelle bis DH mit Wasser angefüllt ist, $\angle FDH = \beta$ also

$$FH = e \,\mathrm{Tgt}\,\beta$$

daher der Inhalt des $\triangle DFH = \frac{1}{2} e^2 \,\mathrm{Tgt}\,\beta$

folglich

folglich der Inhalt vom Trapez'

$$DEGH = eh - \tfrac{1}{2}e^2 \, Tgt\beta$$

daher der Inhalt des Wasserkörpers in einer Zelle

$$M' = \frac{be}{2}(2h - e \, Tgt\beta)$$

Es sei

M die Wassermenge welche in jeder Minute gehoben wird,

m die Anzahl der Umdrehungen des obern Getriebes in einer Minute,

n die Anzahl der Stäbe desselben,

so ist m.n die Anzahl der Schaufeln welche in jeder Minute aus der Röhre kommen, daher die Wassermenge in einer Minute

$$M = \tfrac{1}{2} mnbe \, (2h - e \, Tgt\beta)$$

Dieser Ausdruck setzt aber voraus, wenn M danach richtig berechnet werden soll, daß $e \, Tgt\beta$ nicht größer als h seyn darf, weil sonst der Punkt H unter G fällt und anstatt des obigen Ausdrucks

$$M' = \frac{bh^2}{2} \, Cot\beta$$

erhalten wird, welcher Fall aber nur bei einer sehr steilen Lage des Schaufelwerks oder bei großen Werthen von e vorkommt.

275. §.

Die erforderliche Kraft zur Erhebung des Wassers am Umfange des Getriebes sei $= P$, die Länge der Röhre, so weit sie über dem Wasser steht, bis zum Ausgusse $= L$, und die Dicke der Schaufeln $= d$, so ist $\frac{L}{e+d}$ die Anzahl der mit Wasser an-

gefüllten Zellen, daher die gesammte Wassermenge welche gehoben werden muß

$$= \frac{L}{e + d} \cdot M'$$

und deren Gewicht

$$\frac{\gamma L b e}{2(e + d)} [2h - e \operatorname{Tgt} \beta]$$

daher das respektive Gewicht, oder die erforderliche Kraft am Umfange des Getriebes, mit Beiseitesetzung derjenigen Hindernisse, welche in die Maschinenlehre gehören

$$P = \frac{\gamma L b e}{2(e + d)} [2h - e \operatorname{Tgt} \beta] \operatorname{Sin} \beta$$

oder nach dem Vorhergehenden

$$P = \frac{\gamma L . M}{m . n (e + d)} \operatorname{Sin} \beta$$

Anmerk. Wenn alle Abmessungen des Schaufelwerks außer dem Neigungswinkel β gegeben sind, so hängt der größte Effekt desselben davon ab, daß die Wassermenge M mit der Höhe L Sin β multiplizirt, oder daß $(2h - e \operatorname{Tgt} \beta) \operatorname{Sin} \beta$ ein Maximum sei; dieses giebt für ein Schaufelwerk, bei welchem $h = e$ ist, $\angle \beta = 37° 38'$. Hievon in der folgenden Maschinenlehre mehr, wo eigentlich diese Untersuchungen hingehören.

276. §.

Außer den Schaufelwerken, bedient man sich auch noch anderer Wasserhebungsmaschinen die vertikal gestellt werden, und das Wasser höher als diese heben können; sie verursachen aber sehr viel Reibung, sind vielen Reparaturen unterworfen und haben weit mehr Unbequemlichkeiten als gewöhnliche Pumpen, daher sie auch immer mehr aus dem Gebrauche kommen. Hieher gehören die Paternosterwerke oder Rosenkranzmühlen

(*Chapelets verticaux*), wo durch eine vertikalstehende Röhre eine Kette oder Seil ohne Ende geht, welches in gleichen Entfernungen mit kugelförmig ausgestopften Küssen oder Wulsten versehen ist, die sehr enge in die Röhre passen, und zwischen welchen das Wasser gehoben wird. Werden anstatt der Wulste, lederne Scheiben genommen, so entstehet eine Scheiben- oder Püschelkunst. Läßt man die vertikale Röhre weg und befestigt an dem Seile ohne Ende in gleichen Entfernungen, Kästen oder andere Gefäße, welche das geschöpfte Wasser auffördern können, so entstehet eine Kastenkunst.

Es wäre zu weitläuftig bei diesen verschiedenen Künsten länger zu verweilen, da ihre Berechnung, sobald die Friktion für einen bestimmten Fall ausgemittelt ist, sehr leicht wird. Die Theorie der Schaufelwerke, Paternoster- und Kastenkünsten, findet man bearbeitet, in:

Karsten, angef. Lehrbegrif, 6ter Theil. 38 und 39ster Abschnitt, S. 146 u. f.

Langsdorf, angef. Hydraulik, 29. Kap. S. 580 u. f.

Über die Konstruktion dieser Maschinen findet man Nachricht in:

Leupold, angef. Theatrum machin. hydraulic. 5tes und 6tes Kapitel.

J. *Polley*, Theatrum machinarum universale; of keurige verzameling van Waterwerken, Schutsluysen, Waterkeeringen. II. Deel, t'Amsterdam 1737. p. 10. Tab. XXIII.

Belidor, angef. Archit. Hydraul. 1. Thl. 2tes Buch, 4tes Kapitel.

Perronet, Description des projets et de la construction des ponts de Neuilli, de Mantes etc. Nouvelle édit. a Paris 1788. p. 210 et 247.

Vier und zwanzigstes Kapitel.

Von den Stromgeschwindigkeitsmessern.

277. §.

Es giebt verschiedene Mittel die Geschwindigkeit der Flüsse zu messen, und noch immer sucht man einfache Instrumente anzugeben, mit welchen man diese Geschwindigkeiten mehr oder weniger genau finden kann. Hier sollen einige der vorzüglichsten und am meisten bekannten beschrieben werden.

Wenn es allein darauf ankommt, die Geschwindigkeit des fließenden Wassers auf seiner Oberfläche zu finden, so sieht man leicht, daß hiezu schwimmende Körper angewandt werden können, welches auch schon Mariotte im Traité du mouvement des eaux, Paris 1686. III. Part. IV. Disc. vorschlägt.

Die einfachste Vorrichtung, mittelst schwimmender Körper die Geschwindigkeit eines Flusses auf seiner Oberfläche zu beobachten, ist folgende: Man lasse sich eine 10 bis 15 Zoll dicke blecherne Kugel machen, welche außerhalb mit weisser Öhlfarbe angestrichen ist, und innerhalb so lange mit Schrootkörner oder Wasser beschwert wird, bis sie etwa nur 2 bis 3 Zoll über das Wasser hervorragt. Ferner wird ein Sekundenpendel oder eine Sekundenuhr erfordert; hat man keins von beiden, so läßt sich ein Sekundenpendel dadurch verfertigen, daß eine kleine bleierne Kugel mit einem höchst feinen Faden oder Drath dergestalt verbunden wird, daß vom Mittelpunkte der

Kugel bis zum Ende des Draths, wo sich der Aufhängepunkt befindet, genau eine Länge von 3 Fuß 2 Zoll rheinländisch genommen wird (84. §.). Ist nun eine Gegend des Flusses ausgesucht, wo derselbe nicht nur zwischen graden und parallelen Ufern fließt, sondern auch eine ziemlich gleichförmige Tiefe hat, so mißt man parallel mit dem Stromstriche, am Ufer eine Weite AB (Figur 41) von etwa T. V.
10 bis 15 Ruthen ab, und bemerkt die Endpunkte F. 41.
A, B mit Pfählen. Neben diese Pfähle setzt man, senkrecht auf die Richtung des Stroms, andere in C und D, um dadurch wenn man hinter dem Pfahl C steht anzugeben, wenn die schwimmende Kugel in die Richtung CAA′ kommt. Eben dies gilt bei DBB′. Soll nun die Beobachtung angestellt werden, so wird die Kugel mittelst eines Kahns oder Nachens, etwa 5 Ruthen oberhalb AA′ ins Wasser gesetzt, damit sie in der Linie AA′ in derjenigen Gegend ankomme, von wo an, man die Geschwindigkeit finden will. In C und D stehen Beobachter, und so bald die Kugel den Fluß so weit herunter geschwommen ist, daß sie in der Verlängerung der Pfähle CA bemerkt wird, so fängt man an die Sekunden zu zählen, und fährt damit so lange fort, bis der zweite Beobachter in D ein Zeichen giebt, daß die Kugel in der Linie BB′ angelangt sei.

Dieser Versuch muß verschiedenemal wiederholt werden, und es sind dabei diejenigen Zeiten ganz auszuschließen, bei welchen sich die Kugel von der graden Richtung entfernte, oder an ein Ufer getrieben ist. Aus den gefundenen Zeitsekunden, in welchen die Kugel sich in grader Richtung bewegte, wird das Mittel genommen und damit in die abgemessene Länge dividirt, so erhält man dadurch die Geschwindigkeit des Flusses an der Oberfläche, in derjenigen Richtung worin sich die Kugel bewegte. Gesetzt man hätte gefunden, daß

von 10 Ruthen = 120 Fuß in einer Zeit von 54 Sekunden durchlaufen wäre, so ist die gesuchte Geschwindigkeit = $\frac{120}{54}$ = $2\frac{2}{9}$ Fuß.

Wenn diese Versuche gelingen sollen, so muß man sehr stilles Wetter abwarten, wo kein Wind die Oberfläche des Wassers bewegt. Nahe an dem Ufern ist es beinahe unmöglich, mittelst schwimmender Körper die Geschwindigkeit zu finden, weil sie sich entweder nach der Mitte des Stroms bewegen oder an das Ufer gehen.

Noch ist zu bemerken, daß wegen der Neigung der Oberfläche des Stroms, die Kugel eine Beschleunigung erhält, in den meisten Fällen wird man aber hierauf nicht Rücksicht nehmen dürfen.

278. §.

Will man in einem Stromstriche für eine gewisse Tiefe, die aber wenigstens einige Fuß geringer seyn muß, als die kleinste Tiefe in dieser Richtung, die mittlere Geschwindigkeit ungefähr finden, so verbindet man einen Körper welcher spezifisch leichter als Wasser ist, mit einem anderen spezifisch schwereren, vermittelst einer Stange oder blechernen Röhre, so daß der leichtere Körper noch einige Zoll über den Wasserspiegel hervorragt, und verfährt bei Bestimmung der Geschwindigkeit auf eine ähnliche Art, wie im vorhergehenden §. bei der schwimmenden Kugel gelehrt worden. Die dadurch gefundene Geschwindigkeit ist aber weder die Geschwindigkeit an der Oberfläche, noch die wahre mittlere für die ganze Tiefe, ob sie sich gleich letzterer am meisten nähert.

Anstatt des Stabes und der beiden Körper, kann man eine gleichweite verschlossene blecherne Röhre nehmen, die mit Schrotkörner an ihrem Untertheile so lange beschwert wird, bis sie nur noch um eine gewisse Höhe über das Wasser hervorragt. Den Vorschlag, mittelst eines schwimmenden

Stabes die Geschwindigkeit zu messen, hat der Pater Cabeo gethan. Mehreres und die Beschreibung verschiedener Versuche, findet man in Wiebeking und Krönke, angef. Wasserbaukunst. 1ster Band. S. 198—203 und S. 331 u. f.

279. §.

Die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche zu messen, kann auch ein kleines sehr bewegliches Rädchen mit sehr dünnen blechernen Schaufeln, nach Art der Strauberräder, dienen, wobei es jedoch gut ist, nach 185. §. die Schaufeln etwas schief einzusetzen. Es kommt bei dem Gebrauche desselben alles darauf an, daß die Oberfläche des Wassers eben ist und die Schaufeln gleich tief eingetaucht bleiben. Beobachtet man nun die Zahl der Umläufe des Rades mittelst eines Sekundenpendels während einigen Minuten, und nimmt an, wie es mit Beiseitesetzung der Reibung geschehen kann, daß die Geschwindigkeit des Schwerpunkts der eingetauchten Schaufeln, der Geschwindigkeit des Wassers gleich sei, so erhält man die Geschwindigkeit des Wassers, wenn die Peripherie des Rades für den Schwerpunkt der eingetauchten Schaufeln, mit der Anzahl der Umdrehungen multiplizirt, und durch die Anzahl der beobachteten Sekunden dividirt wird. Die hiedurch gefundene Geschwindigkeit des Wassers ist desto genauer, je geringer die Reibung bei der Umdrehung des Rades ist.

Man kann diesem Rädchen einen Durchmesser von etwa 18 bis 24 Zoll geben, und an der stählernen Axe desselben, eine Scheibe mit einer Schraube ohne Ende anbringen, welche in ein kleines Rädchen von etwa 30 Zähnen eingreift, so daß bei jeder Umdrehung des Schaufelrades, ein Zahn des kleinen Rades fortgeschoben wird. Ist alles leicht und gut gearbeitet, so daß die Reibung möglichst

vermindert ist, so erhält man hiedurch ein leichtes Mittel die Umdrehungen des Rades zu zählen, welches außerdem bei einigermaßen beträchtlichen Geschwindigkeiten schwer hält. Man sehe J. Leupold, Theatrum machinarum generale. Leipzig 1724. 512. §. S. 152. Tab. LX.

280. §.

Zu den Instrumenten welche eigentlich nur dazu dienen, die Geschwindigkeit eines Stroms in seiner Oberfläche zu messen, kann man auch den Stromquadranten rechnen, welcher aus einem
T. V. in 90 Grade getheilten Quadranten AB (Fig. 42)
F. 42. bestehet, in dessen Mittelpunkte C ein feiner mit Wachs bestrichener Faden befestiget ist, worin sich in V eine Kugel befindet, die ein größeres spezifisches Gewicht als das Wasser hat. Um dem Quadranten die vertikale Stellung zu geben, dient das kleine Loth CE, welches auf 0 Grad einspielen muß. Hängt nun die Kugel V in fließendem Wasser, so wird sie von der lothrechten Linie CE abweichen, und durch den Strom um irgend einen Winkel ECV $= \alpha$ fortgestoßen werden.

Gesetzt das Gewicht der Kugel im Wasser sei $= q$, so findet man die Kraft welche die Kugel forttreibt $= q \text{ Tgt}\alpha$, vorausgesetzt, daß man bei einer unmerklichen Neigung der Oberfläche des Wassers, auf die daher entstehende Abweichung nicht Rücksicht nimmt. Setzt man nun für den Winkel α die Geschwindigkeit des Wassers $= c$, und für einen andern Winkel $\alpha' = c'$; so ist bekannt, daß sich die Kräfte des stoßenden Wassers bei verschiedenen Geschwindigkeiten, sehr nahe wie die Quadrate derselben verhalten; es ist daher

$$c^2 : (c')^2 = q \text{ Tgt}\alpha : q \text{ Tgt}\alpha' \text{ oder}$$
$$c : c' = \sqrt{(\text{Tgt}\alpha)} : \sqrt{(\text{Tgt}\alpha')}$$

d. h. es verhalten sich die verschiedenen Geschwin-

digkeiten des Wassers, wie die Quadratwurzeln von den Tangenten der Neigungswinkel bei einerlei Stromquadranten. Sind demnach bei einer bestimmten Kugel, für einige Neigungswinkel, die dazugehörige Geschwindigkeiten mittelst schwimmender Körper bekannt, so kann man daraus durch die vorstehende Proportion, für jeden andern Neigungswinkel, die dazu gehörige Geschwindigkeit finden.

Aus der Konstruktion des Instruments läßt sich einsehen, daß es nicht tief unter der Oberfläche des Wassers gebraucht werden kann, weil sonst das Wasser den Faden biegen wird, wodurch man einen zu großen Winkel erhält; wollte man aber anstatt des Fadens eine feste dünne Stange nehmen, so wird diese, so dünn sie auch ist, dennoch einen Stoß vom Wasser erhalten, wodurch eine Zweideutigkeit in Absicht der Geschwindigkeit mit welcher das Wasser die Kugel trift entstehet.

Weil bei großen Geschwindigkeiten eine zu leichte Kugel sehr hoch gehoben wird, und nur Winkel bis höchstens 60 Grad die erforderliche Genauigkeit geben, so kann man annehmen, daß bei Geschwindigkeiten die nicht größer als 3 bis 4 Fuß sind, elfenbeinerne Kugeln noch hinreichen, für größere Geschwindigkeiten muß man aber hohle messingene oder zinnerne Kugeln gebrauchen, deren spezifisches Gewicht verhältnißmäßig größer ist.

Wollte man aus der Größe und dem Gewichte der Kugel, die zu jedem Neigungswinkel gehörige Geschwindigkeit finden, so setze man das Gewicht der Kugel in der Luft = p, so ist

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{p-q}{\gamma} \text{ oder } \pi r^2 \gamma = \frac{3(p-q)}{4r}$$

Ist nun der Stoß gegen die Kugel $\frac{1}{n}$ von dem Stoße gegen ihre Projektion, so erhält man

$$\frac{1}{n}\,\frac{c^2}{4g}\,\pi r^2 \gamma = q \,\mathrm{Tgt}\,\alpha$$

oder wenn man anstatt $\pi r^2 \gamma$ den vorhin gefundenen Werth setzt

$$\frac{1}{n} \frac{c^2}{4g} \frac{3(p-q)}{4r} = q \, \mathrm{Tgt}\alpha \text{ oder}$$

$$c^2 = n \frac{16g}{3} \frac{q}{p-q} \mathrm{Tgt}\alpha.$$

Nun ist (176. §. III.)

$$\frac{1}{n} = 0{,}7886 \text{ also } n = 1{,}268$$

daher nach gehöriger Abkürzung die gesuchte Geschwindigkeit

$$c = 35{,}609 \sqrt{\left[\frac{q}{p-q} r \, \mathrm{Tgt}\alpha\right]}$$

Herr Prof. Schmidt hat zur Verbesserung des Stromquadranten, im ersten Bande der angeführten Allgemeinen Wasserbaukunst, Seite 205 u. f., einige Vorschläge gethan.

Mehrere Bemerkungen über dieses Instrument findet man in meiner Abhandlung:

Versuche mit dem Stromquadranten ꝛc. in der Sammlung die Baukunst betreffend, Jahrg. 1799, 1ter Band. S. 53 u. f.

Noch muß ich hiebei anmerken, daß mir Hr. Brünings in einem freundschaftlichen Schreiben die Erinnerung gemacht hat, daß die nahe am Kahn beobachtete Geschwindigkeit des Wassers, größer als die wirkliche seyn müsse. Ungeachtet ich nun bei meinen Versuchen schon darauf Rücksicht nahm, und den Quadranten so weit wie möglich vom Kahn entfernt hielt, so habe ich dennoch ohne den Gebrauch eines Kahns, ähnliche Versuche mit Zuziehung des Hrn. Bauinspektors Kypke, in dem 104. §. beschriebenen Kanal angestellt, und da die Resultate mit dem bereits angegebenen Ausdrucke übereinstimmten, so kann dies als eine neue Bestätigung dieses Ausdrucks angesehen werden.

281. §.

Wenn außer der Geschwindigkeit an der Ober- äche eines Stroms, auch noch Geschwindigkeiten i verschiedenen Tiefen verlangt werden, so bedient ian sich zu deren Bestimmung zuweilen der Pi- otschen Röhre, weil sich dieselbe durch ihre infachheit empfiehlt. Bei großen Tiefen und schnel- n Strömen ist sie aber selten anwendbar, weil re Befestigung, wie bei vielen andern Instrumen- n, alsdenn mit Schwierigkeiten verbunden ist, die Röhre selbst aber von dem Wasser so sehr erschüt- rt wird, daß man nicht leicht sichere Beobachtun- en anstellen kann.

Die Einrichtung dieses Instruments ist zuerst on Herrn Pitot angegeben, und in den Ab- andlungen der Pariser Akademie (a. a. O. S. 195) eschrieben worden. Mit einer blechernen etwa ei- en Zoll weiten Röhre AB (Figur 43), welche un- T. V. n eine trichterförmige Öfnung BC erhält, deren F. 43. re horizontal liegt, verbinde man eine gläserne Röhre AD. Wird nun die Röhre so weit ins Wasser gestellt, daß ein Theil der gläsernen Röhre ber dem Wasserspiegel hervorragt, und die Öf- nung C gegen die Richtung des Stroms gestellt t, so wird das Wasser welches gegen die Öfnung stößt, das Wasser in der Röhre zum Steigen ringen.

Man setze die Geschwindigkeit des Wassers in er Tiefe EB = c, so ist (171. §.) der Stoß ge- en die Öfnung C, dem Gewichte einer Wasser- äule gleich, deren Höhe mit derjenigen überein- ömmt, welche der Geschwindigkeit c zugehört und ie man $= \frac{c^2}{4g}$ findet. Soll daher eine Wasser- äule dem Stoße gegen C das Gleichgewicht hal- en, so muß ihre Höhe $h = \frac{c^2}{4g}$ seyn. Nun ist ber schon im stillstehenden Wasser die Röhre vo 3 bis F angefüllt, wenn also das Wasser

T. V. F. 43 um die Höhe FG = h steigt, so ist allein die Höhe der Wassersäule FG, welche dem Stoße des Wassers gegen die Öfnung C das Gleichgewicht hält, und man findet hieraus die Geschwindigkeit des Wassers in der Tiefe FB oder

$$c = 2\sqrt{g}\sqrt{h} = 7,9\sqrt{h}.$$

Um die Pitotsche Röhre mit mehrerer Bequemlichkeit zu gebrauchen, und den Punkt E bis zu welchem stillstehendes Wasser in der Röhre stehen würde, genauer anzugeben, verbindet man noch eine ganz grade Röhre, mit der Röhre BD, und giebt dem ganzen Instrumente die Einrichtung, daß die gebogene Röhre an einem langen nach vorne zugespitzten Holze, welches nicht viel dicker als die Röhre seyn darf, in einer kleinen Vertiefung angebracht werden kann. Die Befestigung der Röhren geschieht mittelst mettallner Charniere, so daß man bei größern Tiefen noch mehrere blecherne Röhren aufschieben und befestigen kann. Auch läßt sich zwischen beiden Röhren ein metallner eingetheilter Schieber anbringen, um den Abstand der Oberflächen in beiden Röhren genauer zu messen.

Der Ritter du Buat hat dieses Instrument noch dadurch verbessert, daß er die erweiterte Öfnung der Röhre mit einer dünnen Platte verschloß, und in die Mitte dieser Platte eine kleine Öfnung anbrachte. Nun geht aus den Versuchen des Hrn. Buat hervor, daß der senkrechte Stoß auf verschiedene Punkte einer Ebene kleiner wird, je weiter solche vom Mittelpunkte derselben abstehen, daß aber die Mitte einen Druck leidet, dessen Höhe $1\frac{1}{2}$mal so groß ist als die der Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers zugehörige Höhe (Principes d'Hydr. T. II. §. 454. p. 176), man erhält daher für die Pitotsche Röhre nach der Büatschen Verbesserung

$$h = \frac{3}{2}\,\frac{c^2}{4g}$$

also die Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{(\tfrac{8}{3}g)}\sqrt{h}.$$

282. §.

Die hydraulische Schnellwage hat an einer Stange AB (Fig. 44) welche in den Strom gehangen wird eine Tafel C, gegen welche das Wasser senkrecht stößt. In A ist dieses Instrument senkrecht aufgehangen, und an dem Hebelarm AD wird ein Gewicht E mit dem Stoße des Wassers gegen die Tafel C, ins Gleichgewicht gebracht. Man erhält hiedurch aber deshalb nicht die wahre Geschwindigkeit des Wasser's in C, weil außer der Tafel C, auch ein Theil der Stange AB vom Wasser gestoßen wird, welches bei großen Tiefen schon beträchtliche Abweichungen giebt, es sei denn, daß man die Tafel so groß annimmt, daß der Einfluß von dem Stoße auf die Stange nicht beträchtlich ist. Schon Leupold (Theatr. machin. gener. 1724. §. 504. S. 150) hat ein solches Instrument beschrieben, welches auch von Michelotti *) geschehen ist. Herr Brünings hat bei diesem Instrumente noch einige Verbesserungen angebracht **). T. V. F. 44.

283. §.

Eine eben so sinnreiche als einfache Einrichtung, hat der von Hrn. Lorgna ***) angegebene Was=

*) *Michelotti*, Sperimenti Idraulici principalemente diretti a confermare la Teoria, e facilitare la Pratica del misurare le acque correnti. Vol. II. Turino 1771. p. 116 etc.

**) Herrn Brünings, angef. Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers. Seite 100 u. f.

***) A. M. *Lorgna*, Memorie intorno all' Acque correnti. Verona 1777. p. 7 etc.

serhebel, um die Geschwindigkeit des Wassers in jeder Tiefe zu messen. An einem Pfahle AB
T. V. (Figur 45), welcher auf dem Grunde feststehet, ist
F. 46. eine blecherne Röhre CD befestiget, an deren Ende sich eine Rolle bei D befindet. Durch diese Röhre und über die Rolle geht ein Faden, an dessen Ende bei E eine Halbkugel befindlich ist. Das andere Ende des Fadens ist bei F an dem kurzen Arm eines Hebels FG befestiget, so daß wenn der Strom die Halbkugel forttreibt, ein Gewicht H am langen Arme des Hebels, mit dem Stoße des Wassers ins Gleichgewicht gebracht werden kann.

Damit der in E von dem Wasser gestoßene Körper immer auf einerlei Art getroffen werde, ist es besser eine Kugel daselbst anzubringen, nur muß das spezifische Gewicht derselben, dem spezifischen Gewichte des Wassers gleich seyn, damit der Faden DE beinahe in horizontaler Lage erhalten wird. Am besten ist es, den Hebelarm IG mit feinen nummerirten Zähnen zu versehen, und um zugleich die Reibung und Biegsamkeit des Fadens in Rechnung zu bringen, durch Versuche zu bestimmen, wie viel Gewicht in E ziehen muß, um das Gewicht H am Hebel IG im Gleichgewichte zu halten.

Hienach wird jede Nummer der Kerbe, für ein bestimmtes Gewicht H, einem gewissen Gewichte in E entsprechen, woraus sich leicht eine Tafel für die zugehörigen Geschwindigkeiten verfertigen läßt. Denn weil diese Gewichte, die Größe des Wasserstoßes gegen die bei E befestigte Kugel angeben, und die Quadratwurzeln derselben sich wie die Geschwindigkeiten des Wassers verhalten, so kann man leicht aus einigen durch Beobachtungen gefundenen Geschwindigkeiten für eine bestimmte Kugel, die übrigen berechnen. Auch lassen sich leicht größere oder kleinere Geschwindigkeiten finden, als die sind, welche das Gewicht H angiebt, weil man

sich nur eines kleinern oder größern Gewichts bedienen darf.

284. §.

Die Wasserfahne des Ximenes gründet sich darauf, daß an einer beweglichen Spindel AB (Fig. 46) eine Tafel oder Fahne C befestiget ist, welche senkrecht vom Strome in jeder Tiefe gestoßen werden kann, deren Stellung gegen die Richtung des Stroms, man aus dem Zeiger bei A, welcher sich über eine unbewegliche in Grade eingetheilte Tafel drehet, bemerkt. Um die an der Spindel befestigte Scheibe bei A, ist ein Faden gelegt, welcher über die Rolle D geht, an dessen Ende bei E, ein Gewicht mit dem Stoße des Wassers ins Gleichgewicht gesetzt werden kann, woraus sich auf eine ähnliche Art wie bei dem Wasserhebel oder der hydraulischen Schnellwage, die Geschwindigkeiten des anstoßenden Wassers finden lassen. Dieses Instrument dient auch den schiefen Stoß des Wassers zu messen. In den angeführten Nouve Sperienze Idrauliche etc. findet man mehreres hierüber. T. V. F. 46.

285. §.

Der von Herrn Brünings angegebene Geschwindigkeitsmesser oder Tachometer ist so eingerichtet, daß eine Tafel C (Figur 47) senkrecht von dem Strome nach der Richtung CD fortgestoßen wird. Am Ende der dünnen Stange CD, woran die Tafel befestiget ist, geht von D ein Faden über die Rolle E bis an den Hebelarm bei F, an dessen entgegengesetzten Arme ein Gewicht G dem Stoße des Wassers das Gleichgewicht hält. Herr Brünings hat mit diesem Instrumente sehr lehrreiche Versuche angestellt, welche nebst der vollständigen Beschreibung und Abbildung des Tachometers, sich in dessen Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers befinden. T. V. F. 47

286. §.

Der hydrometrische Flügel des Hr Woltmann gründet sich darauf, daß der Stu
T. V. F. 48 zwei kleine Flügel C, D (Figur 48) auf eine äh liche Art wie die Luft die Windmühlenflügel u treibt. An der Flügelwelle ist eine Schraube oh Ende in E, welche in ein gezähntes Rad F e greift, so daß sich durch dieses Rad, die Anz der Umdrehungen leicht bemerken läßt. Mit der Schnur GH ist man im Stande die Axe Rades zu erhöhen, damit solches nur so lange die Schraube ohne Ende greift, als man die S kunden zählt. Aus der Anzahl der Umläufe u der Umlaufszeit läßt sich alsdann durch eine B rechnung die Geschwindigkeit des Stroms fin und man sieht leicht daß dieses Instrument sich allen Tiefen, bei einer gehörigen Befestigung Stange AB anwenden läßt. Die Beschreib Theorie und den Gebrauch dieses Werkzeuges, det man in der bereits angeführten Schrift Herrn Woltmann: Theorie und Gebrauch hydrometrischen Flügels.

287. §.

Die Beschreibung der hydrometrischen F sche von Grandi, des Regulators von (stelli, und mehrere Untersuchungen über Geschw digkeitsmesser, befinden sich in Kästner angefüh Hydrodynamik, 270. §. S. 213 u f., und in Brünings'schen angeführten Abhandlung.

Te

T a f e l

für

die Geschwindigkeiten

welche ein Körper durch den freien Fall erlangt,

im rheinländischen Fußmaaße.

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
			2	0,001	0,2500			4	6	0,031	1,3919
			3	0,002	0,3536			4	7	0,032	1,4142
			5	0,003	0,4330			4	9	0,033	1,4361
			7	0,004	0,5000			4	11	0,034	1,4577
			9	0,005	0,5590			5	0	0,035	1,4790
			10	0,006	0,6124			5	2	0,036	1,5000
		1	0	0,007	0,6614			5	4	0,037	1,5207
		1	2	0,008	0,7071			5	6	0,038	1,5411
		1	4	0,009	0,7500			5	7	0,039	1,5612
		1	5	0,010	0,7906			5	9	0,040	1,5811
		1	7	0,011	0,8292			5	11	0,041	1,6008
		1	9	0,012	0,8660			6	1	0,042	1,6202
		1	10	0,013	0,9014			6	2	0,043	1,6394
		2	0	0,014	0,9354			6	4	0,044	1,6583
		2	2	0,015	0,9682			6	6	0,045	1,6771
		2	4	0,016	1,0000			6	7	0,046	1,6956
		2	5	0,017	1,0308			6	9	0,047	1,7139
		2	7	0,018	1,0607			6	11	0,048	1,7321
		2	9	0,019	1,0897			7	1	0,049	1,7500
		2	11	0,020	1,1180			7	2	0,050	1,7678
		3	0	0,021	1,1456			7	4	0,051	1,7854
		3	2	0,022	1,1726			7	6	0,052	1,8028
		3	4	0,023	1,1990			7	8	0,053	1,8200
		3	5	0,024	1,2247			7	9	0,054	1,8371
		3	7	0,025	1,2500			7	11	0,055	1,8540
		3	9	0,026	1,2748			8	1	0,056	1,8708
		3	11	0,027	1,2990			8	2	0,057	1,8875
		4	0	0,028	1,3229			8	4	0,058	1,9039
		4	2	0,029	1,3463			8	6	0,059	1,9203
		4	4	0,030	1,3693			8	8	0,060	1,9365

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Gesch
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fu
		8	9	0,061	1,9526		1	1	1	0,091	2,3
		8	11	0,062	1,9685		1	1	3	0,092	2,3
		9	1	0,063	1,9843		1	1	5	0,093	2,4
		9	3	0,064	2,0000		1	1	6	0,094	2,4
		9	4	0,065	2,0156		1	1	8	0,095	2,4
		9	6	0,066	2,0310		1	1	10	0,096	2,44
		9	8	0,067	2,0463		1	2	0	0,097	2,4
		9	10	0,068	2,0616		1	2	1	0,098	2,4
		9	11	0,069	2,0767		1	2	3	0,099	2,4
		10	1	0,070	2,0917		1	2	5	0,100	2,5
		10	3	0,071	2,1065		1	2	7	0,101	2,51
		10	4	0,072	2,1213		1	2	8	0,102	2,52
		10	6	0,073	2,1360		1	2	10	0,103	2,53
		10	8	0,074	2,1506		1	3	0	0,104	2,54
		10	10	0,075	2,1651		1	3	1	0,105	2,56
		10	11	0,076	2,1794		1	3	3	0,106	2,57
		11	1	0,077	2,1937		1	3	5	0,107	2,58
		11	3	0,078	2,2079		1	3	7	0,108	2,59
		11	5	0,079	2,2220		1	3	8	0,109	2,61
		11	6	0,080	2,2361		1	3	10	0,110	2,62
		11	8	0,081	2,2500		1	4	0	0,111	2,63
		11	10	0,082	2,2638		1	4	2	0,112	2,64
		11	11	0,083	2,2776		1	4	3	0,113	2,65
	1	0	1	0,084	2,2913		1	4	5	0,114	2,66
	1	0	3	0,085	2,3049		1	4	7	0,115	2,68
	1	0	5	0,086	2,3184		1	4	8	0,116	2,69
	1	0	6	0,087	2,3318		1	4	10	0,117	2,70
	1	0	8	0,088	2,3452		1	5	0	0,118	2,71
	1	0	10	0,089	2,3585		1	5	2	0,119	2,72
	1	1	0	0,090	2,3717		1	5	3	0,120	2,73

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	1	5	5	0,121	2,7500		1	9	9	0,151	3,0721
	1	5	7	0,122	2,7613		1	9	11	0,152	3,0822
	1	5	9	0,123	2,7726		1	10	0	0,153	3,0923
	1	5	10	0,124	2,7839		1	10	2	0,154	3,1024
	1	6	0	0,125	2,7951		1	10	4	0,155	3,1125
	1	6	2	0,126	2,8062		1	10	6	0,156	3,1225
	1	6	3	0,127	2,8174		1	10	7	0,157	3,1325
	1	6	5	0,128	2,8284		1	10	9	0,158	3,1425
	1	6	7	0,129	2,8395		1	10	11	0,159	3,1524
	1	6	9	0,130	2,8504		1	11	0	0,160	3,1623
	1	6	10	0,131	2,8614		1	11	2	0,161	3,1721
	1	7	0	0,132	2,8723		1	11	4	0,162	3,1820
	1	7	2	0,133	2,8831		1	11	6	0,163	3,1918
	1	7	4	0,134	2,8940		1	11	7	0,164	3,2016
	1	7	5	0,135	2,9047		1	11	9	0,165	3,2113
	1	7	7	0,136	2,9155		1	11	11	0,166	3,2210
	1	7	9	0,137	2,9262		2	0	1	0,167	3,2307
	1	7	10	0,138	2,9368		2	0	2	0,168	3,2404
	1	8	0	0,139	2,9475		2	0	4	0,169	3,2500
	1	8	2	0,140	2,9580		2	0	6	0,170	3,2596
	1	8	4	0,141	2,9686		2	0	7	0,171	3,2692
	1	8	5	0,142	2,9791		2	0	9	0,172	3,2787
	1	8	7	0,143	2,9896		2	0	11	0,173	3,2882
	1	8	9	0,144	3,0000		2	1	1	0,174	3,2977
	1	8	11	0,145	3,0104		2	1	2	0,175	3,3072
	1	9	0	0,146	3,0208		2	1	4	0,176	3,3166
	1	9	2	0,147	3,0311		2	1	6	0,177	3,3260
	1	9	4	0,148	3,0414		2	1	8	0,178	3,3354
	1	9	5	0,149	3,0516		2	1	9	0,179	3,3448
	1	9	7	0,150	3,0619		2	1	11	0,180	3,3541

Fallhöhe.					Geſchw.	Fallhöhe.					Geſ
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fu
	2	2	1	0,181	3,3634		2	6	5	0,211	3,63
	2	2	2	0,182	3,3727		2	6	6	0,212	3,64
	2	2	4	0,183	3,3819		2	6	8	0,213	3,64
	2	2	6	0,184	3,3912		2	6	10	0,214	3,65
	2	2	8	0,185	3,4004		2	7	0	0,215	3,66
	2	2	9	0,186	3,4095		2	7	1	0,216	3,67
	2	2	11	0,187	3,4187		2	7	3	0,217	3,68
	2	3	1	0,188	3,4278		2	7	5	0,218	3,69
	2	3	3	0,189	3,4369		2	7	6	0,219	3,69
	2	3	4	0,190	3,4460		2	7	8	0,220	3,70
	2	3	6	0,191	3,4551		2	7	10	0,221	3,71
	2	3	8	0,192	3,4641		2	8	0	0,222	3,72
	2	3	10	0,193	3,4731		2	8	1	0,223	3,73
	2	3	11	0,194	3,4821		2	8	3	0,224	3,74
	2	4	1	0,195	3,4911		2	8	5	0,225	3,75
	2	4	3	0,196	3,5000		2	8	7	0,226	3,75
	2	4	4	0,197	3,5089		2	8	8	0,227	3,76
	2	4	6	0,198	3,5178		2	8	10	0,228	3,77
	2	4	8	0,199	3,5267		2	9	0	0,229	3,78
	2	4	10	0,200	3,5355		2	9	1	0,230	3,79
	2	4	11	0,201	3,5444		2	9	3	0,231	3,79
	2	5	1	0,202	3,5532		2	9	5	0,232	3,80
	2	5	3	0,203	3,5620		2	9	7	0,233	3,81
	2	5	5	0,204	3,5707		2	9	8	0,234	3,82
	2	5	6	0,205	3,5795		2	9	10	0,235	3,83
	2	5	8	0,206	3,5882		2	10	0	0,236	3,84
	2	5	10	0,207	3,5969		2	10	2	0,237	3,84
	2	5	11	0,208	3,6056		2	10	3	0,238	3,85
	2	6	1	0,209	3,6142		2	10	5	0,239	3,86
	2	6	3	0,210	3,6228		2	10	7	0,240	3,87

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	2	10	8	0,241	3,8810		3	3	0	0,271	4,1155
	2	10	10	0,242	3,8891		3	3	2	0,272	4,1231
	2	11	0	0,243	3,8971		3	3	4	0,273	4,1307
	2	11	2	0,244	3,9051		3	3	5	0,274	4,1382
	2	11	3	0,245	3,9132		3	3	7	0,275	4,1458
	2	11	5	0,246	3,9211		3	3	9	0,276	4,1533
	2	11	7	0,247	3,9291		3	3	11	0,277	4,1608
	2	11	9	0,248	3,9370		3	4	0	0,278	4,1683
	2	11	10	0,249	3,9449		3	4	2	0,279	4,1758
	3	0	0	0,250	3,9528		3	4	4	0,280	4,1833
	3	0	2	0,251	3,9607		3	4	6	0,281	4,1908
	3	0	3	0,252	3,9686		3	4	7	0,282	4,1982
	3	0	5	0,253	3,9765		3	4	9	0,283	4,2057
	3	0	7	0,254	3,9843		3	4	11	0,284	4,2131
	3	0	9	0,255	3,9922		3	5	0	0,285	4,2205
	3	0	10	0,256	4,0000		3	5	2	0,286	4,2279
	3	1	0	0,257	4,0078		3	5	4	0,287	4,2353
	3	1	2	0,258	4,0156		3	5	6	0,288	4,2426
	3	1	4	0,259	4,0234		3	5	7	0,289	4,2500
	3	1	5	0,260	4,0311		3	5	9	0,290	4,2573
	3	1	7	0,261	4,0389		3	5	11	0,291	4,2647
	3	1	9	0,262	4,0466		3	6	1	0,292	4,2720
	3	1	10	0,263	4,0543		3	6	2	0,293	4,2793
	3	2	0	0,264	4,0620		3	6	4	0,294	4,2866
	3	2	2	0,265	4,0697		3	6	6	0,295	4,2939
	3	2	4	0,266	4,0774		3	6	7	0,296	4,3012
	3	2	5	0,267	4,0850		3	6	9	0,297	4,3084
	3	2	7	0,268	4,0927		3	6	11	0,298	4,3157
	3	2	9	0,269	4,1003		3	7	1	0,299	4,3229
	3	2	11	0,270	4,1079		3	7	2	0,300	4,3301

Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	3	7	4	0,301	4,3373
	3	7	6	0,302	4,3445
	3	7	8	0,303	4,3517
	3	7	9	0,304	4,3589
	3	7	11	0,305	4,3661
	3	8	1	0,306	4,3732
	3	8	2	0,307	4,3804
	3	8	4	0,308	4,3875
	3	8	6	0,309	4,3946
	3	8	8	0,310	4,4017
	3	8	9	0,311	4,4088
	3	8	11	0,312	4,4159
	3	9	1	0,313	4,4230
	3	9	3	0,314	4,4300
	3	9	4	0,315	4,4371
	3	9	6	0,316	4,4441
	3	9	8	0,317	4,4511
	3	9	10	0,318	4,4581
	3	9	11	0,319	4,4651
	3	10	1	0,320	4,4721
	3	10	3	0,321	4,4791
	3	10	4	0,322	4,4861
	3	10	6	0,323	4,4931
	3	10	8	0,324	4,5000
	3	10	10	0,325	4,5069
	3	10	11	0,326	4,5139
	3	11	1	0,327	4,5208
	3	11	3	0,328	4,5277
	3	11	5	0,329	4,5346
	3	11	6	0,330	4,5415

Fallhöhe.					Ges
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	F
	3	11	8	0,331	4,54
	3	11	10	0,332	4,55
	3	11	11	0,333	4,56
	4	0	1	0,334	4,56
	4	0	3	0,335	4,57
	4	0	5	0,336	4,58
	4	0	6	0,337	4,58
	4	0	8	0,338	4,59
	4	0	10	0,339	4,60
	4	1	0	0,340	4,60
	4	1	1	0,341	4,61
	4	1	3	0,342	4,62
	4	1	5	0,343	4,63
	4	1	6	0,344	4,63
	4	1	8	0,345	4,64
	4	1	10	0,346	4,65
	4	2	0	0,347	4,65
	4	2	1	0,348	4,66
	4	2	3	0,349	4,67
	4	2	5	0,350	4,67
	4	2	7	0,351	4,68
	4	2	8	0,352	4,69
	4	2	10	0,353	4,69
	4	3	0	0,354	4,70
	4	3	1	0,355	4,71
	4	3	3	0,856	4,71
	4	3	5	0,357	4,72
	4	3	7	0,358	4,73
	4	3	8	0,359	4,73
	4	3	10	0,360	4,74

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	4	4	0	0,361	4,7500		4	8	4	0,391	4,9434
	4	4	2	0,362	4,7566		4	8	5	0,392	4,9497
	4	4	3	0,363	4,7631		4	8	7	0,393	4,9561
	4	4	5	0,364	4,7697		4	8	9	0,394	4,9624
	4	4	7	0,365	4,7762		4	8	11	0,395	4,9687
	4	4	8	0,366	4,7828		4	9	0	0,396	4,9749
	4	4	10	0,367	4,7893		4	9	2	0,397	4,9812
	4	5	0	0,368	4,7958		4	9	4	0,398	4,9875
	4	5	2	0,369	4,8023		4	9	5	0,399	4,9937
	4	5	3	0,370	4,8088		4	9	7	0,400	5,0000
	4	5	5	0,371	4,8153		4	9	9	0,401	5,0062
	4	5	7	0,372	4,8218		4	9	11	0,402	5,0125
	4	5	9	0,373	4,8283		4	10	0	0,403	5,0187
	4	5	10	0,374	4,8348		4	10	2	0,404	5,0249
	4	6	0	0,375	4,8412		4	10	4	0,405	5,0312
	4	6	2	0,376	4,8477		4	10	6	0,406	5,0374
	4	6	3	0,377	4,8541		4	10	7	0,407	5,0436
	4	6	5	0,378	4,8606		4	10	9	0,408	5,0498
	4	6	7	0,379	4,8670		4	10	11	0,409	5,0559
	4	6	9	0,380	4,8734		4	11	0	0,410	5,0621
	4	6	10	0,381	4,8798		4	11	2	0,411	5,0683
	4	7	0	0,382	4,8862		4	11	4	0,412	5,0744
	4	7	2	0,383	4,8926		4	11	6	0,413	5,0806
	4	7	4	0,384	4,8990		4	11	7	0,414	5,0867
	4	7	5	0,385	4,9054		4	11	9	0,415	5,0929
	4	7	7	0,386	4,9117		4	11	11	0,416	5,0990
	4	7	9	0,387	4,9181		5	0	1	0,417	5,1051
	4	7	10	0,388	4,9244		5	0	2	0,418	5,1113
	4	8	0	0,389	4,9308		5	0	4	0,419	5,1174
	4	8	2	0,390	4,9371		5	0	6	0,420	5,1235.

Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	5	0	7	0,421	5,1296
	5	0	9	0,422	5,1357
	5	0	11	0,423	5,1417
	5	1	1	0,424	5,1478
	5	1	2	0,425	5,1539
	5	1	4	0,426	5,1599
	5	1	6	0,427	5,1660
	5	1	8	0,428	5,1720
	5	1	9	0,429	5,1781
	5	1	11	0,430	5,1841
	5	2	1	0,431	5,1901
	5	2	2	0,432	5,1962
	5	2	4	0,433	5,2022
	5	2	6	0,434	5,2082
	5	2	8	0,435	5,2142
	5	2	9	0,436	5,2202
	5	2	11	0,437	5,2261
	5	3	1	0,438	5,2321
	5	3	3	0,439	5,2381
	5	3	4	0,440	5,2440
	5	3	6	0,441	5,2500
	5	3	8	0,442	5,2559
	5	3	10	0,443	5,2619
	5	3	11	0,444	5,2678
	5	4	1	0,445	5,2738
	5	4	3	0,446	5,2797
	5	4	4	0,447	5,2856
	5	4	6	0,448	5,2915
	5	4	8	0,449	5,2974
	5	4	10	0,450	5,3033

Fallhöhe.					Ges[illegible]
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	F[illegible]
	5	4	11	0,451	5,3[illegible]
	5	5	1	0,452	5,31[illegible]
	5	5	3	0,453	5,3[illegible]
	5	5	5	0,454	5,3[illegible]
	5	5	6	0,455	5,3[illegible]
	5	5	8	0,456	5,3[illegible]
	5	5	10	0,457	5,34[illegible]
	5	5	11	0,458	5,3[illegible]
	5	6	1	0,459	5,3[illegible]
	5	6	3	0,460	5,3[illegible]
	5	6	5	0,461	5,3[illegible]
	5	6	6	0,462	5,37[illegible]
	5	6	8	0,463	5,37[illegible]
	5	6	10	0,464	5,38[illegible]
	5	7	0	0,465	5,39[illegible]
	5	7	1	0,466	5,39[illegible]
	5	7	3	0,467	5,40[illegible]
	5	7	5	0,468	5,40[illegible]
	5	7	6	0,469	5,41[illegible]
	5	7	8	0,470	5,41[illegible]
	5	7	10	0,471	5,42[illegible]
	5	8	0	0,472	5,43[illegible]
	5	8	1	0,473	5,43[illegible]
	5	8	3	0,474	5,44[illegible]
	5	8	5	0,475	5,44[illegible]
	5	8	7	0,476	5,45[illegible]
	5	8	8	0,477	5,46[illegible]
	5	8	10	0,478	5,46[illegible]
	5	9	0	0,479	5,47[illegible]
	5	9	1	0,480	5,47[illegible]

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	5	9	3	0,481	5,4829		6	1	7	0,511	5,6513
	5	9	5	0,482	5,4886		6	1	9	0,512	5,6569
	5	9	7	0,483	5,4943		6	1	10	0,513	5,6624
	5	9	8	0,484	5,5000		6	2	0	0,514	5,6679
	5	9	10	0,485	5,5057		6	2	2	0,515	5,6734
	5	10	0	0,486	5,5114		6	2	4	0,516	5,6789
	5	10	2	0,487	5,5170		6	2	5	0,517	5,6844
	5	10	3	0,488	5,5227		6	2	7	0,518	5,6899
	5	10	5	0,489	5,5283		6	2	9	0,519	5,6954
	5	10	7	0,490	5,5340		6	2	11	0,520	5,7009
	5	10	8	0,491	5,5396		6	3	0	0,521	5,7064
	5	10	10	0,492	5,5453		6	3	2	0,522	5,7118
	5	11	0	0,493	5,5509		6	3	4	0,523	5,7173
	5	11	2	0,494	5,5565		6	3	5	0,524	5,7228
	5	11	3	0,495	5,5621		6	3	7	0,525	5,7282
	5	11	5	0,496	5,5678		6	3	9	0,526	5,7337
	5	11	7	0,497	5,5734		6	3	11	0,527	5,7391
	5	11	9	0,498	5,5790		6	4	0	0,528	5,7446
	5	11	10	0,499	5,5846		6	4	2	0,529	5,7500
	6	0	0	0,500	5,5902		6	4	4	0,530	5,7554
	6	0	2	0,501	5,5958		6	4	6	0,531	5,7609
	6	0	3	0,502	5,6013		6	4	7	0,532	5,7663
	6	0	5	0,503	5,6069		6	4	9	0,533	5,7717
	6	0	7	0,504	5,6125		6	4	11	0,534	5,7771
	6	0	9	0,505	5,6181		6	5	0	0,535	5,7825
	6	0	10	0,506	5,6236		6	5	2	0,536	5,7879
	6	1	0	0,507	5,6292		6	5	4	0,537	5,7933
	6	1	2	0,508	5,6347		6	5	6	0,538	5,7987
	6	1	4	0,509	5,6403		6	5	7	0,539	[illegible]
	6	1	5	0,510	5,6458		6	5	9	0,540	[illegible]

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Gesc
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fu
	6	5	11	0,541	5,8149		6	10	3	0,571	5,97
	6	6	1	0,542	5,8202		6	10	4	0,572	5,97
	6	6	2	0,543	5,8256		6	10	6	0,573	5,98
	6	6	4	0,544	5,8310		6	10	8	0,574	5,98
	6	6	6	0,545	5,8363		6	10	10	0,575	5,99
	6	6	7	0,546	5,8417		6	10	11	0,576	6,00
	6	6	9	0,547	5,8470		6	11	1	0,577	6,00
	6	6	11	0,548	5,8523		6	11	3	0,578	6,01
	6	7	1	0,549	5,8577		6	11	5	0,579	6,01
	6	7	2	0,550	5,8630		6	11	6	0,580	6,02
	6	7	4	0,551	5,8683		6	11	8	0,581	6,02
	6	7	6	0,552	5,8737		6	11	10	0,582	6,03
	6	7	8	0,553	5,8790		6	11	11	0,583	6,03
	6	7	9	0,554	5,8843		7	0	1	0,584	6,04
	6	7	11	0,555	5,8896		7	0	3	0,585	6,04
	6	8	1	0,556	5,8949		7	0	5	0,586	6,05
	6	8	2	0,557	5,9002		7	0	6	0,587	6,05
	6	8	4	0,558	5,9055		7	0	8	0,588	6,06
	6	8	6	0,559	5,9108		7	0	10	0,589	6,06
	6	8	8	0,560	5,9161		7	1	0	0,590	6,07
	6	8	9	0,561	5,9214		7	1	1	0,591	6,07
	6	8	11	0,562	5,9266		7	1	3	0,592	6,08
	6	9	1	0,563	5,9319		7	1	5	0,593	6,08
	6	9	3	0,564	5,9372		7	1	6	0,594	6,09
	6	9	4	0,565	5,9424		7	1	8	0,595	6,09
	6	9	6	0,566	5,9477		7	1	10	0,596	6,10
	6	9	8	0,567	5,9529		7	2	0	0,597	6,10
	6	9	10	0,568	5,9582		7	2	1	0,598	6,11
	6	9	11	0,569	5,9634		7	2	3	0,599	6,11
	6	10	1	0,570	5,9687		7	2	5	0,600	6,12

Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	7	2	7	0,601	6,1288
	7	2	8	0,602	6,1339
	7	2	10	0,603	6,1390
	7	3	0	0,604	6,1441
	7	3	1	0,605	6,1492
	7	3	3	0,606	6,1543
	7	3	5	0,607	6,1593
	7	3	7	0,608	6,1644
	7	3	8	0,609	6,1695
	7	3	10	0,610	6,1745
	7	4	0	0,611	6,1796
	7	4	2	0,612	6,1847
	7	4	3	0,613	6,1897
	7	4	5	0,614	6,1948
	7	4	7	0,615	6,1998
	7	4	8	0,616	6,2048
	7	4	10	0,617	6,2099
	7	5	0	0,618	6,2149
	7	5	2	0,619	6,2199
	7	5	3	0,620	6,2249
	7	5	5	0,621	6,2300
	7	5	7	0,622	6,2350
	7	5	9	0,623	6,2400
	7	5	10	0,624	6,2450
	7	6	0	0,625	6,2500
	7	6	2	0,626	6,2550
	7	6	3	0,627	6,2600
	7	6	5	0,628	6,2650
	7	6	7	0,629	6,2700
	7	6	9	0,630	6,2750
	7	6	10	0,631	6,2799
	7	7	0	0,632	6,2849
	7	7	2	0,633	6,2899
	7	7	4	0,634	6,2948
	7	7	5	0,635	6,2998
	7	7	7	0,636	6,3048
	7	7	9	0,637	6,3097
	7	7	10	0,638	6,3147
	7	8	0	0,639	6,3196
	7	8	2	0,640	6,3246
	7	8	4	0,641	6,3295
	7	8	5	0,642	6,3344
	7	8	7	0,643	6,3394
	7	8	9	0,644	6,3443
	7	8	11	0,645	6,3492
	7	9	0	0,646	6,3541
	7	9	2	0,647	6,3590
	7	9	4	0,648	6,3640
	7	9	5	0,649	6,3689
	7	9	7	0,650	6,3738
	7	9	9	0,651	6,3787
	7	9	11	0,652	6,3836
	7	10	0	0,653	6,3885
	7	10	2	0,654	6,3934
	7	10	4	0,655	6,3982
	7	10	6	0,656	6,4031
	7	10	7	0,657	6,4080
	7	10	9	0,658	6,4129
	7	10	11	0,659	6,4177
	7	11	0	0,660	6,4226

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Gesch[w.]
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fu[ß.]
	7	11	2	0,661	6,4275		8	3	6	0,691	6,57
	7	11	4	0,662	6,4323		8	3	8	0,692	6,57
	7	11	6	0,663	6,4372		8	3	10	0,693	6,58
	7	11	7	0,664	6,4420		8	3	11	0,694	6,58
	7	11	9	0,665	6,4469		8	4	1	0,695	6,59
	7	11	11	0,666	6,4517		8	4	3	0,696	6,59
	8	0	1	0,667	6,4566		8	4	4	0,697	6,60
	8	0	2	0,668	6,4614		8	4	6	0,698	6,60
	8	0	4	0,669	6,4663		8	4	8	0,699	6,60
	8	0	6	0,670	6,4711		8	4	10	0,700	6,61
	8	0	7	0,671	6,4759		8	4	11	0,701	6,61
	8	0	9	0,672	6,4807		8	5	1	0,702	6,62
	8	0	11	0,673	6,4856		8	5	3	0,703	6,62
	8	1	1	0,674	6,4904		8	5	5	0,704	6,63
	8	1	2	0,675	6,4952		8	5	6	0,705	6,63
	8	1	4	0,676	6,5000		8	5	8	0,706	6,64
	8	1	6	0,677	6,5048		8	5	10	0,707	6,64
	8	1	8	0,678	6,5096		8	5	11	0,708	6,65
	8	1	9	0,679	6,5144		8	6	1	0,709	6,65
	8	1	11	0,680	6,5192		8	6	3	0,710	6,66
	8	2	1	0,681	6,5240		8	6	5	0,711	6,66
	8	2	2	0,682	6,5288		8	6	6	0,712	6,67
	8	2	4	0,683	6,5336		8	6	8	0,713	6,67
	8	2	6	0,684	6,5383		8	6	10	0,714	6,68
	8	2	8	0,685	6,5431		8	7	0	0,715	6,68
	8	2	9	0,686	6,5479		8	7	1	0,716	6,68
	8	2	11	0,687	6,5527		8	7	3	0,717	6,69
	8	3	1	0,688	6,5574		8	7	5	0,718	6,69
	8	3	3	0,689	6,5622		8	7	6	0,719	6,70
	8	3	4	0,690	6,5670		8	7	8	0,720	6,70

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	8	7	10	0,721	6,7129		9	0	2	0,751	6,8511
	8	8	0	0,722	6,7175		9	0	3	0,752	6,8557
	8	8	1	0,723	6,7222		9	0	5	0,753	6,8602
	8	8	3	0,724	6,7268		9	0	7	0,754	6,8648
	8	8	5	0,725	6,7315		9	0	9	0,755	6,8693
	8	8	7	0,726	6,7361		9	0	10	0,756	6,8739
	8	8	8	0,727	6,7407		9	1	0	0,757	6,8784
	8	8	10	0,728	6,7454		9	1	2	0,758	6,8829
	8	9	0	0,729	6,7500		9	1	4	0,759	6,8875
	8	9	1	0,730	6,7546		9	1	5	0,760	6,8920
	8	9	3	0,731	6,7593		9	1	7	0,761	6,8966
	8	9	5	0,732	6,7639		9	1	9	0,762	6,9011
	8	9	7	0,733	6,7685		9	1	10	0,763	6,9056
	8	9	8	0,734	6,7731		9	2	0	0,764	6,9101
	8	9	10	0,735	6,7777		9	2	2	0,765	6,9147
	8	10	0	0,736	6,7823		9	2	4	0,766	6,9192
	8	10	2	0,737	6,7869		9	2	5	0,767	6,9237
	8	10	3	0,738	6,7915		9	2	7	0,768	6,9282
	8	10	5	0,739	6,7961		9	2	9	0,769	6,9327
	8	10	7	0,740	6,8007		9	2	11	0,770	6,9372
	8	10	8	0,741	6,8053		9	3	0	0,771	6,9417
	8	10	10	0,742	6,8099		9	3	2	0,772	6,9462
	8	11	0	0,743	6,8145		9	3	4	0,773	6,9507
	8	11	2	0,744	6,8191		9	3	5	0,774	6,9552
	8	11	3	0,745	6,8237		9	3	7	0,775	6,9597
	8	11	5	0,746	6,8283		9	3	9	0,776	6,9642
	8	11	7	0,747	6,8328		9	3	11	0,777	6,9687
	8	11	9	0,748	6,8374		9	4	0	0,778	6,9732
	8	11	10	0,749	6,8420		9	4	2	0,779	6,9776
	9	0	0	0,750	6,8465		9	4	4	0,780	6,9821

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Ge[...]
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	F[...]
	9	4	6	0,781	6,9866		9	8	9	0,811	7,1
	9	4	7	0,782	6,9911		9	8	11	0,812	7,1
	9	4	9	0,783	6,9955		9	9	1	0,813	7,1
	9	4	11	0,784	7,0000		9	9	3	0,814	7,1
	9	5	0	0,785	7,0045		9	9	4	0,815	7,1
	9	5	2	0,786	7,0089		9	9	6	0,816	7,1
	9	5	4	0,787	7,0134		9	9	8	0,817	7,1
	9	5	6	0,788	7,0178		9	9	10	0,818	7,1
	9	5	7	0,789	7,0223		9	9	11	0,819	7,1
	9	5	9	0,790	7,0267		9	10	1	0,820	7,15
	9	5	11	0,791	7,0312		9	10	3	0,821	7,16
	9	6	1	0,792	7,0356		9	10	4	0,822	7,16
	9	6	2	0,793	7,0401		9	10	6	0,823	7,17
	9	6	4	0,794	7,0445		9	10	8	0,824	7,17
	9	6	6	0,795	7,0489		9	10	10	0,825	7,18
	9	6	7	0,796	7,0534		9	10	11	0,826	7,18
	9	6	9	0,797	7,0578		9	11	1	0,827	7,18
	9	6	11	0,798	7,0622		9	11	3	0,828	7,19
	9	7	1	0,799	7,0666		9	11	5	0,829	7,19
	9	7	2	0,800	7,0711		9	11	6	0,830	7,20
	9	7	4	0,801	7,0755		9	11	8	0,831	7,20
	9	7	6	0,802	7,0799		9	11	10	0,832	7,21
	9	7	8	0,803	7,0843		9	11	11	0,833	7,21
	9	7	9	0,804	7,0887		10	0	1	0,834	7,21
	9	7	11	0,805	7,0931		10	0	3	0,835	7,22
	9	8	1	0,806	7,0975		10	0	5	0,836	7,22
	9	8	2	0,807	7,1019		10	0	6	0,837	7,23
	9	8	4	0,808	7,1063		10	0	8	0,838	7,23
	9	8	6	0,809	7,1107		10	0	10	0,839	7,24
	9	8	8	0,810	7,1151		10	1	0	0,840	7,245

Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	10	1	1	0,841	7,2500
	10	1	3	0,842	7,2543
	10	1	5	0,843	7,2586
	10	1	6	0,844	7,2629
	10	1	8	0,845	7,2672
	10	1	10	0,846	7,2715
	10	2	0	0,847	7,2758
	10	2	1	0,848	7,2801
	10	2	3	0,849	7,2844
	10	2	5	0,850	7,2887
	10	2	7	0,851	7,2930
	10	2	8	0,852	7,2973
	10	2	10	0,853	7,3015
	10	3	0	0,854	7,3058
	10	3	1	0,855	7,3101
	10	3	3	0,856	7,3144
	10	3	5	0,857	7,3186
	10	3	7	0,858	7,3229
	10	3	8	0,859	7,3272
	10	3	10	0,860	7,3314
	10	4	0	0,861	7,3357
	10	4	2	0,862	7,3400
	10	4	3	0,863	7,3442
	10	4	5	0,864	7,3485
	10	4	7	0,865	7,3527
	10	4	8	0,866	7,3570
	10	4	10	0,867	7,3612
	10	5	0	0,868	7,3655
	10	5	2	0,869	7,3697
	10	5	3	0,870	7,3739
	10	5	5	0,871	7,3782
	10	5	7	0,872	7,3824
	10	5	9	0,873	7,3866
	10	5	10	0,874	7,3909
	10	6	0	0,875	7,3951
	10	6	2	0,876	7,3993
	10	6	3	0,877	7,4035
	10	6	5	0,878	7,4078
	10	6	7	0,879	7,4120
	10	6	9	0,880	7,4162
	10	6	10	0,881	7,4204
	10	7	0	0,882	7,4246
	10	7	2	0,883	7,4288
	10	7	4	0,884	7,4330
	10	7	5	0,885	7,4372
	10	7	7	0,886	7,4414
	10	7	9	0,887	7,4456
	10	7	10	0,888	7,4498
	10	8	0	0,889	7,4540
	10	8	2	0,890	7,4582
	10	8	4	0,891	7,4624
	10	8	5	0,892	7,4666
	10	8	7	0,893	7,4708
	10	8	9	0,894	7,4750
	10	8	11	0,895	7,4791
	10	9	0	0,896	7,4833
	10	9	2	0,897	7,4875
	10	9	4	0,898	7,4917
	10	9	5	0,899	7,4958
	10	9	7	0,900	7,5000

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Ge…
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	F…
	10	9	9	0,901	7,5042		11	2	1	0,931	7,6
	10	9	11	0,902	7,5083		11	2	2	0,932	7,6
	10	10	0	0,903	7,5125		11	2	4	0,933	7,6
	10	10	2	0,904	7,5166		11	2	6	0,934	7,6
	10	10	4	0,905	7,5208		11	2	8	0,935	7,6
	10	10	6	0,906	7,5250		11	2	9	0,936	7,6
	10	10	7	0,907	7,5291		11	2	11	0,937	7,6
	10	10	9	0,908	7,5333		11	3	1	0,938	7,6
	10	10	11	0,909	7,5374		11	3	3	0,939	7,6
	10	11	0	0,910	7,5416		11	3	4	0,940	7,6
	10	11	2	0,911	7,5457		11	3	6	0,941	7,6
	10	11	4	0,912	7,5498		11	3	8	0,942	7,6
	10	11	6	0,913	7,5540		11	3	10	0,943	7,6
	10	11	7	0,914	7,5581		11	3	11	0,944	7,6
	10	11	9	0,915	7,5622		11	4	1	0,945	7,6
	10	11	11	0,916	7,5664		11	4	3	0,946	7,6
	11	0	1	0,917	7,5705		11	4	4	0,947	7,6
	11	0	2	0,918	7,5746		11	4	6	0,948	7,6
	11	0	4	0,919	7,5788		11	4	8	0,949	7,7
	11	0	6	0,920	7,5829		11	4	10	0,950	7,7
	11	0	7	0,921	7,5870		11	4	11	0,951	7,7
	11	0	9	0,922	7,5911		11	5	1	0,952	7,7
	11	0	11	0,923	7,5952		11	5	3	0,953	7,7
	11	1	1	0,924	7,5993		11	5	5	0,954	7,7
	11	1	2	0,925	7,6035		11	5	6	0,955	7,7
	11	1	4	0,926	7,6076		11	5	8	0,956	7,7
	11	1	6	0,927	7,6117		11	5	10	0,957	7,7
	11	1	8	0,928	7,6158		11	5	11	0,958	7,7
	11	1	9	0,929	7,6199		11	6	1	0,959	7,7
	11	1	11	0,930	7,6240		11	6	3	0,960	7,7

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	11	6	5	0,961	7,7500		11	10	8	0,991	7,8700
	11	6	6	0,962	7,7540		11	10	10	0,992	7,8740
	11	6	8	0,963	7,7581		11	11	0	0,993	7,8780
	11	6	10	0,964	7,7621		11	11	2	0,994	7,8819
	11	7	0	0,965	7,7661		11	11	3	0,995	7,8859
	11	7	1	0,966	7,7701		11	11	5	0,996	7,8899
	11	7	3	0,967	7,7742		11	11	7	0,997	7,8938
	11	7	5	0,968	7,7782		11	11	9	0,998	7,8978
	11	7	6	0,969	7,7822		11	11	10	0,999	7,9017
	11	7	8	0,970	7,7862	1	0	0	0	1,000	7,9057
	11	7	10	0,971	7,7902	1	0	1	5	1,01	7,9451
	11	8	0	0,972	7,7942	1	0	2	11	1,02	7,9844
	11	8	1	0,973	7,7982	1	0	4	4	1,03	8,0234
	11	8	3	0,974	7,8022	1	0	5	9	1,04	8,0622
	11	8	5	0,975	7,8062	1	0	7	2	1,05	8,1009
	11	8	7	0,976	7,8102	1	0	8	8	1,06	8,1394
	11	8	8	0,977	7,8142	1	0	10	1	1,07	8,1777
	11	8	10	0,978	7,8182	1	0	11	6	1,08	8,2158
	11	9	0	0,979	7,8222	1	1	1	0	1,09	8,2538
	11	9	1	0,980	7,8262	1	1	2	5	1,10	8,2916
	11	9	3	0,981	7,8302	1	1	3	10	1,11	8,3292
	11	9	5	0,982	7,8342	1	1	5	3	1,12	8,3666
	11	9	7	0,983	7,8382	1	1	6	9	1,13	8,4039
	11	9	8	0,984	7,8422	1	1	8	2	1,14	8,4410
	11	9	10	0,985	7,8462	1	1	9	7	1,15	8,4779
	11	10	0	0,986	7,8502	1	1	11	0	1,16	8,5147
	11	10	2	0,987	7,8541	1	2	0	6	1,17	8,5513
	11	10	3	0,988	7,8581	1	2	1	11	1,18	8,5878
	11	10	5	0,989	7,8621	1	2	3	4	1,19	8,6241
	11	10	7	0,990	7,8661	1	2	4	10	1,20	8,6602

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
1	2	6	3	1,21	8,6962	1	6	1	5	1,51	9,7147
1	2	7	8	1,22	8,7321	1	6	2	11	1,52	9,7468
1	2	9	1	1,23	8,7678	1	6	4	4	1,53	9,7788
1	2	10	7	1,24	8,8034	1	6	5	9	1,54	9,8107
1	3	0	0	1,25	8,8388	1	6	7	2	1,55	9,8425
1	3	1	5	1,26	8,8741	1	6	8	8	1,56	9,8742
1	3	2	11	1,27	8,9093	1	6	10	1	1,57	9,9058
1	3	4	4	1,28	8,9443	1	6	11	6	1,58	9,9373
1	3	5	9	1,29	8,9792	1	7	1	0	1,59	9,9687
1	3	7	2	1,30	9,0139	1	7	2	5	1,60	10,0000
1	3	8	8	1,31	9,0485	1	7	3	10	1,61	10,0312
1	3	10	1	1,32	9,0830	1	7	5	3	1,62	10,0623
1	3	11	6	1,33	9,1173	1	7	6	9	1,63	10,0933
1	4	1	0	1,34	9,1515	1	7	8	2	1,64	10,1242
1	4	2	5	1,35	9,1856	1	7	9	7	1,65	10,1550
1	4	3	10	1,36	9,2195	1	7	11	0	1,66	10,1858
1	4	5	3	1,37	9,2534	1	8	0	6	1,67	10,2164
1	4	6	9	1,38	9,2871	1	8	1	11	1,68	10,2470
1	4	8	2	1,39	9,3207	1	8	3	4	1,69	10,2774
1	4	9	7	1,40	9,3541	1	8	4	10	1,70	10,3078
1	4	11	0	1,41	9,3875	1	8	6	3	1,71	10,3380
1	5	0	6	1,42	9,4207	1	8	7	8	1,72	10,3682
1	5	1	11	1,43	9,4538	1	8	9	1	1,73	10,3983
1	5	3	4	1,44	9,4868	1	8	10	7	1,74	10,4283
1	5	4	10	1,45	9,5197	1	9	0	0	1,75	10,4583
1	5	6	3	1,46	9,5525	1	9	1	5	1,76	10,4881
1	5	7	8	1,47	9,5852	1	9	2	11	1,77	10,5178
1	5	9	1	1,48	9,6177	1	9	4	4	1,78	10,5475
1	5	10	7	1,49	9,6502	1	9	5	9	1,79	10,5771
1	6	0	0	1,50	9,6825	1	9	7	2	1,80	10,6066

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
1	9	8	8	1,81	10,6360	2	1	3	10	2,11	11,4837
1	9	10	1	1,82	10,6654	2	1	5	3	2,12	11,5109
1	9	11	6	1,83	10,6946	2	1	6	9	2,13	11,5380
1	10	1	0	1,84	10,7238	2	1	8	2	2,14	11,5650
1	10	2	5	1,85	10,7529	2	1	9	7	2,15	11,5920
1	10	3	10	1,86	10,7819	2	1	11	0	2,16	11,6190
1	10	5	3	1,87	10,8108	2	2	0	6	2,17	11,6458
1	10	6	9	1,88	10,8397	2	2	1	11	2,18	11,6726
1	10	8	2	1,89	10,8685	2	2	3	4	2,19	11,6993
1	10	9	7	1,90	10,8972	2	2	4	10	2,20	11,7260
1	10	11	0	1,91	10,9259	2	2	6	3	2,21	11,7526
1	11	0	6	1,92	10,9545	2	2	7	8	2,22	11,7792
1	11	1	11	1,93	10,9830	2	2	9	1	2,23	11,8057
1	11	3	4	1,94	11,0114	2	2	10	7	2,24	11,8322
1	11	4	10	1,95	11,0397	2	3	0	0	2,25	11,8586
1	11	6	3	1,96	11,0680	2	3	1	5	2,26	11,8849
1	11	7	8	1,97	11,0962	2	3	2	11	2,27	11,9112
1	11	9	1	1,98	11,1243	2	3	4	4	2,28	11,9373
1	11	10	7	1,99	11,1523	2	3	5	9	2,29	11,9635
2	0	0	0	2,00	11,1803	2	3	7	2	2,30	11,9896
2	0	1	5	2,01	11,2082	2	3	8	8	2,31	12,0156
2	0	2	11	2,02	11,2361	2	3	10	1	2,32	12,0416
2	0	4	4	2,03	11,2639	2	3	11	6	2,33	12,0675
2	0	5	9	2,04	11,2916	2	4	1	0	2,34	12,0934
2	0	7	2	2,05	11,3192	2	4	2	5	2,35	12,1192
2	0	8	8	2,06	11,3468	2	4	3	10	2,36	12,1450
2	0	10	1	2,07	11,3743	2	4	5	3	2,37	12,1707
2	0	11	6	2,08	11,4018	2	4	6	9	2,38	12,1963
2	1	1	0	2,09	11,4291	2	4	8	2	2,39	12,2219
2	1	2	5	2,10	11,4564	2	4	9	7	2,40	12,2474

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
2	4	11	0	2,41	12,2729	2	8	6	3	2,71	13,014
2	5	0	6	2,42	12,2984	2	8	7	8	2,72	13,038
2	5	1	11	2,43	12,3238	2	8	9	1	2,73	13,062
2	5	3	4	2,44	12,3491	2	8	10	7	2,74	13,086
2	5	4	10	2,45	12,3744	2	9	0	0	2,75	13,110
2	5	6	3	2,46	12,3996	2	9	1	5	2,76	13,133
2	5	7	8	2,47	12,4248	2	9	2	11	2,77	13,157
2	5	9	1	2,48	12,4499	2	9	4	4	2,78	13,181
2	5	10	7	2,49	12,4750	2	9	5	9	2,79	13,205
2	6	0	0	2,50	12,5000	2	9	7	2	2,80	13,228
2	6	1	5	2,51	12,5250	2	9	8	8	2,81	13,25
2	6	2	11	2,52	12,5499	2	9	10	1	2,82	13,27
2	6	4	4	2,53	12,5748	2	9	11	6	2,83	13,29
2	6	5	9	2,54	12,5996	2	10	1	0	2,84	13,32
2	6	7	2	2,55	12,6244	2	10	2	5	2,85	13,34
2	6	8	8	2,56	12,6491	2	10	3	10	2,86	13,36
2	6	10	1	2,57	12,6738	2	10	5	3	2,87	13,39
2	6	11	6	2,58	12,6984	2	10	6	9	2,88	13,41
2	7	1	0	2,59	12,7230	2	10	8	2	2,89	13,43
2	7	2	5	2,60	12,7475	2	10	9	7	2,90	13,46
2	7	3	10	2,61	12,7720	2	10	11	0	2,91	13,48
2	7	5	3	2,62	12,7965	2	11	0	6	2,92	13,50
2	7	6	9	2,63	12,8209	2	11	1	11	2,93	13,53
2	7	8	2	2,64	12,8452	2	11	3	4	2,94	13,55
2	7	9	7	2,65	12,8695	2	11	4	10	2,95	13,57
2	7	11	0	2,66	12,8938	2	11	6	3	2,96	13,60
2	8	0	6	2,67	12,9180	2	11	7	8	2,97	13,62
2	8	1	11	2,68	12,9422	2	11	9	1	2,98	13,64
2	8	3	4	2,69	12,9663	2	11	10	7	2,99	13,67
2	8	4	10	2,70	12,9904	3	0	0	0	3,00	13,69

Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
3	0	1	5	3,01	13,7159
3	0	2	11	3,02	13,7386
3	0	4	4	3,03	13,7613
3	0	5	9	3,04	13,7840
3	0	7	2	3,05	13,8067
3	0	8	8	3,06	13,8293
3	0	10	1	3,07	13,8519
3	0	11	6	3,08	13,8744
3	1	1	0	3,09	13,8969
3	1	2	5	3,10	13,9194
3	1	3	10	3,11	13,9418
3	1	5	3	3,12	13,9642
3	1	6	9	3,13	13,9826
3	1	8	2	3,14	14,0089
3	1	9	7	3,15	14,0312
3	1	11	0	3,16	14,0535
3	2	0	6	3,17	14,0757
3	2	1	11	3,18	14,0979
3	2	3	4	3,19	14,1200
3	2	4	10	3,20	14,1421
3	2	6	3	3,21	14,1642
3	2	7	8	3,22	14,1863
3	2	9	1	3,23	14,2083
3	2	10	7	3,24	14,2302
3	3	0	0	3,25	14,2522
3	3	1	5	3,26	14,2741
3	3	2	11	3,27	14,2960
3	3	4	4	3,28	14,3178
3	3	5	9	3,29	14,3396
3	3	7	2	3,30	14,3614
3	3	8	8	3,31	14,3832
3	3	10	1	3,32	14,4049
3	3	11	6	3,33	14,4266
3	4	1	0	3,34	14,4482
3	4	2	5	3,35	14,4698
3	4	3	10	3,36	14,4914
3	4	5	3	3,37	14,5129
3	4	6	9	3,38	14,5344
3	4	8	2	3,39	14,5559
3	4	9	7	3,40	14,5774
3	4	11	0	3,41	14,5988
3	5	0	6	3,42	14,6202
3	5	1	11	3,43	14,6416
3	5	3	4	3,44	14,6629
3	5	4	10	3,45	14,6842
3	5	6	3	3,46	14,7054
3	5	7	8	3,47	14,7267
3	5	9	1	3,48	14,7479
3	5	10	7	3,49	14,7691
3	6	0	0	3,50	14,7902
3	6	1	5	3,51	14,8113
3	6	2	11	3,52	14,8324
3	6	4	4	3,53	14,8535
3	6	5	9	3,54	14,8745
3	6	7	2	3,55	14,8955
3	6	8	8	3,56	14,9164
3	6	10	1	3,57	14,9374
3	6	11	6	3,58	14,9583
3	7	1	0	3,59	14,9792
3	7	2	5	3,60	15,0000

Fallhöhe.					Geschw	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
3	7	3	10	3,61	15,0208	3	10	11	0	3,91	15,6325
3	7	5	3	3,62	15,0416	3	11	0	6	3,92	15,6525
3	7	6	9	3,63	15,0624	3	11	1	11	3,93	15,6725
3	7	8	2	3,64	15,0831	3	11	3	4	3,94	15,6924
3	7	9	7	3,65	15,1038	3	11	4	10	3,95	15,7123
3	7	11	0	3,66	15,1245	3	11	6	3	3,96	15,7321
3	8	0	6	3,67	15,1451	3	11	7	8	3,97	15,7520
3	8	1	11	3,68	15,1657	3	11	9	1	3,98	15,7718
3	8	3	4	3,69	15,1863	3	11	10	7	3,99	15,7916
3	8	4	10	3,70	15,2069	4	0	0	0	4,00	15,8114
3	8	6	3	3,71	15,2275	4	0	1	5	4,01	15,8311
3	8	7	8	3,72	15,2480	4	0	2	11	4,02	15,8508
3	8	9	1	3,73	15,2685	4	0	4	4	4,03	15,8705
3	8	10	7	3,74	15,2889	4	0	5	9	4,04	15,8902
3	9	0	0	3,75	15,3093	4	0	7	2	4,05	15,9099
3	9	1	5	3,76	15,3297	4	0	8	8	4,06	15,9295
3	9	2	11	3,77	15,3501	4	0	10	1	4,07	15,9491
3	9	4	4	3,78	15,3704	4	0	11	6	4,08	15,9687
3	9	5	9	3,79	15,3907	4	1	1	0	4,09	15,9882
3	9	7	2	3,80	15,4110	4	1	2	5	4,10	16,0078
3	9	8	8	3,81	15,4313	4	1	3	10	4,11	16,0273
3	9	10	1	3,82	15,4515	4	1	5	3	4,12	16,0468
3	9	11	6	3,83	15,4717	4	1	6	9	4,13	16,0662
3	10	1	0	3,84	15,4919	4	1	8	2	4,14	16,0857
3	10	2	5	3,85	15,5121	4	1	9	7	4,15	16,1051
3	10	3	10	3,86	15,5322	4	1	11	0	4,16	16,1245
3	10	5	3	3,87	15,5523	4	2	0	6	4,17	16,143
3	10	6	9	3,88	15,5724	4	2	1	11	4,18	16,163
3	10	8	2	3,89	15,5925	4	2	3	4	4,19	16,182
3	10	9	7	3,90	15,6125	4	2	4	10	4,20	16,201

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
4	2	6	3	4,21	16,2211	4	6	1	5	4,51	16,7891
4	2	7	8	4,22	16,2404	4	6	2	11	4,52	16,8077
4	2	9	1	4,23	16,2596	4	6	4	4	4,53	16,8263
4	2	10	7	4,24	16,2788	4	6	5	9	4,54	16,8449
4	3	0	0	4,25	16,2980	4	6	7	2	4,55	16,8634
4	3	1	5	4,26	16,3171	4	6	8	8	4,56	16,8819
4	3	2	11	4,27	16,3363	4	6	10	1	4,57	16,9004
4	3	4	4	4,28	16,3554	4	6	11	6	4,58	16,9189
4	3	5	9	4,29	16,3745	4	7	1	0	4,59	16,9374
4	3	7	2	4,30	16,3936	4	7	2	5	4,60	16,9558
4	3	8	8	4,31	16,4126	4	7	3	10	4,61	16,9742
4	3	10	1	4,32	16,4317	4	7	5	3	4,62	16,9926
4	3	11	6	4,33	16,4507	4	7	6	9	4,63	17,0110
4	4	1	0	4,34	16,4697	4	7	8	2	4,64	17,0294
4	4	2	5	4,35	16,4886	4	7	9	7	4,65	17,0477
4	4	3	10	4,36	16,5076	4	7	11	0	4,66	17,0661
4	4	5	3	4,37	16,5265	4	8	0	6	4,67	17,0844
4	4	6	9	4,38	16,5454	4	8	1	11	4,68	17,1026
4	4	8	2	4,39	16,5642	4	8	3	4	4,69	17,1209
4	4	9	7	4,40	16,5831	4	8	4	10	4,70	17,1392
4	4	11	0	4,41	16,6019	4	8	6	3	4,71	17,1574
4	5	0	6	4,42	16,6208	4	8	7	8	4,72	17,1756
4	5	1	11	4,43	16,6395	4	8	9	1	4,73	17,1938
4	5	3	4	4,44	16,6583	4	8	10	7	4,74	17,2119
4	5	4	10	4,45	16,6771	4	9	0	0	4,75	17,2301
4	5	6	3	4,46	16,6958	4	9	1	5	4,76	17,2482
4	5	7	8	4,47	16,7145	4	9	2	11	4,77	17,2663
4	5	9	1	4,48	16,7332	4	9	4	4	4,78	17,2844
4	5	10	7	4,49	16,7519	4	9	5	9	4,79	17,3024
4	6	0	0	4,50	16,7705	4	9	7	2	4,80	[illegible]

Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
4	9	8	8	4,81	17,3385
4	9	10	1	4,82	17,3565
4	9	11	6	4,83	17,3745
4	10	1	0	4,84	17,3925
4	10	2	5	4,85	17,4104
4	10	3	10	4,86	17,4284
4	10	5	3	4,87	17,4463
4	10	6	9	4,88	17,4642
4	10	8	2	4,89	17,4821
4	10	9	7	4,90	17,5000
4	10	11	0	4,91	17,5178
4	11	0	6	4,92	17,5356
4	11	1	11	4,93	17,5534
4	11	3	4	4,94	17,5712
4	11	4	10	4,95	17,5890
4	11	6	3	4,96	17,6068
4	11	7	8	4,97	17,6245
4	11	9	1	4,98	17,6423
4	11	10	7	4,99	17,6600
5	0	0	0	5,00	17,6776
5	0	1	5	5,01	17,6953
5	0	2	11	5,02	17,7130
5	0	4	4	5,03	17,7306
5	0	5	9	5,04	17,7482
5	0	7	2	5,05	17,7658
5	0	8	8	5,06	17,7834
5	0	10	1	5,07	17,8009
5	0	11	6	5,08	17,8185
5	1	1	0	5,09	17,8360
5	1	2	5	5,10	17,8535

Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
5	1	3	10	5,11	17,8719
5	1	5	3	5,12	17,8889
5	1	6	9	5,13	17,9060
5	1	8	2	5,14	17,9234
5	1	9	7	5,15	17,9408
5	1	11	0	5,16	17,9583
5	2	0	6	5,17	17,9757
5	2	1	11	5,18	17,9930
5	2	3	4	5,19	18,0104
5	2	4	10	5,20	18,0278
5	2	6	3	5,21	18,0451
5	2	7	8	5,22	18,0624
5	2	9	1	5,23	18,0797
5	2	10	7	5,24	18,0970
5	3	0	0	5,25	18,1142
5	3	1	5	5,26	18,1314
5	3	2	11	5,27	18,1487
5	3	4	4	5,28	18,1659
5	3	5	9	5,29	18,1831
5	3	7	2	5,30	18,2003
5	3	8	8	5,31	18,2174
5	3	10	1	5,32	18,2346
5	3	11	6	5,33	18,2517
5	4	1	0	5,34	18,2688
5	4	2	5	5,35	18,2859
5	4	3	10	5,36	18,3030
5	4	5	3	5,37	18,3201
5	4	6	9	5,38	18,3371
5	4	8	2	5,39	18,3541
5	4	9	7	5,40	18,3711

Fallhöhe.				Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
4	11	0	5,41	18,3881	5	8	6	3	5,71	18,8911
5	0	6	5,42	18,4051	5	8	7	8	5,72	18,9077
5	1	11	5,43	18,4221	5	8	9	1	5,73	18,9242
5	3	4	5,44	18,4391	5	8	10	7	5,74	18,9407
5	4	10	5,45	18,4560	5	9	0	0	5,75	18,9572
5	6	3	5,46	18,4730	5	9	1	5	5,76	18,9737
5	7	8	5,47	18,4899	5	9	2	11	5,77	18,9902
5	9	1	5,48	18,5068	5	9	4	4	5,78	19,0066
5	10	7	5,49	18,5237	5	9	5	9	5,79	19,0230
6	0	0	5,50	18,5405	5	9	7	2	5,80	19,0395
6	1	5	5,51	18,5574	5	9	8	8	5,81	19,0559
6	2	11	5,52	18,5742	5	9	10	1	5,82	19,0722
6	4	4	5,53	18,5910	5	9	11	6	5,83	19,0886
6	5	9	5,54	18,6078	5	10	1	0	5,84	19,1050
6	7	2	5,55	18,6246	5	10	2	5	5,85	19,1214
6	8	8	5,56	18,6414	5	10	3	10	5,86	19,1377
6	10	1	5,57	18,6581	5	10	5	3	5,87	19,1540
6	11	6	5,58	18,6748	5	10	6	9	5,88	19,1703
7	1	0	5,59	18,6916	5	10	8	2	5,89	19,1866
7	2	5	5,60	18,7083	5	10	9	7	5,90	19,2029
7	3	10	5,61	18,7250	5	10	11	0	5,91	19,2192
7	5	3	5,62	18,7417	5	11	0	6	5,92	19,2354
7	6	9	5,63	18,7583	5	11	1	11	5,93	19,2516
7	8	2	5,64	18,7750	5	11	3	4	5,94	19,2679
7	9	7	5,65	18,7916	5	11	4	10	5,95	19,2841
7	11	0	5,66	18,8082	5	11	6	3	5,96	19,3003
8	0	6	5,67	18,8248	5	11	7	8	5,97	19,3165
8	1	11	5,68	18,8414	5	11	9	1	5,98	19,3326
8	3	4	5,69	18,8580	5	11	10	7	5,99	19,3488
8	4	10	5,70	18,8746	6	0	0	0	6,00	19,3649

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
6	0	1	5	6,01	19,3810	6	3	8	8	6,31	19,8589
6	0	2	11	6,02	19,3972	6	3	10	1	6,32	19,8746
6	0	4	4	6,03	19,4133	6	3	11	6	6,33	19,8903
6	0	5	9	6,04	19,4294	6	4	1	0	6,34	19,9060
6	0	7	2	6,05	19,4455	6	4	2	5	6,35	19,9217
6	0	8	8	6,06	19,4615	6	4	3	10	6,36	19,9374
6	0	10	1	6,07	19,4776	6	4	5	3	6,37	19,9531
6	0	11	6	6,08	19,4936	6	4	6	9	6,38	19,9687
6	1	1	0	6,09	19,5096	6	4	8	2	6,39	19,9844
6	1	2	5	6,10	19,5256	6	4	9	7	6,40	20,0000
6	1	3	10	6,11	19,5416	6	4	11	0	6,41	20,0156
6	1	5	3	6,12	19,5576	6	5	0	6	6,42	20,0312
6	1	6	9	6,13	19,5736	6	5	1	11	6,43	20,0468
6	1	8	2	6,14	19,5895	6	5	3	4	6,44	20,0624
6	1	9	7	6,15	19,6055	6	5	4	10	6,45	20,0779
6	1	11	0	6,16	19,6214	6	5	6	3	6,46	20,0935
6	2	0	6	6,17	19,6373	6	5	7	8	6,47	20,1091
6	2	1	11	6,18	19,6532	6	5	9	1	6,48	20,1246
6	2	3	4	6,19	19,6691	6	5	10	7	6,49	20,1401
6	2	4	10	6,20	19,6850	6	6	0	0	6,50	20,1556
6	2	6	3	6,21	19,7009	6	6	1	5	6,51	20,1711
6	2	7	8	6,22	19,7167	6	6	2	11	6,52	20,1866
6	2	9	1	6,23	19,7326	6	6	4	4	6,53	20,2021
6	2	10	7	6,24	19,7484	6	6	5	9	6,54	20,2176
6	3	0	0	6,25	19,7642	6	6	7	2	6,55	20,2331
6	3	1	5	6,26	19,7800	6	6	8	8	6,56	20,2485
6	3	2	11	6,27	19,7958	6	6	10	1	6,57	20,2639
6	3	4	4	6,28	19,8116	6	6	11	6	6,58	20,2793
6	3	5	9	6,29	19,8274	6	7	1	0	6,59	20,2947
6	3	7	2	6,30	19,8431	6	7	2	5	6,60	20,310[illegible]

	Fallhöhe.				Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
6	7	3	10	6,61	20,3254	6	10	11	0	6,91	20,7816
6	7	5	3	6,62	20,3408	6	11	0	6	6,92	20,7966
6	7	6	9	6,63	20,3562	6	11	1	11	6,93	20,8117
6	7	8	2	6,64	20,3715	6	11	3	4	6,94	20,8267
6	7	9	7	6,65	20,3868	6	11	4	10	6,95	20,8417
6	7	11	0	6,66	20,4022	6	11	6	3	6,96	20,8567
6	8	0	6	6,67	20,4175	6	11	7	8	6,97	20,8717
6	8	1	11	6,68	20,4328	6	11	9	1	6,98	20,8866
6	8	3	4	6,69	20,4481	6	11	10	7	6,99	20,9016
6	8	4	10	6,70	20,4634	7	0	0	0	7,00	20,9165
6	8	6	3	6,71	20,4786	7	0	1	5	7,01	20,9315
6	8	7	8	6,72	20,4939	7	0	2	11	7,02	20,9464
6	8	9	1	6,73	20,5091	7	0	4	4	7,03	20,9613
6	8	10	7	6,74	20,5244	7	0	5	9	7,04	20,9762
6	9	0	0	6,75	20,5396	7	0	7	2	7,05	20,9911
6	9	1	5	6,76	20,5548	7	0	8	8	7,06	21,0060
6	9	2	11	6,77	20,5700	7	0	10	1	7,07	21,0208
6	9	4	4	6,78	20,5852	7	0	11	6	7,08	21,0357
6	9	5	9	6,79	20,6003	7	1	1	0	7,09	21,0505
6	9	7	2	6,80	20,6155	7	1	2	5	7,10	21,0654
6	9	8	8	6,81	20,6306	7	1	3	10	7,11	21,0802
6	9	10	1	6,82	20,6458	7	1	5	3	7,12	21,0950
6	9	11	6	6,83	20,6609	7	1	6	9	7,13	21,1098
6	10	1	0	6,84	20,6760	7	1	8	2	7,14	21,1246
6	10	2	5	6,85	20,6911	7	1	9	7	7,15	21,1394
6	10	3	10	6,86	20,7062	7	1	11	0	7,16	21,1542
6	10	5	3	6,87	20,7213	7	2	0	6	7,17	21,1689
6	10	6	9	6,88	20,7364	7	2	1	11	7,18	21,1837
6	10	8	2	6,89	20,7515	7	2	3	4	7,19	21,1985
6	10	9	7	6,90	20,7665	7	2	4	10	7,20	21,2132

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
6	0	1	5	6,01	19,3810	6	3	8	8	6,31	19,85
6	0	2	11	6,02	19,3972	6	3	10	1	6,32	19,874
6	0	4	4	6,03	19,4133	6	3	11	6	6,33	19,890
6	0	5	9	6,04	19,4294	6	4	1	0	6,34	19,906
6	0	7	2	6,05	19,4455	6	4	2	5	6,35	19,921
6	0	8	8	6,06	19,4615	6	4	3	10	6,36	19,937
6	0	10	1	6,07	19,4776	6	4	5	3	6,37	19,953
6	0	11	6	6,08	19,4936	6	4	6	9	6,38	19,968
6	1	1	0	6,09	19,5096	6	4	8	2	6,39	19,984
6	1	2	5	6,10	19,5256	6	4	9	7	6,40	20,000
6	1	3	10	6,11	19,5416	6	4	11	0	6,41	20,015
6	1	5	3	6,12	19,5576	6	5	0	6	6,42	20,031
6	1	6	9	6,13	19,5736	6	5	1	11	6,43	20,046
6	1	8	2	6,14	19,5895	6	5	3	4	6,44	20,062
6	1	9	7	6,15	19,6055	6	5	4	10	6,45	20,077
6	1	11	0	6,16	19,6214	6	5	6	3	6,46	20,093
6	2	0	6	6,17	19,6373	6	5	7	8	6,47	20,109
6	2	1	11	6,18	19,6532	6	5	9	1	6,48	20,124
6	2	3	4	6,19	19,6691	6	5	10	7	6,49	20,140
6	2	4	10	6,20	19,6850	6	6	0	0	6,50	20,155
6	2	6	3	6,21	19,7009	6	6	1	5	6,51	20,171
6	2	7	8	6,22	19,7167	6	6	2	11	6,52	20,186
6	2	9	1	6,23	19,7326	6	6	4	4	6,53	20,202
6	2	10	7	6,24	19,7484	6	6	5	9	6,54	20,217
6	3	0	0	6,25	19,7642	6	6	7	2	6,55	20,233
6	3	1	5	6,26	19,7800	6	6	8	8	6,56	20,248
6	3	2	11	6,27	19,7958	6	6	10	1	6,57	20,263
6	3	4	4	6,28	19,8116	6	6	11	6	6,58	20,279
6	3	5	9	6,29	19,8274	6	7	1	0	6,59	20,294
6	3	7	2	6,30	19,8431	6	7	2	5	6,60	20,310

Fallhöhe.				Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
7	3	10	6,61	20,3254	6	10	11	0	6,91	20,7816
7	5	3	6,62	20,3408	6	11	0	6	6,92	20,7966
7	6	9	6,63	20,3562	6	11	1	11	6,93	20,8117
7	8	2	6,64	20,3715	6	11	3	4	6,94	20,8267
7	9	7	6,65	20,3868	6	11	4	10	6,95	20,8417
7	11	0	6,66	20,4022	6	11	6	3	6,96	20,8567
8	0	6	6,67	20,4175	6	11	7	8	6,97	20,8717
8	1	11	6,68	20,4328	6	11	9	1	6,98	20,8866
8	3	4	6,69	20,4481	6	11	10	7	6,99	20,9016
8	4	10	6,70	20,4634	7	0	0	0	7,00	20,9165
8	6	3	6,71	20,4786	7	0	1	5	7,01	20,9315
8	7	8	6,72	20,4939	7	0	2	11	7,02	20,9464
8	9	1	6,73	20,5091	7	0	4	4	7,03	20,9613
8	10	7	6,74	20,5244	7	0	5	9	7,04	20,9762
9	0	0	6,75	20,5396	7	0	7	2	7,05	20,9911
9	1	5	6,76	20,5548	7	0	8	8	7,06	21,0060
9	2	11	6,77	20,5700	7	0	10	1	7,07	21,0208
9	4	4	6,78	20,5852	7	0	11	6	7,08	21,0357
9	5	9	6,79	20,6003	7	1	1	0	7,09	21,0505
9	7	2	6,80	20,6155	7	1	2	5	7,10	21,0654
9	8	8	6,81	20,6306	7	1	3	10	7,11	21,0802
9	10	1	6,82	20,6458	7	1	5	3	7,12	21,0950
9	11	6	6,83	20,6609	7	1	6	9	7,13	21,1098
10	1	0	6,84	20,6760	7	1	8	2	7,14	21,1246
10	2	5	6,85	20,6911	7	1	9	7	7,15	21,1394
10	3	10	6,86	20,7062	7	1	11	0	7,16	21,1542
10	5	3	6,87	20,7213	7	2	0	6	7,17	21,1689
10	6	9	6,88	20,7364	7	2	1	11	7,18	21,1837
10	8	2	6,89	20,7515	7	2	3	4	7,19	21,1985
10	9	7	6,90	20,7665	7	2	4	10	7,20	21,2132

Fallhöhe.				Geschw.	Fallhöhe.					Geschw
Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
2	6	3	7,21	21,2279	7	6	1	5	7,51	21,66
2	7	8	7,22	21,2426	7	6	2	11	7,52	21,679
2	9	1	7,23	21,2573	7	6	4	4	7,53	21,69
2	10	7	7,24	21,2720	7	6	5	9	7,54	21,70
3	0	0	7,25	21,2867	7	6	7	2	7,55	21,72
3	1	5	7,26	21,3014	7	6	8	8	7,56	21,737
3	2	11	7,27	21,3161	7	6	10	1	7,57	21,751
3	4	4	7,28	21,3307	7	6	11	6	7,58	21,765
3	5	9	7,29	21,3453	7	7	1	0	7,59	21,780
3	7	2	7,30	21,3600	7	7	2	5	7,60	21,794
3	8	8	7,31	21,3746	7	7	3	10	7,61	21,808
3	10	1	7,32	21,3892	7	7	5	3	7,62	21,823
3	11	6	7,33	21,4038	7	7	6	9	7,63	21,837
4	1	0	7,34	21,4184	7	7	8	2	7,64	21,8518
4	2	5	7,35	21,4330	7	7	9	7	7,65	21,8661
4	3	10	7,36	21,4476	7	7	11	0	7,66	21,880
4	5	3	7,37	21,4622	7	8	0	6	7,67	21,8946
4	6	9	7,38	21,4767	7	8	1	11	7,68	21,9089
4	8	2	7,39	21,4913	7	8	3	4	7,69	21,9232
4	9	7	7,40	21,5058	7	8	4	10	7,70	21,9374
4	11	0	7,41	21,5204	7	8	6	3	7,71	21,9516
5	0	6	7,42	21,5349	7	8	7	8	7,72	21,9659
5	1	11	7,43	21,5494	7	8	9	1	7,73	21,9801
5	3	4	7,44	21,5639	7	8	10	7	7,74	21,9943
5	4	10	7,45	21,5784	7	9	0	0	7,75	22,0085
5	6	3	7,46	21,5929	7	9	1	5	7,76	22,0227
5	7	8	7,47	21,6073	7	9	2	11	7,77	22,0369
5	9	1	7,48	21,6218	7	9	4	4	7,78	22,0511
5	10	7	7,49	21,6362	7	9	5	9	7,79	22,0652
6	0	0	7,50	21,6507	7	9	7	2	7,80	22,0794

Fallhöhe.				Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
9	8	8	7,81	22,0935	8	1	3	10	8,11	22,5139
9	10	1	7,82	22,1077	8	1	5	3	8,12	22,5278
9	11	6	7,83	22,1218	8	1	6	9	8,13	22,5416
10	1	0	7,84	22,1359	8	1	8	2	8,14	22,5555
10	2	5	7,85	22,1500	8	1	9	7	8,15	22,5694
10	3	10	7,86	22,1641	8	1	11	0	8,16	22,5832
10	5	3	7,87	22,1782	8	2	0	6	8,17	22,5970
10	6	9	7,88	22,1923	8	2	1	11	8,18	22,6108
10	8	2	7,89	22,2064	8	2	3	4	8,19	22,6247
10	9	7	7,90	22,2205	8	2	4	10	8,20	22,6385
10	11	0	7,91	22,2346	8	2	6	3	8,21	22,6523
11	0	6	7,92	22,2486	8	2	7	8	8,22	22,6661
11	1	11	7,93	22,2626	8	2	9	1	8,23	22,6798
11	3	4	7,94	22,2767	8	2	10	7	8,24	22,6936
11	4	10	7,95	22,2907	8	3	0	0	8,25	22,7074
11	6	3	7,96	22,3047	8	3	1	5	8,26	22,7211
11	7	8	7,97	22,3187	8	3	2	11	8,27	22,7349
11	19	1	7,98	22,3327	8	3	4	4	8,28	22,7486
11	10	7	7,99	22,3467	8	3	5	9	8,29	22,7624
0	0	0	8,00	22,3607	8	3	7	2	8,30	22,7761
0	1	5	8,01	22,3747	8	3	8	8	8,31	22,7898
0	2	11	8,02	22,3886	8	3	10	1	8,32	22,8035
0	4	4	8,03	22,4026	8	3	11	6	8,33	22,8172
0	5	9	8,04	22,4165	8	4	1	0	8,34	22,8309
0	7	2	8,05	22,4305	8	4	2	5	8,35	22,8446
0	8	8	8,06	22,4444	8	4	3	10	8,36	22,8583
0	10	1	8,07	22,4583	8	4	5	3	8,37	22,8719
0	11	6	8,08	22,4722	8	4	6	9	8,38	22,8856
1	1	0	8,09	22,4861	8	4	8	2	8,39	22,8993
1	2	5	8,10	22,5000	8	4	9	7	8,40	22,9129

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
7	2	6	3	7,21	21,2279	7	6	1	5	7,51	21,665
7	2	7	8	7,22	21,2426	7	6	2	11	7,52	21,679
7	2	9	1	7,23	21,2573	7	6	4	4	7,53	21,693
7	2	10	7	7,24	21,2720	7	6	5	9	7,54	21,708
7	3	0	0	7,25	21,2867	7	6	7	2	7,55	21,722
7	3	1	5	7,26	21,3014	7	6	8	8	7,56	21,737
7	3	2	11	7,27	21,3161	7	6	10	1	7,57	21,751
7	3	4	4	7,28	21,3307	7	6	11	6	7,58	21,7658
7	3	5	9	7,29	21,3453	7	7	1	0	7,59	21,7802
7	3	7	2	7,30	21,3600	7	7	2	5	7,60	21,7945
7	3	8	8	7,31	21,3746	7	7	3	10	7,61	21,8088
7	3	10	1	7,32	21,3892	7	7	5	3	7,62	21,8232
7	3	11	6	7,33	21,4038	7	7	6	9	7,63	21,8375
7	4	1	0	7,34	21,4184	7	7	8	2	7,64	21,8518
7	4	2	5	7,35	21,4330	7	7	9	7	7,65	21,8661
7	4	3	10	7,36	21,4476	7	7	11	0	7,66	21,8804
7	4	5	3	7,37	21,4622	7	8	0	6	7,67	21,8946
7	4	6	9	7,38	21,4767	7	8	1	11	7,68	21,9089
7	4	8	2	7,39	21,4913	7	8	3	4	7,69	21,9232
7	4	9	7	7,40	21,5058	7	8	4	10	7,70	21,9374
7	4	11	0	7,41	21,5204	7	8	6	3	7,71	21,9516
7	5	0	6	7,42	21,5349	7	8	7	8	7,72	21,9659
7	5	1	11	7,43	21,5494	7	8	9	1	7,73	21,9801
7	5	3	4	7,44	21,5639	7	8	10	7	7,74	21,9943
7	5	4	10	7,45	21,5784	7	9	0	0	7,75	22,0085
7	5	6	3	7,46	21,5929	7	9	1	5	7,76	22,0227
7	5	7	8	7,47	21,6073	7	9	2	11	7,77	22,0369
7	5	9	1	7,48	21,6218	7	9	4	4	7,78	22,0511
7	5	10	7	7,49	21,6362	7	9	5	9	7,79	22,0652
7	6	0	0	7,50	21,6507	7	9	7	2	7,80	22,0794

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
7	9	8	8	7,81	22,0935	8	1	3	10	8,11	22,5139
7	9	10	1	7,82	22,1077	8	1	5	3	8,12	22,5278
7	9	11	6	7,83	22,1218	8	1	6	9	8,13	22,5416
7	10	1	0	7,84	22,1359	8	1	8	2	8,14	22,5555
7	10	2	5	7,85	22,1500	8	1	9	7	8,15	22,5694
7	10	3	10	7,86	22,1641	8	1	11	0	8,16	22,5832
7	10	5	3	7,87	22,1782	8	2	0	6	8,17	22,5970
7	10	6	9	7,88	22,1923	8	2	1	11	8,18	22,6108
7	10	8	2	7,89	22,2064	8	2	3	4	8,19	22,6247
7	10	9	7	7,90	22,2205	8	2	4	10	8,20	22,6385
7	10	11	0	7,91	22,2346	8	2	6	3	8,21	22,6523
7	11	0	6	7,92	22,2486	8	2	7	8	8,22	22,6661
7	11	1	11	7,93	22,2626	8	2	9	1	8,23	22,6798
7	11	3	4	7,94	22,2767	8	2	10	7	8,24	22,6936
7	11	4	10	7,95	22,2907	8	3	0	0	8,25	22,7074
7	11	6	3	7,96	22,3047	8	3	1	5	8,26	22,7211
7	11	7	8	7,97	22,3187	8	3	2	11	8,27	22,7349
7	11	19	1	7,98	22,3327	8	3	4	4	8,28	22,7486
7	11	10	7	7,99	22,3467	8	3	5	9	8,29	22,7624
8	0	0	0	8,00	22,3607	8	3	7	2	8,30	22,7761
8	0	1	5	8,01	22,3747	8	3	8	8	8,31	22,7898
8	0	2	11	8,02	22,3886	8	3	10	1	8,32	22,8035
8	0	4	4	8,03	22,4026	8	3	11	6	8,33	22,8172
8	0	5	9	8,04	22,4165	8	4	1	0	8,34	22,8309
8	0	7	2	8,05	22,4305	8	4	2	5	8,35	22,8446
	0	8	8	8,06	22,4444	8	4	3	10	8,36	22,8583
	0	10	1	8,07	22,4583	8	4	5	3	8,37	22,8719
	0	11	6	8,08	22,4722	8	4	6	9	8,38	22,8856
	1	1	0	8,09	22,4861	8	4	8	2	8,39	22,8993
	1	2	5	8,10	22,5000	8	4	9	7	8,40	22,9129

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
8	4	11	0	8,41	22,9265	8	8	6	3	8,71	23,33
8	5	0	6	8,42	22,9402	8	8	7	8	8,72	23,34
8	5	1	11	8,43	22,9538	8	8	9	1	8,73	23,35
8	5	3	4	8,44	22,9674	8	8	0	7	8,74	23,37
8	5	4	10	8,45	22,9810	8	9	0	0	8,75	23,38
8	5	6	3	8,46	22,9946	8	9	1	5	8,76	23,39
8	5	7	8	8,47	23,0081	8	9	2	11	8,77	23,41
8	5	9	1	8,48	23,0217	8	9	4	4	8,78	23,42
8	5	10	7	8,49	23,0353	8	9	5	9	8,79	23,43
8	6	0	0	8,50	23,0489	8	9	7	2	8,80	23,45
8	6	1	5	8,51	23,0624	8	9	8	8	8,81	23,46
8	6	2	11	8,52	23,0760	8	9	10	1	8,82	23,478
8	6	4	4	8,53	23,0895	8	9	11	6	8,83	23,49
8	6	5	9	8,54	23,1031	8	10	1	0	8,84	23,50
8	6	7	2	8,55	23,1166	8	10	2	5	8,85	23,518
8	6	8	8	8,56	23,1301	8	10	3	10	8,86	23,53
8	6	10	1	8,57	23,1436	8	10	5	3	8,87	23,54
8	6	11	6	8,58	23,1571	8	10	6	9	8,88	23,558
8	7	1	0	8,59	23,1706	8	10	8	2	8,89	23,57
8	7	2	5	8,60	23,1841	8	10	9	7	8,90	23,584
8	7	3	10	8,61	23,1975	8	10	11	0	8,91	23,598
8	7	5	3	8,62	23,2110	8	11	0	6	8,92	23,611
8	7	6	9	8,63	23,2245	8	11	1	11	8,93	23,624
8	7	8	2	8,64	23,2379	8	11	3	4	8,94	23,637
8	7	9	7	8,65	23,2513	8	11	4	10	8,95	23,651
8	7	11	0	8,66	23,2648	8	11	6	3	8,96	23,664
8	8	0	6	8,67	23,2782	8	11	7	8	8,97	23,677
8	8	1	11	8,68	23,2916	8	11	9	1	8,98	23,690
8	8	3	4	8,69	23,3050	8	11	10	7	8,99	23,703
8	8	4	10	8,70	23,3184	9	0	0	0	9,00	23,717

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
9	0	1	5	9,01	23,7302	9	3	8	8	9,31	24,1221
9	0	2	11	9,02	23,7434	9	3	10	1	9,32	24,1351
9	0	4	4	9,03	23,7566	9	3	11	6	9,33	24,1480
9	0	5	9	9,04	23,7697	9	4	1	0	9,34	24,1610
9	0	7	2	9,05	23,7829	9	4	2	5	9,35	24,1739
9	0	8	8	9,06	23,7960	9	4	3	10	9,36	24,1868
9	0	10	1	9,07	23,8091	9	4	5	3	9,37	24,1997
9	0	11	6	9,08	23,8223	9	4	6	9	9,38	24,2126
9	1	1	0	9,09	23,8354	9	4	8	2	9,39	24,2255
9	1	2	5	9,10	23,8485	9	4	9	7	9,40	24,2384
9	1	3	10	9,11	23,8616	9	4	11	0	9,41	24,2513
9	1	5	3	9,12	23,8747	9	5	0	6	9,42	24,2642
9	1	6	9	9,13	23,8878	9	5	1	11	9,43	24,2771
9	1	8	2	9,14	23,9009	9	5	3	4	9,44	24,2899
9	1	9	7	9,15	23,9139	9	5	4	10	9,45	24,3028
9	1	11	0	9,16	23,9270	9	5	6	3	9,46	24,3156
9	2	0	6	9,17	23,9401	9	5	7	8	9,47	24,3285
9	2	1	11	9,18	23,9531	9	5	9	1	9,48	24,3413
9	2	3	4	9,19	23,9662	9	5	10	7	9,49	24,3542
9	2	4	10	9,20	23,9792	9	6	0	0	9,50	24,3670
9	2	6	3	9,21	23,9922	9	6	1	5	9,51	24,3798
9	2	7	8	9,22	24,0053	9	6	2	11	9,52	24,3926
9	2	9	1	9,23	24,0183	9	6	4	4	9,53	24,4054
9	2	10	7	9,24	24,0313	9	6	5	9	9,54	24,4182
9	3	0	0	9,25	24,0443	9	6	7	2	9,55	24,4310
9	3	1	5	9,26	24,0573	9	6	8	8	9,56	24,4438
9	3	2	11	9,27	24,0702	9	6	10	1	9,57	24,4566
9	3	4	4	9,28	24,0832	9	6	11	6	9,58	24,4694
9	3	5	9	9,29	24,0962	9	7	1	0	9,59	24,4822
9	3	7	2	9,30	24,1092	9	7	2	5	9,60	24,4949

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
8	4	11	0	8,41	22,9265	8	8	6	3	8,71	23,33
8	5	0	6	8,42	22,9402	8	8	7	8	8,72	23,345
8	5	1	11	8,43	22,9538	8	8	9	1	8,73	23,358
8	5	3	4	8,44	22,9674	8	8	0	7	8,74	23,372
8	5	4	10	8,45	22,9810	8	9	0	0	8,75	23,385
8	5	6	3	8,46	22,9946	8	9	1	5	8,76	23,398
8	5	7	8	8,47	23,0081	8	9	2	11	8,77	23,412
8	5	9	1	8,48	23,0217	8	9	4	4	8,78	23,425
8	5	10	7	8,49	23,0353	8	9	5	9	8,79	23,438
8	6	0	0	8,50	23,0489	8	9	7	2	8,80	23,452
8	6	1	5	8,51	23,0624	8	9	8	8	8,81	23,465
8	6	2	11	8,52	23,0760	8	9	10	1	8,82	23,478
8	6	4	4	8,53	23,0895	8	9	11	6	8,83	23,492
8	6	5	9	8,54	23,1031	8	10	1	0	8,84	23,505
8	6	7	2	8,55	23,1166	8	10	2	5	8,85	23,518
8	6	8	8	8,56	23,1301	8	10	3	10	8,86	23,531
8	6	10	1	8,57	23,1436	8	10	5	3	8,87	23,545
8	6	11	6	8,58	23,1571	8	10	6	9	8,88	23,558
8	7	1	0	8,59	23,1706	8	10	8	2	8,89	23,57
8	7	2	5	8,60	23,1841	8	10	9	7	8,90	23,584
8	7	3	10	8,61	23,1975	8	10	11	0	8,91	23,598
8	7	5	3	8,62	23,2110	8	11	0	6	8,92	23,611
8	7	6	9	8,63	23,2245	8	11	1	11	8,93	23,624
8	7	8	2	8,64	23,2379	8	11	3	4	8,94	23,637
8	7	9	7	8,65	23,2513	8	11	4	10	8,95	23,651
8	7	11	0	8,66	23,2648	8	11	6	3	8,96	23,664
8	8	0	6	8,67	23,2782	8	11	7	8	8,97	23,677
8	8	1	11	8,68	23,2916	8	11	9	1	8,98	23,690
8	8	3	4	8,69	23,3050	8	11	10	7	8,99	23,703
8	8	4	10	8,70	23,3184	9	0	0	0	9,00	23,717

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
9	0	1	5	9,01	23,7302	9	3	8	8	9,31	24,1221
9	0	2	11	9,02	23,7434	9	3	10	1	9,32	24,1351
9	0	4	4	9,03	23,7566	9	3	11	6	9,33	24,1480
9	0	5	9	9,04	23,7697	9	4	1	0	9,34	24,1610
9	0	7	2	9,05	23,7829	9	4	2	5	9,35	24,1739
9	0	8	8	9,06	23,7960	9	4	3	10	9,36	24,1868
9	0	10	1	9,07	23,8091	9	4	5	3	9,37	24,1997
9	0	11	6	9,08	23,8223	9	4	6	9	9,38	24,2126
9	1	1	0	9,09	23,8354	9	4	8	2	9,39	24,2255
9	1	2	5	9,10	23,8485	9	4	9	7	9,40	24,2384
9	1	3	10	9,11	23,8616	9	4	11	0	9,41	24,2513
9	1	5	3	9,12	23,8747	9	5	0	6	9,42	24,2642
9	1	6	9	9,13	23,8878	9	5	1	11	9,43	24,2771
9	1	8	2	9,14	23,9009	9	5	3	4	9,44	24,2899
9	1	9	7	9,15	23,9139	9	5	4	10	9,45	24,3028
9	1	11	0	9,16	23,9270	9	5	6	3	9,46	24,3156
9	2	0	6	9,17	23,9401	9	5	7	8	9,47	24,3285
9	2	1	11	9,18	23,9531	9	5	9	1	9,48	24,3413
9	2	3	4	9,19	23,9662	9	5	10	7	9,49	24,3542
9	2	4	10	9,20	23,9792	9	6	0	0	9,50	24,3670
9	2	6	3	9,21	23,9922	9	6	1	5	9,51	24,3798
9	2	7	8	9,22	24,0053	9	6	2	11	9,52	24,3926
9	2	9	1	9,23	24,0183	9	6	4	4	9,53	24,4054
9	2	10	7	9,24	24,0313	9	6	5	9	9,54	24,4182
9	3	0	0	9,25	24,0443	9	6	7	2	9,55	24,4310
9	3	1	5	9,26	24,0573	9	6	8	8	9,56	24,4438
9	3	2	11	9,27	24,0702	9	6	10	1	9,57	24,4566
9	3	4	4	9,28	24,0832	9	6	11	6	9,58	24,4694
9	3	5	9	9,29	24,0962	9	7	1	0	9,59	24,4822
9	3	7	2	9,30	24,1092	9	7	2	5	9,60	24,4949

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
9	7	3	10	9,61	24,5077	9	9	8	8	9,81	24,761
9	7	5	3	9,62	24,5204	9	9	10	1	9,82	24,774
9	7	6	9	9,63	24,5331	9	9	11	6	9,83	24,786
9	7	8	2	9,64	24,5459	9	10	1	0	9,84	24,799
9	7	9	7	9,65	24,5586	9	10	2	5	9,85	24,811
9	7	11	0	9,66	24,5713	9	10	3	10	9,86	24,824
9	8	0	6	9,67	24,5840	9	10	5	3	9,87	24,837
9	8	1	11	9,68	24,5967	9	10	6	9	9,88	24,849
9	8	3	4	9,69	24,6094	9	10	8	2	9,89	24,8621
9	8	4	10	9,70	24,6221	9	10	9	7	9,90	24,8747
9	8	6	3	9,71	24,6348	9	10	11	0	9,91	24,8873
9	8	7	8	9,72	24,6475	9	11	0	6	9,92	24,8998
9	8	9	1	9,73	24,6602	9	11	1	11	9,93	24,9124
9	8	10	7	9,74	24,6729	9	11	3	4	9,94	24,9249
9	9	0	0	9,75	24,6856	9	11	4	10	9,95	24,9374
9	9	1	5	9,76	24,6982	9	11	6	3	9,96	24,9500
9	9	2	11	9,77	24,7109	9	11	7	8	9,97	24,9625
9	9	4	4	9,78	24,7235	9	11	9	1	9,98	24,9750
9	9	5	9	9,79	24,7361	9	11	10	7	9,99	24,9875
9	9	7	2	9,80	24,7488	10	0	0	0	10,00	25,0000

D[illegible]

Seite 14 Zeile 11 v. u. statt [illegible] l. m. [illegible]
— 28 — [illegible] v. o. statt [illegible] l. m. [illegible]
— 35 — 11 v. u. statt [illegible] l. m. [illegible]
— 42 — [illegible] v. o. statt [illegible] l. m. [illegible]
— 49 — 4 v. u. ist [illegible] weggeblieben
— 49 — 18 v. o. hinter [illegible] l. m. [illegible]
[illegible]
— 60 — 4 v. u. statt [illegible] l. m [illegible]
— 76 — 17 v. o. statt [illegible] l. m [illegible]
— 77 — 17 v. o. statt [illegible] l. m [illegible]
— 128 — 5 v. o. statt [illegible] l. m [illegible]
— 128 — 5 v. u. hinter [illegible] l. m [illegible]
[illegible]
— 169 — 10 v. o. statt [illegible] l. m [illegible]
— 284 — 6 v. o. hinter [illegible] l. m [illegible]
— 319 — 21 v. o. statt [illegible] l. m. [illegible]
— 385 — 11 v. o. neben 9, statt 8,02; 17,[illegible]
7,82; 16,82
— 385 — 16 v. o. neben 14, statt 11,56; 25,
11,46; 25,46
— 387 — 4 v. o. neben 12, statt 8,45; 20,4
[illegible],41; [illegible],41.

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Gesch
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fu
9	7	3	10	9,61	24,5077	9	9	8	8	9,81	24,7
9	7	5	3	9,62	24,5204	9	9	10	1	9,82	24,7
9	7	6	9	9,63	24,5331	9	9	11	6	9,83	24,7
9	7	8	2	9,64	24,5459	9	10	1	0	9,84	24,7
9	7	9	7	9,65	24,5586	9	10	2	5	9,85	24,8
9	7	11	0	9,66	24,5713	9	10	3	10	9,86	24,8
9	8	0	6	9,67	24,5840	9	10	5	3	9,87	24,8
9	8	1	11	9,68	24,5967	9	10	6	9	9,88	24,8
9	8	3	4	9,69	24,6094	9	10	8	2	9,89	24,8
9	8	4	10	9,70	24,6221	9	10	9	7	9,90	24,8
9	8	6	3	9,71	24,6348	9	10	11	0	9,91	24,8
9	8	7	8	9,72	24,6475	9	11	0	6	9,92	24,8
9	8	9	1	9,73	24,6602	9	11	1	11	9,93	24,9
9	8	10	7	9,74	24,6729	9	11	3	4	9,94	24,9
9	9	0	0	9,75	24,6856	9	11	4	10	9,95	24,9
9	9	1	5	9,76	24,6982	9	11	6	3	9,96	24,9
9	9	2	11	9,77	24,7109	9	11	7	8	9,97	24,9
9	9	4	4	9,78	24,7235	9	11	9	1	9,98	24,9
9	9	5	9	9,79	24,7361	9	11	10	7	9,99	24,9
9	9	7	2	9,80	24,7488	10	0	0	0	10,00	25,0

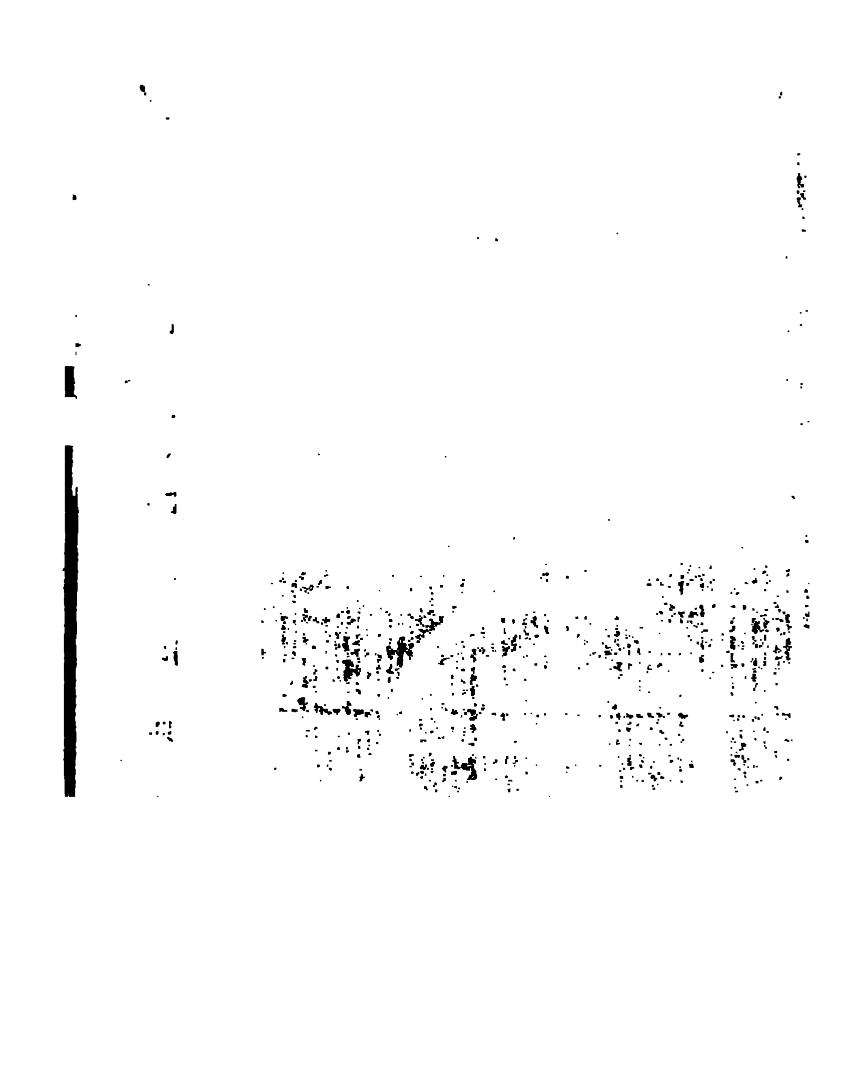
Druckfehler.

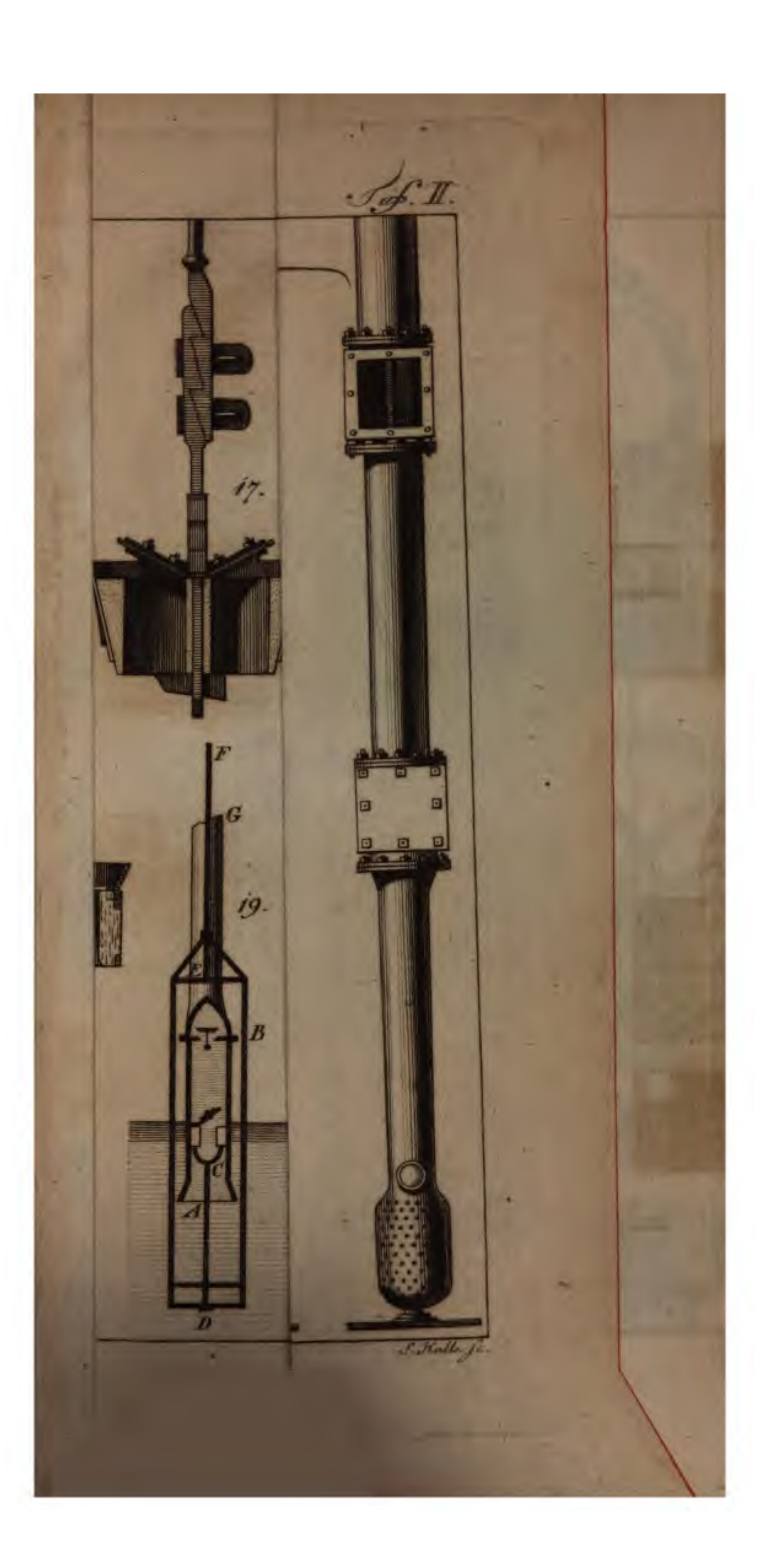
Seite 14 Zeile 11 v. u. statt 66 §. l. m. 24. §.
— 28 — 3 v. o. statt a l. m. a
— 35 — 11 v. u. statt Mc^2 l. m. MC^2.
— 41 — 7 v. o. statt c l. m. C
— 49 — 4 v. u. ist 41 §. wegzustreichen
— 49 — 18 v. o. hinter AB l. m. (in der zweiten Figur S. 48.)
— 60 — 4 v. u. statt das l. m. daß
— 76 — 17 v. o. statt V' l. m. V
— 77 — 17 v. o. statt 74 l. m. 76
— 128 — 5 v. o. statt 0,0242 l. m. 0,0243.
— 128 — 5 v. u. hinter Folge l. m. wenn keine Erinnerung beigefügt ist,
— 169 — 10 v. o. statt $-\left(\frac{a^2}{48}\right.$ l. m. $-\frac{a^2}{48}$
— 284 — 6 v. o. hinter begegnen l. m. um nicht
— 319 — 21 v. o. statt 205 l. m. 207
— 385 — 11 v. o. neben 9, statt 8,02; 17,02 l. m. 7,82; 16,82
— 385 — 16 v. o. neben 14, statt 11,56; 25,56 l. m. 11,46; 25,46
— 387 — 4 v. o. neben 12, statt 8,45; 20,45 l. m. 9,41; 21,41.

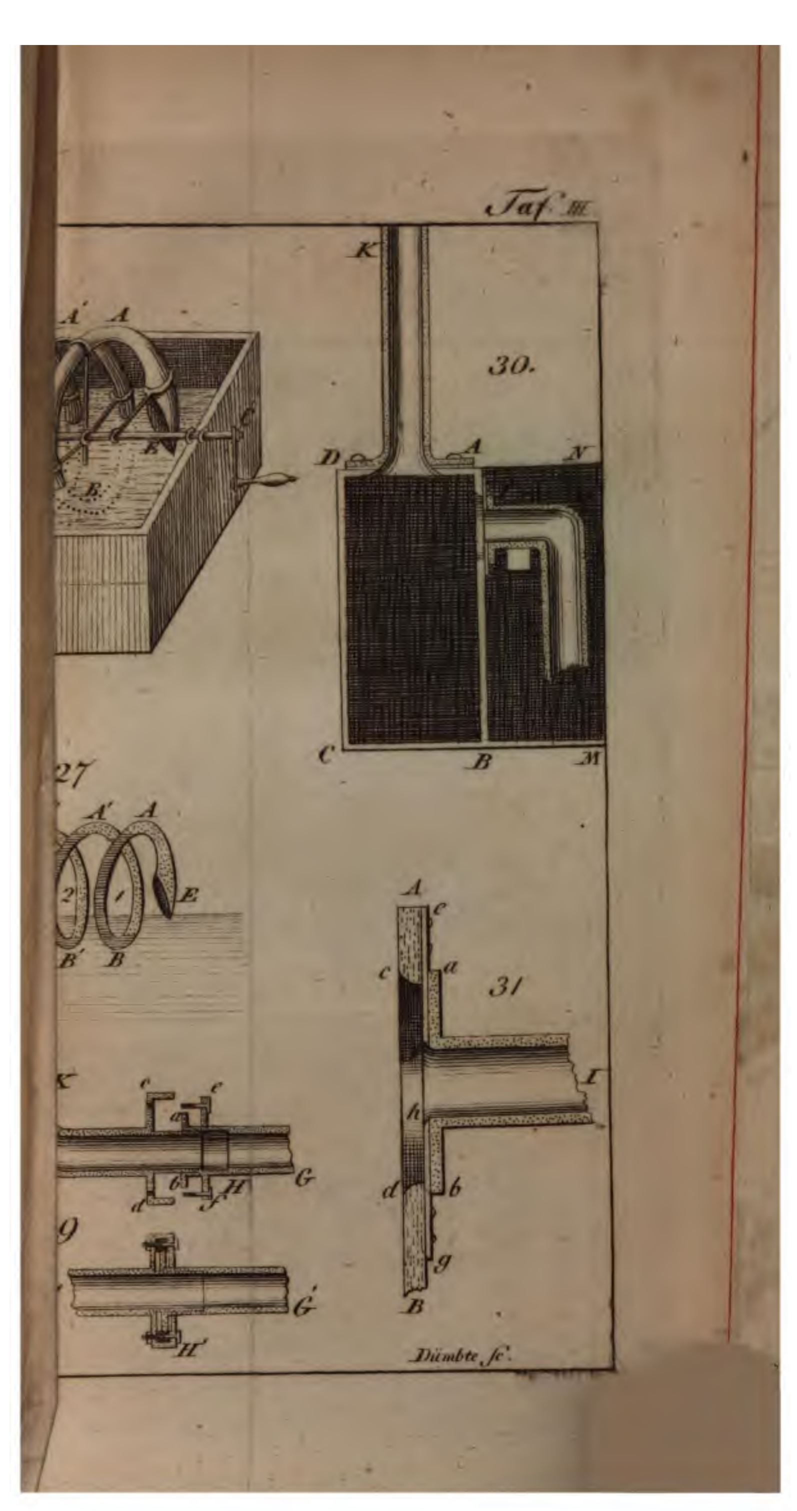

Taf. I.
4

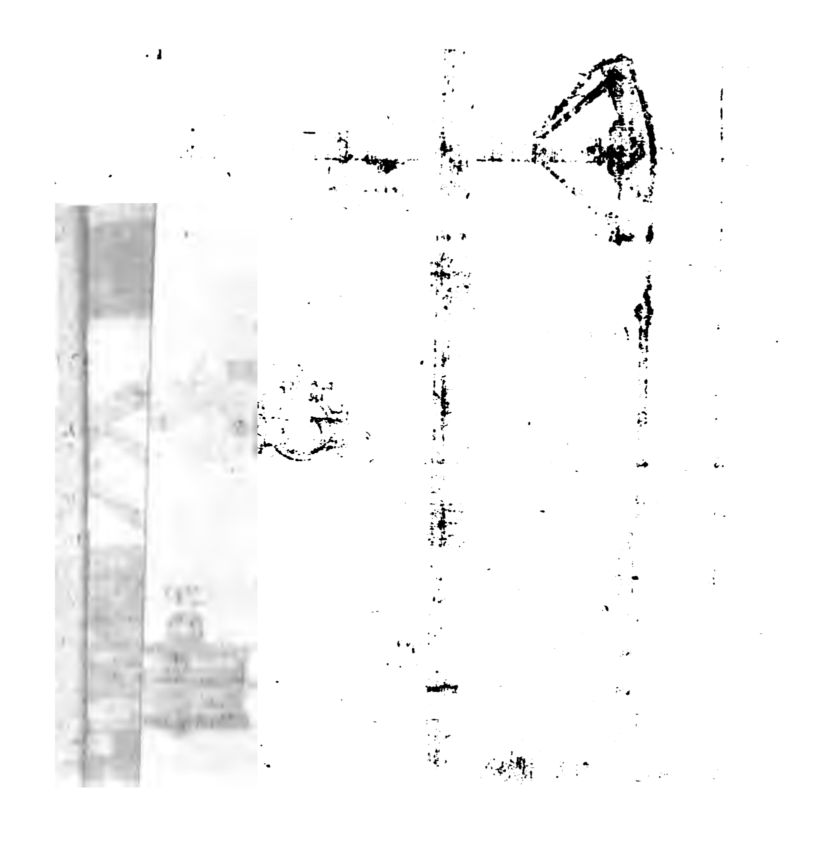

4


4

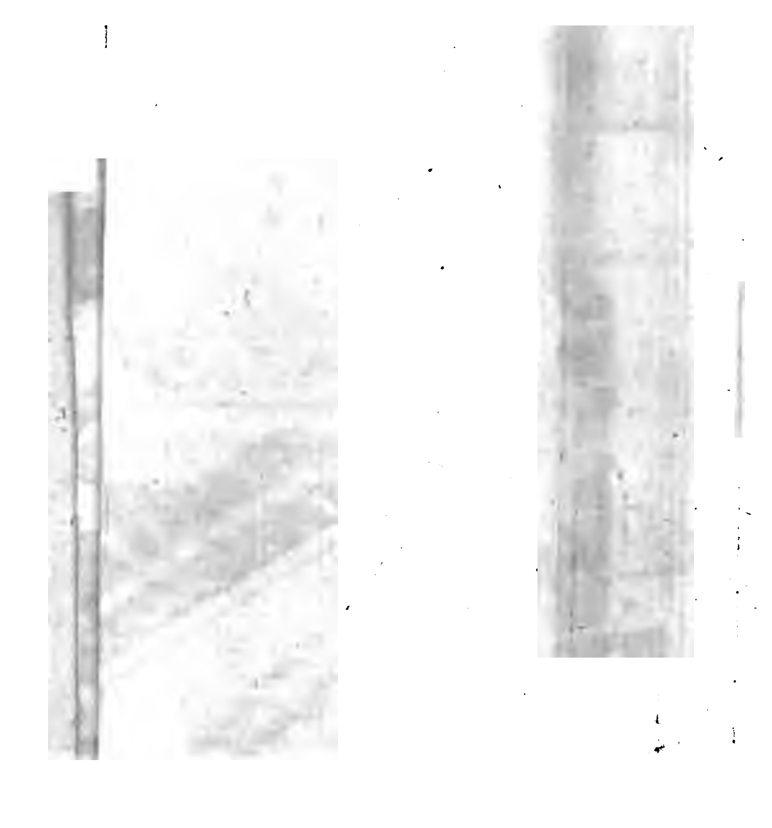


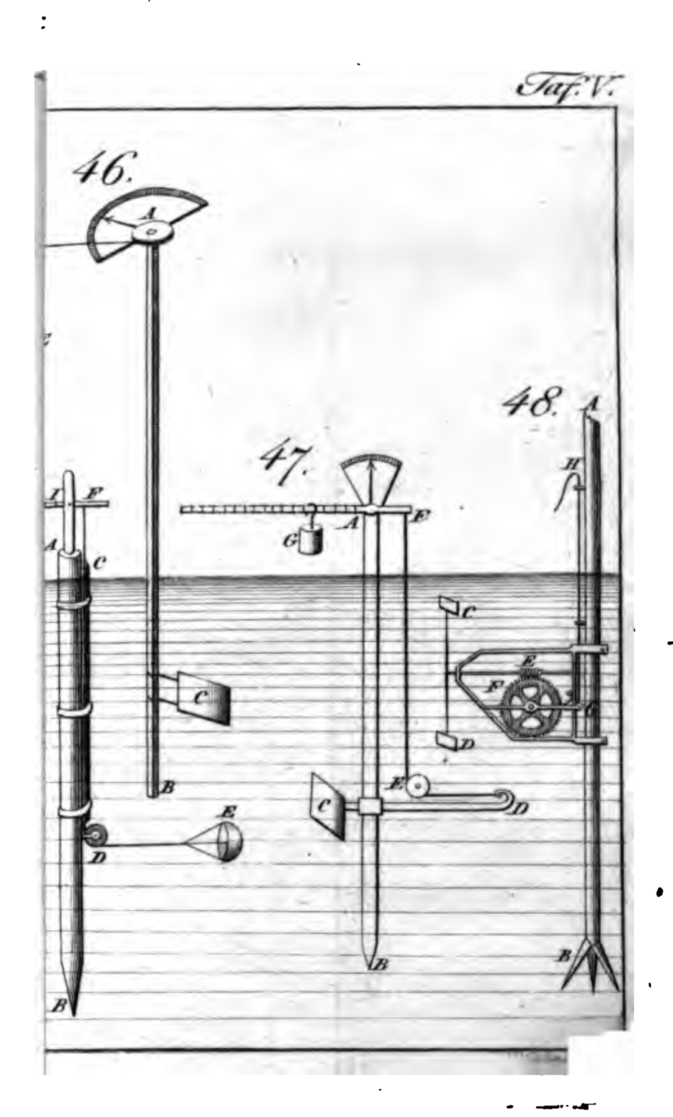

Taf. II.
17.
F
G
19.
E
B
C
A
D
L. Kolle sc.


Taf. III
K
30.
D
A
N
C
B
M
A′
A
E
B
27
A′
A
2
1
E
B′
B
A
e
c
a
31
I
h
d
b
g
B
K
c
e
a
b
H
G
d
f
9
G′
H′
Dümbte sc.

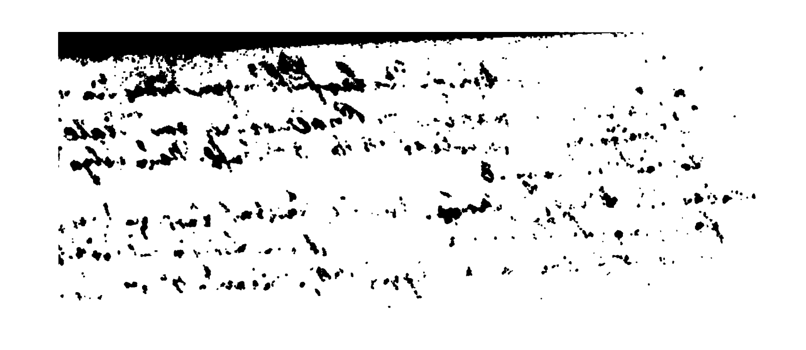


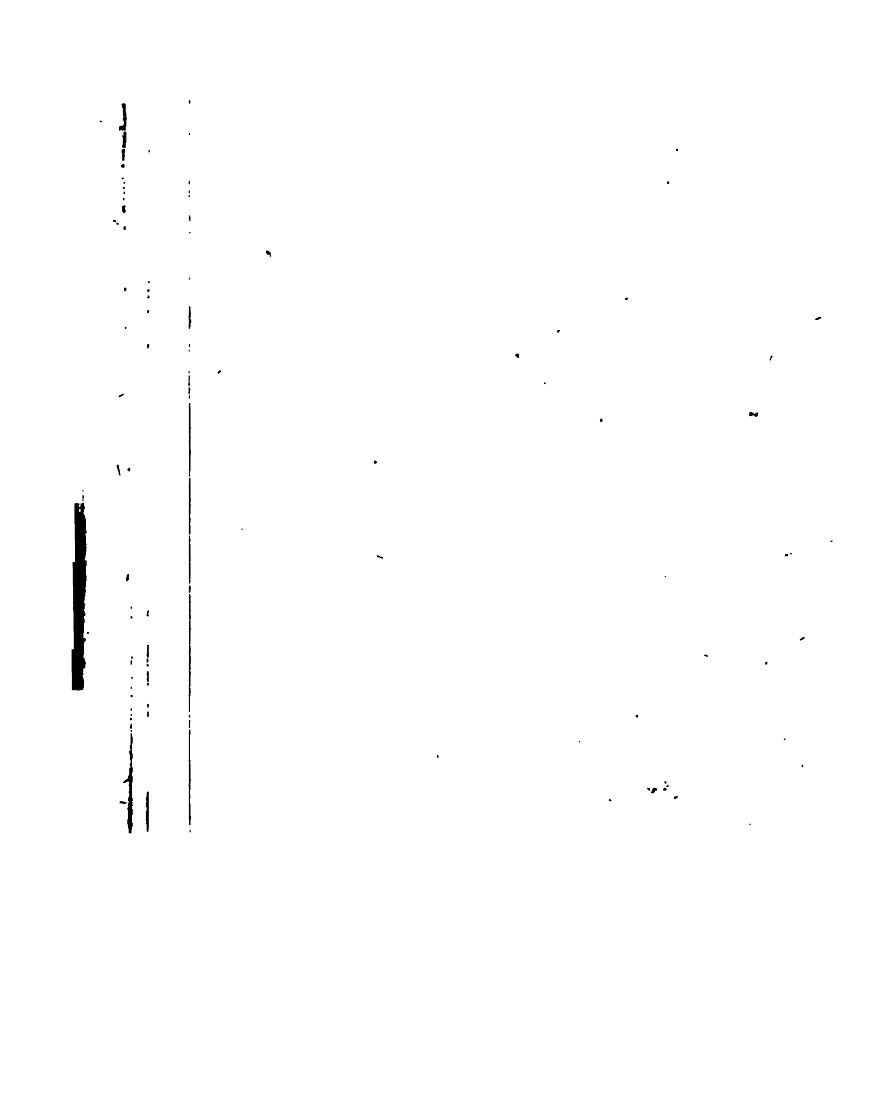

a″
A

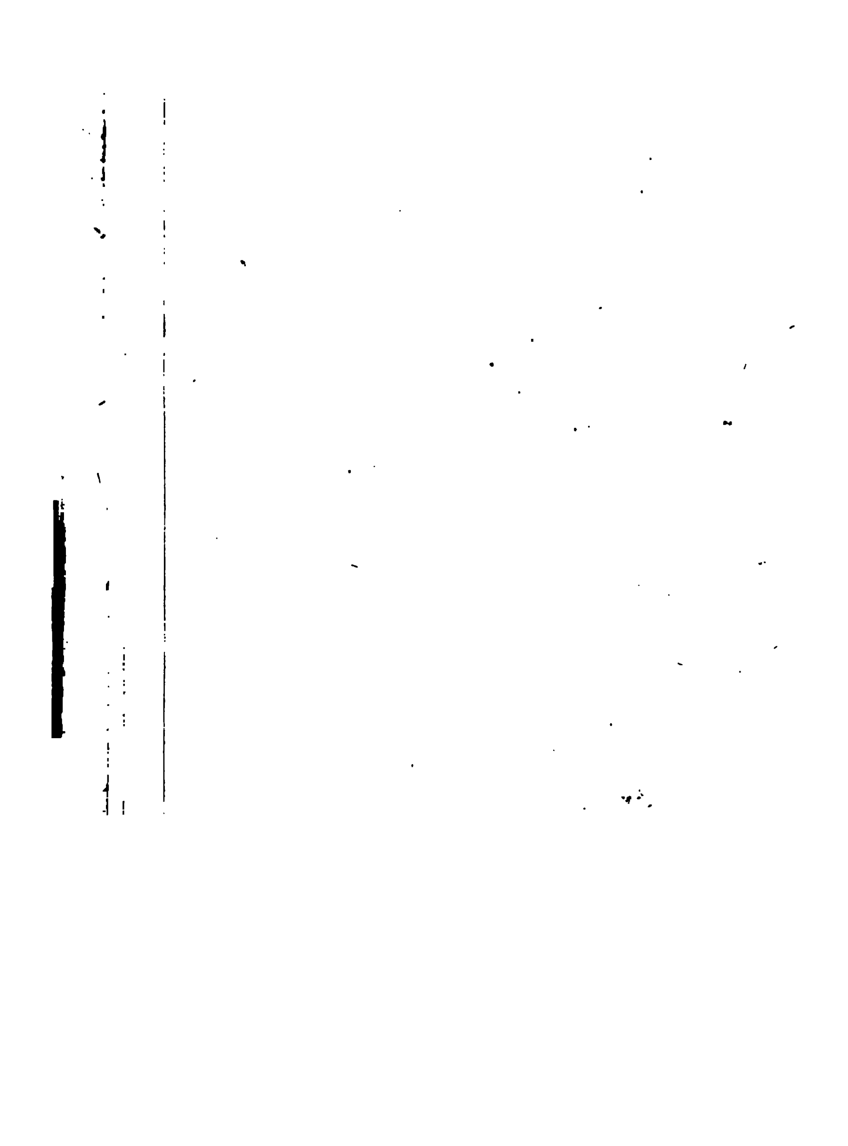




Taf. V.
46.
A
C
B
I
F
A
C
D
E
B
47.
A
E
G
C
E
D
B
48.
A
H
C
E
F
D
B

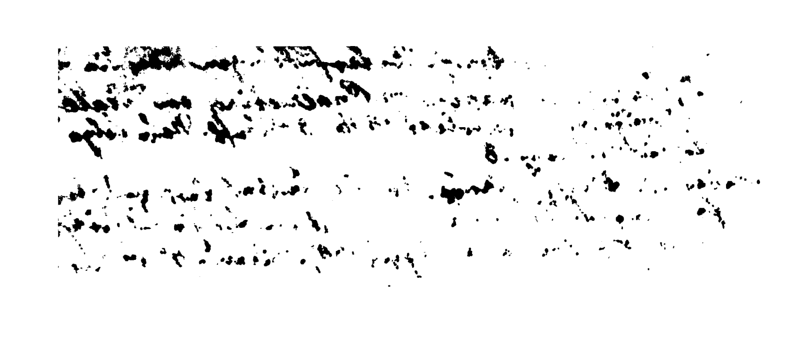






...liche Untersuchungen über die ...
...apers on Engineering ... im Polytechn...
...lblatt 1846, 18tes Heft. Neue Folge Bd...
3.

...rche. Von Jul. Weisbach, Prof. und Bergr...
...Centralblatt von Hülsse und Weisbach...
...g. Leipzig 1847. Wigand. 4° 9te Lief. p...



...aktische Untersuchungen über die ...

...y papers on Engineering vom ...

...tralblatt 1846, 18tes Heft. Neue Folge ...

...and. 8.

...te Auflage. Von L. L. Weisbach, Prof. zu d. Berg...

...lyt. Centralblatt vom Jahre [illegible] und Wissen...

...[illegible]. Leipzig 1847. Wigand. 4° ...















